

4 NAIZMENIČNE STRUJE

4	NAIZMENIČNE STRUJE.....	1
4.1	VREMENSKA ZAVISNOST FIZIČKIH VELIČINA; NAIZMENIČNE STRUJE	5
4.2	TRENTNE VREDNOSTI PROSTOPERIODIČNIH VELIČINA	7
4.2.1	PERIODIČNE VELIČINE	7
4.2.1.1	SREDNJA I EFEKTIVNA VREDNOST PERIODIČNE VELIČINE.....	8
4.2.2	PROSTOPERIODIČNE VELIČINE	9
4.2.2.1	SREDNJA I EFEKTIVNA VREDNOST PROSTOPERIODIČNE VELIČINE	11
4.2.3	ELEMENTI U KOLU NAIZMENIČNE STRUJE	12
4.2.3.1	IDEALNI NAPONSKI GENERATOR	12
4.2.3.2	OTPORNIK.....	13
4.2.3.3	KALEM.....	15
4.2.3.4	KONDENZATOR.....	17
4.2.3.5	REDNA VEZA OTPORNIKA, KALEMA I KONDENZATORA; IMPEDANSA	20
4.3	FAZORSKO PREDSTAVLJANJE PROSTOPERIODIČNIH VELIČINA.....	23
4.3.1.1	FAZORSKO PREDSTAVLJANJE OTPORNIKA, KALEMA I KONDENZATORA	25
4.3.1.2	REDNA VEZA OTPORNIKA, KALEMA I KONDENZATORA.....	26
4.3.1.3	PARALELNA VEZA OTPORNIKA, KALEMA I KONDENZATORA	28

4.4	PREDSTAVLJANJE PROSTOPERIODIČNIH VELIČINA KOMPLEKSNIM BROJEVIMA	30
4.4.1	KOMPLEKSNI BROJEVI	30
4.4.1.1	PREDSTAVLJANJE FAZORA KOMPLEKSNIM BROJEM.....	31
4.4.1.2	PREDSTVLJANJE PROSTOPERIODIČNIH VELIČINA KOMPLEKSNIM BROJEVIMA	32
4.4.2	KOMPLEKSNI NAPON, STRUJA I IMPEDANSA	33
4.4.3	KOMPLEKSNA, AKTIVNA, REAKTIVNA I PRIVIDNA SNAGA PRIJEMNIKA.....	35
4.4.4	FAKTOR SNAGE PRIJEMNIKA	37
4.4.5	REDNA I PARALELNA VEZA IMPEDANSI	38
4.4.6	REŠAVANJE SLOŽENIH KOLA U KOMPLEKSNOM DOMENU.....	39
4.4.6.1	OMOV ZAKON.....	39
4.4.6.2	NAPON NA KRAJEVIMA GRANE KOLA; STRUJA U GRANI	39
4.4.6.3	KIRHOFOVI ZAKONI.....	40
4.4.6.4	NAPON IZMEĐU DVE TAČKE U KOLU	40
4.4.6.5	METOD KONTURNIH STRUJA	40
4.5	TROFAZNA ELEKTRIČNA KOLA	41
4.5.1	JEDNOFAZNI I VIŠEFAZNI GENERATORI I PRIJEMNICI	41
4.5.2	TROFAZNI SISTEM.....	42

4.5.2.1	TROFAZNI GENERATOR I TROFAZNI POTROŠAČ	42
4.5.2.2	VEZA GENERATORA U TROUGAO	44
4.5.2.3	VEZA GENERATORA U ZVEZDU	45
4.5.2.4	NISKONAPONSKA GRADSKA MREŽA.....	47
4.5.2.5	SIMETRIČNI TROFAZNI PRIJEMNIK.....	48
4.5.2.6	SNAGE SIMETRIČNIH TROFAZNIH PRIJEMNIKA.....	53

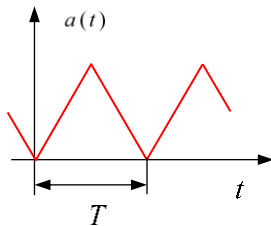
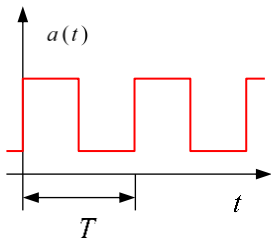
4.1 VREMENSKA ZAVISNOST FIZIČKIH VELIČINA; NAIZMENIČNE STRUJE

Fizičke veličine se mogu podeliti u dve osnovne grupe:

- vremenski nepromenljive veličine (konstantne veličine)
- vremenski promenljive veličine

Posebnu grupu vremenski promenljivih veličina čine **periodične veličine**.

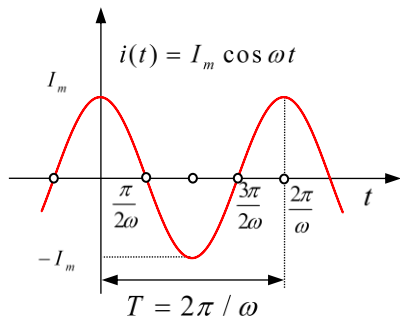
Karakteristika **periodičnih veličina** je da se **ponavljaju na identičan način nakon jednog određenog vremenskog intervala koji se naziva perioda (T)**.



Prostoperiodične veličine su **specijalni slučaj periodičnih veličina** koje se menjaju u vremenu po prostoperiodičnom zakonu, tj. zakonu kosinusa odnosno sinusa.

U elektrotehnici, naizmeničnim strujama nazivaju se struje koje se menjaju po prostoperiodičnom zakonu.

Uzročnici naizmeničnih struja su prostoperiodične elektromotorne sile, a kao posledica naizmeničnih struja javljaju se naizmenični naponi na pojedinim elementima električnih kola



Naizmenične promene napona i struja možemo opisati pomoću:

1. trenutnih vrednosti
2. fazora
3. kompleksnih brojeva.

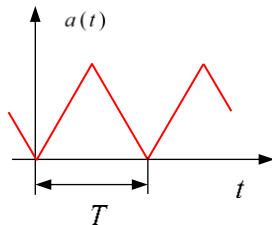
4.2 TRENUTNE VREDNOSTI PROSTOPERIODIČNIH VELIČINA

4.2.1 PERIODIČNE VELIČINE

Periodičnim veličinama se nazivaju veličine čije se vrednosti ponavljaju na potpuno isti način nakon jednog određenog vremenskog intervala, koji se naziva **perioda** T :

$$a(t) = a(t \pm kT), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Vrednost periodične veličine u bilo kom trenutku, $a(t)$, naziva se **trenutna vrednost**.



4.2.1.1 SREDNJA I EFEKTIVNA VREDNOST PERIODIČNE VELIČINE

Srednja vrednost A_{sr} periodične veličine $a(t)$ definiše se na sledeći način:

$$A_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt$$

Efektivna vrednost A periodične veličine $a(t)$ definiše se na sledeći način:

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T a^2(t) dt}$$

Fizičko značenje efektivne vrednosti struje

Efektivna vrednost I periodične struje $i(t)$ jednaka je **onoj stalnoj struji** koja bi u toku jedne periode periodične struje oslobodila istu količinu toplote na istom otporniku R kao i periodična struja:

$$RI^2T = \int_0^T Ri^2(t) dt \Rightarrow I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt \Rightarrow I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

4.2.2 PROSTOPERIODIČNE VELIČINE

Prostoperiodičnim veličinama se nazivaju veličine koje se menjaju u vremenu po prostoperiodičnom zakonu, tj. zakonu kosinusa odnosno sinusa.

$$a(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$a(t)$ - trenutna vrednost

A_m - amplituda, $-A_m \leq a(t) \leq A_m$

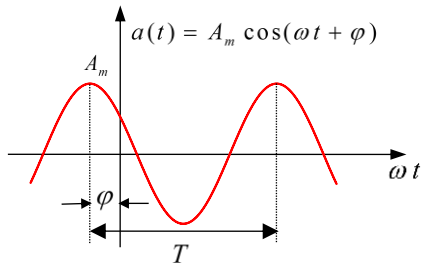
T - perioda

$f = 1/T$ - frekvencija

$\omega = 2\pi/T$ [rad/s] - kružna učestanost

$\omega t + \varphi$ [rad] - ukupna faza

φ - početna faza



U elektrotehnici, za prostoperiodične veličine koristi se naziv **naizmenične veličine**.

Primer. $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$, $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$, $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$

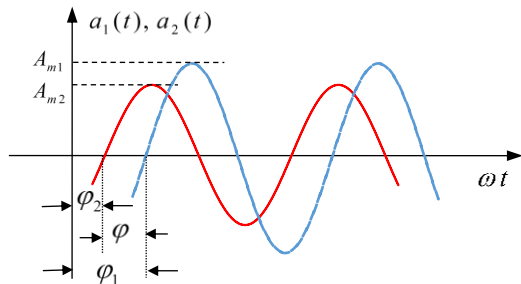
Fazna razlika dve prostoperiodične veličine

$$a_1(t) = A_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{i}$$

$$a_2(t) = A_{m2} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

jednaka je razlici njihovih ukupnih faza

$$\varphi = \underbrace{\omega t + \varphi_1}_{\text{faza od } a_1(t)} - \underbrace{(\omega t + \varphi_2)}_{\text{faza od } a_2(t)}$$



odnosno **fazna razlika jednaka je razlici početnih faza:**

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

Ako je:

$\varphi > 0 \Rightarrow$ prostoperiodična veličina $a_1(t)$ **prednjači** u odnosu na $a_2(t)$ za φ .

$\varphi < 0 \Rightarrow$ prostoperiodična veličina $a_1(t)$ **kasni** u odnosu na $a_2(t)$ za φ .

$\varphi = 0 \Rightarrow$ prostoperiodične veličine $a_1(t)$ i $a_2(t)$ su **u fazi**.

$\varphi = \pi \Rightarrow$ prostoperiodične veličine $a_1(t)$ i $a_2(t)$ su **u protivfazi**.

$\varphi = \pi/2 \Rightarrow$ prostoperiodične veličine $a_1(t)$ i $a_2(t)$ su **u kvadraturi**.

4.2.2.1 SREDNJA I EFEKTIVNA VREDNOST PROSTOPERIODIČNE VELIČINE

Srednja vrednost prostoperiodične veličine:

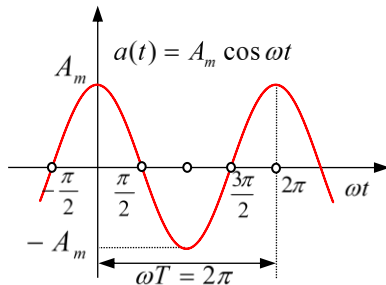
$$A_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt = \frac{1}{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi/\omega} A_m \cos(\omega t) dt = \frac{\omega A_m}{2\pi} \frac{1}{\omega} \sin \omega t \Big|_{t=0}^{t=2\pi/\omega}$$
$$= \frac{A_m}{2\pi} \left[\sin\left(\omega \frac{2\pi}{\omega}\right) - \sin(\omega 0) \right] = \frac{A_m}{2\pi} (0 - 0) = 0$$

$$A_{sr} = 0$$

Efektivna vrednost prostoperiodične veličine:

$$A^2 = \frac{1}{T} \int_0^T a^2(t) dt = \frac{1}{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi/\omega} A_m^2 \cos^2(\omega t) dt = \frac{A_m^2}{2},$$

$$A = \frac{A_m}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} A_m \approx 0.707 A_m$$



Veze između amplitude i efektivne vrednosti struje, napona i ems:

$$I_m = \sqrt{2} I, \quad U_m = \sqrt{2} U, \quad E_m = \sqrt{2} E$$

4.2.3 ELEMENTI U KOLU NAIZMENIČNE STRUJE

U kolima naizmjenične struje mogu se javiti sledeći elementi:

1. idealni naponski generator
2. otpornik
3. kalem
4. kondenzator

4.2.3.1 IDEALNI NAPONSKI GENERATOR

ems : $e(t) = E\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_e)$

Napon: $u(t) = e(t) = E\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_e)$

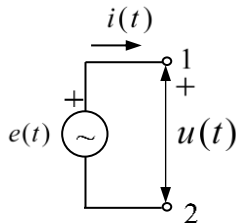
$$u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_u), \quad U = E, \quad \varphi_u = \varphi_e$$

Trenutna snaga generatora:

$$p(t) = u(t)i(t)$$

Srednja (aktivna) snaga generatora:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t) dt$$



4.2.3.2 OTPORNIK

Strujno-naponska karakteristika otpornika:

$$u_R(t) = Ri_R(t)$$

Za $i_R(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_i) \Rightarrow$

$$u_R(t) = RI\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_i) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_u)$$

$$U = RI,$$

$$\varphi_u = \varphi_i$$

Fazna razlika napona i struje otpornika:

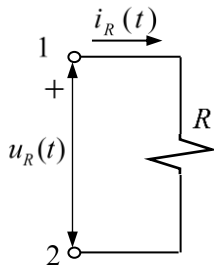
$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0 \quad (\text{napon i struja su u fazi})$$

Impedansa otpornika:

$$Z = U / I = R \quad [\Omega]$$

Admitansa otpornika:

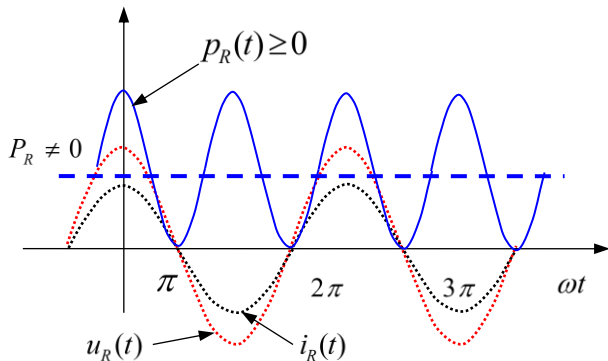
$$Y = I / U = 1 / R \quad [S]$$



Srednja (aktivna) snaga otpornika

$$\begin{aligned} P_R &= \frac{1}{T} \int_0^T p_R(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u_R(t) i_R(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T 2RI^2 \cos^2(\omega t + \varphi_i) dt \\ &= \frac{1}{T} RI^2 T = RI^2 \end{aligned}$$

$$P_R = RI^2$$



4.2.3.3 KALEM

Strujno-naponska karakteristika: $u_L(t) = -e(t) = \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di_L(t)}{dt}$ ili $i_L(t) = \frac{1}{L} \int u_L(t) dt$

Za $i_L(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_i) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} u_L(t) &= L \frac{di_L(t)}{dt} = -\omega LI \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_i) = \omega LI \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_i + \pi/2) \\ &= \underbrace{X_L}_{X_L} I \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_u) = \underbrace{U}_{U} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_u) \end{aligned}$$

$U = X_L I$ - efektivna vrednost napona kalema

$X_L = \omega L$ - reaktansa kalema

$\varphi_u = \varphi_i + \pi/2$ - početna faza kalema

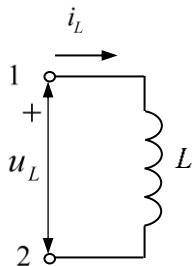
Fazna razlika napona i struje kalema:

$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \pi/2$ (napon prednjači struji za $\pi/2$)

Impedansa i admitansa kalema:

$Z = U / I = \omega L = X_L$ [Ω]

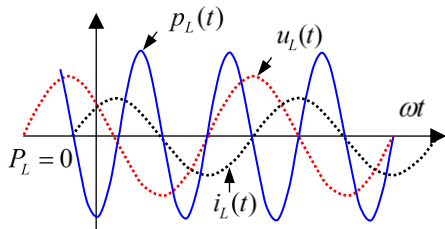
$Y = I / U = 1 / \omega L$ [S]



Srednja snaga kalema:

$$\begin{aligned}P_L &= \frac{1}{T} \int_0^T p_L(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u_L(t) i_L(t) dt \\&= -\frac{1}{T} \int_0^T 2\omega LI^2 \sin(\omega t + \psi) \cos(\omega t + \psi) dt \\&= \frac{\omega LI^2}{T/2} \int_0^{T/2} \sin(2\omega t + 2\theta) dt \\&= 0\end{aligned}$$

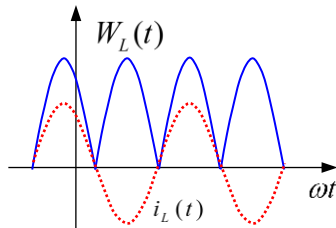
$$P_L = 0$$



Magnetna energija kalema (energija magnetnog polja kalema):

$$p_L(t) = u_L(t) i_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} i_L(t) = \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{1}{2} L i_L^2(t)}_{W_L(t)} \right) = \frac{dW_L(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow W_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) \quad (\text{magnetna energija kalema})$$



4.2.3.4 KONDENZATOR

Strujno-naponska karakteristika: $i_C(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{du_C(t)}{dt}$ ili $u_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt$

Za $u_C(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_u)$ \Rightarrow

$$\begin{aligned} i_C(t) &= C \frac{du_C(t)}{dt} = -\omega CU \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_u) = -\omega CU \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_u - \pi/2) \\ &= \frac{U}{1/\omega C} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_u - \pi/2 + \pi) = \frac{U}{X_C} \sqrt{2} \cos(\omega t + \underbrace{\varphi_u + \pi/2}_{\varphi_i}) = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_i) \end{aligned}$$

$I = U / X_C$ - efektivna vrednost struje kondenzatora

$X_C = 1 / \omega C$ - reaktansa kondenzatora,

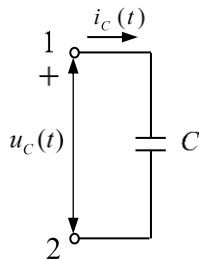
$\varphi_i = \varphi_u + \pi / 2$ - početna faza struje kondenzatora

Fazna razlika napona i struje kondenzatora:

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -\pi / 2 \quad (\text{napon kasni za strujom za } \pi / 2)$$

Impedansa i admitansa kondenzatora:

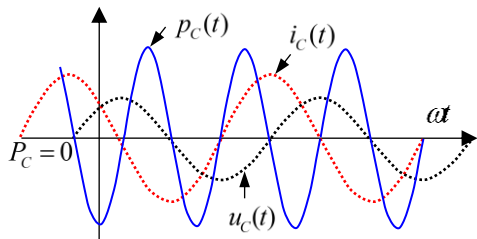
$$Z = U / I = 1 / \omega C \quad [\Omega], \quad Y = I / U = \omega C \quad [S]$$



Srednja snaga kondenzatora:

$$\begin{aligned}
 P_C &= \frac{1}{T} \int_0^T p_C(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u_C(t) i_C(t) dt \\
 &= -\frac{1}{T} \int_0^T 2\omega CU^2 \sin(\omega t + \theta) \cos(\omega t + \theta) dt \\
 &= \frac{\omega CU^2}{T/2} \int_0^{T/2} \sin(2\omega t + 2\psi) dt \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

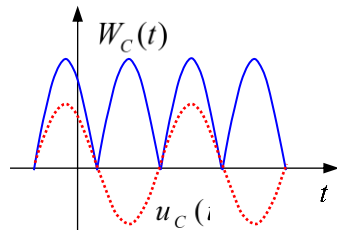
$$P_C = 0$$



Električna energija kondenzatora:
(energija električnog polja kondenzatora):

$$p_C(t) = u_C(t) i_C(t) = C u_C(t) \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{1}{2} C u_C^2(t)}_{W_C(t)} \right) = \frac{dW_C(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow W_C(t) = \frac{1}{2} C u^2(t) \quad (\text{električna energija kondenzatora})$$



	Strujno-naponska karakteristika	Veza između efektivnih vrednosti napona i struje	Impedansa	Fazna razlika između napona i struje ($\varphi = \varphi_u - \varphi_i$)	Aktivna snaga i energija
Otpornik	$u = Ri$	$U = RI$	R	0	$P_R = RI^2$ $W_R = RI^2t$ toplotna
Kalem	$u = L \frac{di}{dt}$	$U = X_L I$	$X_L = \omega L$	$\frac{\pi}{2}$	$P_L = 0$ $W_L(t) = \frac{1}{2} Li^2(t)$ magnetna
Kondenzator	$i = C \frac{du}{dt}$	$U = X_C I$	$X_C = \frac{1}{\omega C}$	$-\frac{\pi}{2}$	$P_C = 0$ $W_C(t) = \frac{1}{2} Cu^2(t)$ električna

4.2.3.5 REDNA VEZA OTPORNIKA, KALEMA I KONDENZATORA; IMPEDANSA

Za $i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t)$, ($\varphi_i = 0$) \Rightarrow treba odrediti napon

$$u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_u), \quad U = ?, \quad \varphi_u = ?$$

Resenje:

$$u_R(t) = Ri(t) = RI\sqrt{2} \cos \omega t$$

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = -\omega LI\sqrt{2} \sin \omega t = -\sqrt{2}X_L I \sin \omega t$$

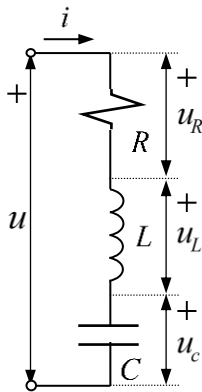
$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt = \frac{\sqrt{2}I}{C} \int \cos \omega t dt = \frac{\sqrt{2}I}{\omega C} \sin \omega t = \sqrt{2}X_C I \sin \omega t$$

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = \sqrt{2}RI \cdot \cos \omega t - \sqrt{2}(X_L - X_C)I \cdot \sin \omega t \quad (1)$$

Napon $u(t)$ se može transformisati koristeći adicijonu formulu:

$$\begin{aligned} u(t) &= \sqrt{2}U \cos(\omega t + \varphi_u) = \sqrt{2}U (\cos \varphi_u \cos \omega t - \sin \varphi_u \sin \omega t) \\ &= \sqrt{2}U \cos \varphi_u \cdot \cos \omega t - \sqrt{2}U \sin \varphi_u \cdot \sin \omega t \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{Iz (1) i (2)} \Rightarrow RI = U \cos \varphi_u, \quad (X_L - X_C)I = XI = U \sin \varphi_u, \quad X = X_L - X_C$$



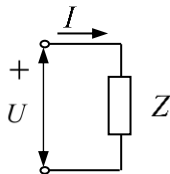
Efektivna vrednost napona:

$$RI = U \cos \varphi_u, \quad XI = U \sin \varphi_u \quad /^2 \Rightarrow U^2 = (RI)^2 + (XI)^2 = U_R^2 + U_X^2$$

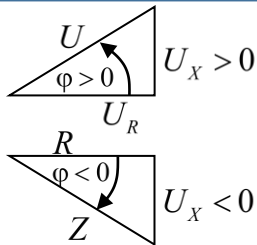
$$U = \sqrt{U_R^2 + U_X^2}, \quad \text{gde su}$$

$$U_R = RI, \quad U_X = XI = X_L I - X_C I = U_L - U_C$$

$$U_L = X_L I, \quad U_C = X_C I$$



trougao napona



Fazni pomeraj napona u :

$$RI = U \cos \varphi_u \Rightarrow \frac{U \sin \varphi_u}{U \cos \varphi_u} = \tan \varphi_u = \frac{X}{R} \Rightarrow \varphi_u = \arctan \frac{X}{R}$$

Fazna razlika napona u i struje i :

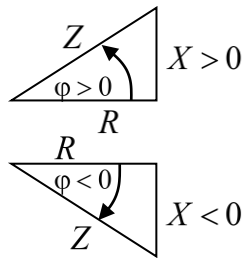
$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \varphi_u = \arctan \frac{X}{R} \quad (\text{može biti } > 0, = 0, < 0)$$

Impedansa redne veze R i L (trougao impedansi)

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$R = Z \cos \varphi, \quad X = X_L - X_C = Z \sin \varphi$$

trougao impedansi



Trenutna snaga na impedansi:

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \varphi) I \sqrt{2} \cos \omega t = 2UI \cos(\omega t + \varphi) \cos \omega t \\ &= 2UI \frac{1}{2} [\cos(\omega t + \varphi - \omega t) + \cos(2\omega t + \varphi)] = UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Aktivna snaga na impedansi:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T [UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + \varphi)] dt \\ &= UI \cos \varphi + \frac{UI}{T} \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi) dt = UI \cos \varphi \end{aligned}$$

$$P = UI \cos \varphi, \quad P = I^2 Z \cos \varphi, \quad P = RI^2 \quad (\text{može biti } > 0, = 0)$$

Reaktivna snaga na impedansi:

$$Q = UI \sin \varphi, \quad Q = I^2 Z \sin \varphi, \quad Q = XI^2 \quad (\text{može biti } > 0, = 0, < 0)$$

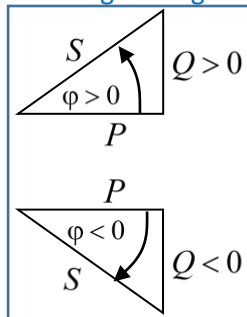
$$Q = XI^2 = (X_L - X_C)I^2 = X_L I^2 - X_C I^2 = Q_L + Q_C,$$

$$Q = Q_L + Q_C, \quad (> 0, = 0, < 0), \quad \text{gde su } Q_L = X_L I^2 > 0, \quad Q_C = -X_C I^2 < 0$$

Prividna snaga S na impedansi:

$$S = UI \quad \Rightarrow \quad P = S \cos \varphi, \quad Q = S \sin \varphi$$

trougao snaga



$$P = S \cos \varphi, \quad Q = S \sin \varphi$$

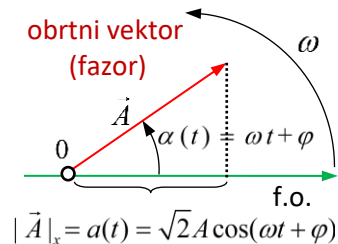
4.3 FAZORSKO PREDSTAVLJANJE PROSTOPERIOSIČNIH VELIČINA

- Prostoperiodičnu veličinu:

$$a(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi) = \sqrt{2}A \cos(\omega t + \varphi)$$

možemo da zamenimo **obrtnim vektorom** \vec{A} kao na slici sa sledećim karakteristikama:

- intenzitet ovog vektora jednak je amplitudi prostoperiodične veličine $|\vec{A}| = A_m = \sqrt{2}A$,
- u trenutku $t=0$ vektor \vec{A} zaklapa ugao φ sa x-osom
- vektor \vec{A} se obrće oko svoje napadne tačke stalnom ugaonom brzinom ω koja je jednaka kružnoj učestanosti prostoperiodične veličine.



- Projekcija vektora \vec{A} na x-osu jednaka je trenutnoj vrednosti prostoperiodične veličine

$$|\vec{A}|_x = a(t) = \sqrt{2}A \cos(\omega t + \varphi)$$

- Opisani obrtni vektor drugačije nazivamo **fazor**, a x-osu - **fazna osa** (f.o.).
- Za razliku od običnih vektora koji ne rotiraju, fazore označavamo sa podvučenom crtom: npr. obrtni vektor \vec{A} označavamo sa \underline{A} .

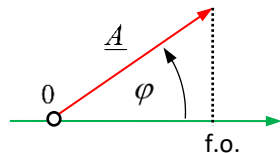
- U daljem izlaganju posmatramo isključivo **električna kola naizmenične struje** sa **jednim naponskim generatorom** čija je kružna učestanost ω .

Kao posledica toga, svi naponi i sve struje u jednom ovakvom električnom kolu su prostoperiodične veličine sa istom kružnom učestanošću ω , pa se ona može izostaviti sa dijagrama.

- Položaj fazora u proizvoljnom trenutku vremena jednoznačno je određen ako znamo položaj fazora u početnom trenutku $t=0$:

Slika fazora u nekom trenutku t dobija se rotacijom slike fazora u trenutku $t=0$ za ugao ωt . Zbog toga se nadalje posmatraju samo fazori u trenutku $t=0$.

fazor u trenutku $t=0$



- U tehničkim primenama pretežno se radi sa efektivnim vrednostima (A), a ne sa amplitudama ($A_m = \sqrt{2}A$) prostoperiodičnih veličina.

Npr. fazor koji predstavlja napon $u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \varphi_u)$ označićemo sa $\underline{U} = U \angle \varphi_u$. Dužina tog fazora odgovara efektivnojvrednosti napona U , a ugao koji fazor zaklapa sa faznom osom jednak je početnoj fazi φ_u .

Primer.

Fazor napona:

$$\underline{U} = U \angle \varphi_u$$

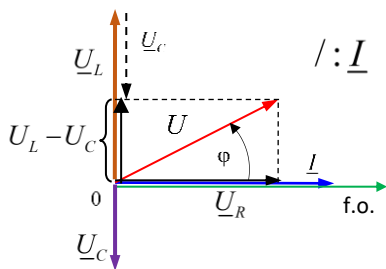
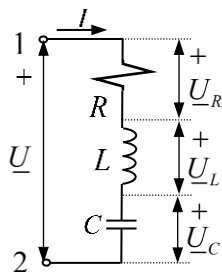
Fazor struje:

$$\underline{I} = I \angle \varphi_i$$

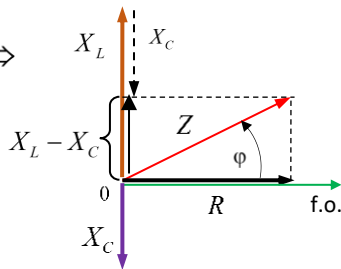
4.3.1.1 FAZORSKO PREDSTAVLJANJE OTPORNIKA, KALEMA I KONDENZATORA

	U, I	Impedansa (otpornost, reaktensa)	$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$	Fazori za $\varphi_i = 0$	Oznake
OTPORNIK: $u = Ri$	$U = RI$	R	0		zelena boja: f.o.
KALEM: $u = L \frac{i}{dt}$	$U = X_L I$	$X_L = \omega L$	$\frac{\pi}{2}$		plava boja: $I = I \angle \varphi_i$
KONDENZA -TOR: $i = C \frac{du}{dt}$	$U = X_C I$	$X_C = \frac{1}{\omega C}$	$-\frac{\pi}{2}$		crvena boja: $U = U \angle \varphi_u$

4.3.1.2 REDNA VEZA OTPORNIKA, KALEMA I KONDENZATORA



$$/: \underline{I} \Rightarrow$$



Poznato je $i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t)$, $\varphi_i = 0$ treba odrediti $u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_u)$

Resenje: Fazna razlika napona u i struje i iznosi $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \varphi_u$

0

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C, \quad U_R = RI, \quad U_L = X_L I, \quad U_C = X_C I$$

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}, \quad \varphi = \varphi_u = \arctan \frac{U_L - U_C}{U_R},$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad X_L = \omega L, \quad X_C = 1/\omega C$$

$$\varphi = \arctan \frac{X_L - X_C}{R}, \quad R = Z \cos \varphi, \quad X_L - X_C = Z \sin \varphi$$

Redna rezonansa: $X_L = X_C$

$$\omega L = 1/\omega C \Rightarrow \omega = \omega_r = 1/\sqrt{LC}$$

rezonantna učestanost

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R = Z_{\min}$$

$$U_L = X_L I = X_C I = U_C \Rightarrow U_L - U_C = 0 \Rightarrow U_{\min} = U_R = RI$$

$$\varphi = \arctan \frac{X_L - X_C}{R} = 0$$

Pretežno induktivno kolo: $X_L > X_C$

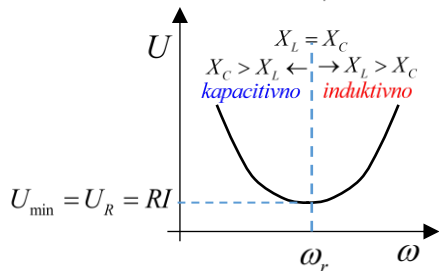
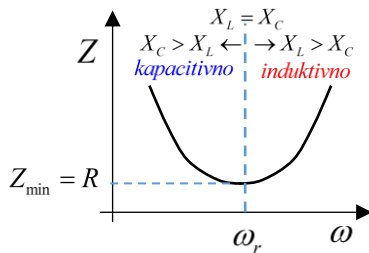
$$\varphi > 0, U_L > U_C$$

$$\omega L > 1/\omega C \Rightarrow \omega > 1/\sqrt{LC} = \omega_r$$

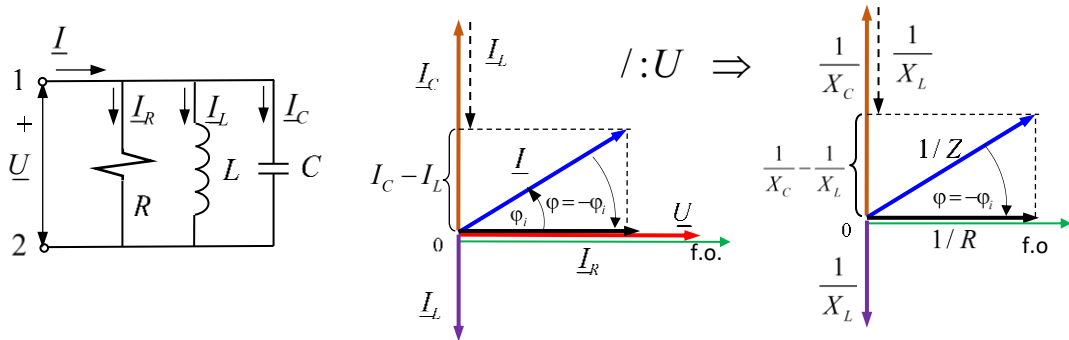
Pretežno kapacitivno kolo: $X_C > X_L$

$$\varphi < 0, U_C > U_L$$

$$1/\omega C > \omega L \Rightarrow \omega < 1/\sqrt{LC} = \omega_r$$



4.3.1.3 PARALELNA VEZA OTPORNIKA, KALEMA I KONDENZATORA



Poznato je $\boxed{u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t)}$, $\boxed{\varphi_u = 0}$, treba odrediti $\boxed{i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_i)}$

Resenje: Fazna razlika napona \underline{u} i struje \underline{i} iznosi $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -\varphi_i < 0$

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C,$$

$$I_R = U / R, \quad I_L = U / X_L, \quad I_C = U / X_C$$

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2},$$

$$\varphi = -\varphi_i = -\arctan \frac{I_C - I_L}{I_R} = \arctan \frac{I_L - I_C}{I_R}$$

$$1/Z = \sqrt{1/R^2 + (1/X_C - 1/X_L)^2}, \quad \varphi = -\varphi_i = -\arctan \frac{1/X_C - 1/X_L}{1/R} = \arctan \frac{1/X_L - 1/X_C}{1/R}$$

Paralelna rezonansa (antirezonansa): $X_L = X_C$

$$\omega L = 1 / \omega C \Rightarrow \omega = \omega_r = 1 / \sqrt{LC} \quad \text{antirezonantna učestanost}$$

$$1 / Z = \sqrt{1 / R^2 + (1 / X_C - 1 / X_L)^2} = 1 / R = (1 / Z)_{\min}$$

$$I_L = U / X_L = U / X_C = I_C \Rightarrow I_C = I_L \Rightarrow I = I_{\min} = I_R = U / R$$

$$\varphi = \arctan \frac{1 / \omega L - \omega C}{1 / R} = 0$$

Pretežno kapacitivno kolo: $X_L > X_C$

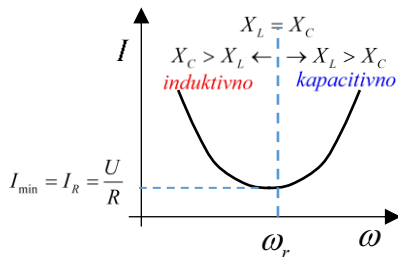
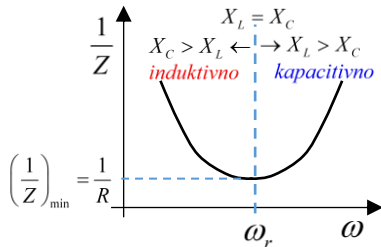
$$\varphi < 0, \quad I_C > I_L$$

$$\omega L > 1 / \omega C \Rightarrow \omega > 1 / \sqrt{LC} = \omega_r$$

Pretežno induktivno kolo: $X_C > X_L$

$$\varphi > 0, \quad I_L > I_C$$

$$1 / \omega C > \omega L \Rightarrow \omega < 1 / \sqrt{LC} = \omega_r$$



4.4 PREDSTAVLJANJE PROSTOPERIODIČNIH VELIČINA KOMPLEKSNIH BROJEVIMA

4.4.1 KOMPLEKSNI BROJEVI

Algebarski oblik kompleksnog broja

$$\underline{z} = a + jb$$

Realni i imaginarni deo kompleksnog broja:

$$a = \operatorname{Re}\{\underline{z}\} \quad \text{i} \quad b = \operatorname{Im}\{\underline{z}\}$$

Moduo i argument kompleksnog broja

$$z = |\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

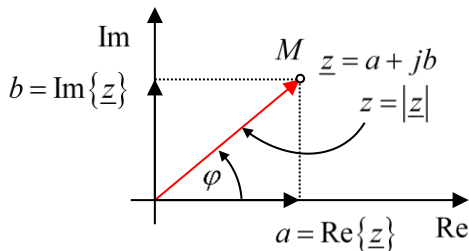
$$\varphi = \arg \underline{z} = \arctan \frac{b}{a}$$

Trigonometrijski oblik

$$\underline{z} = z(\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

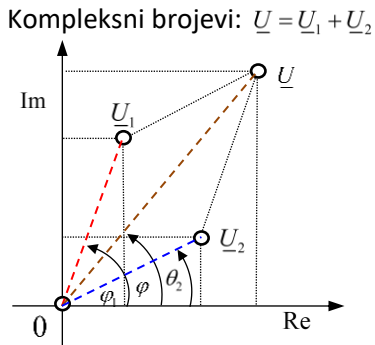
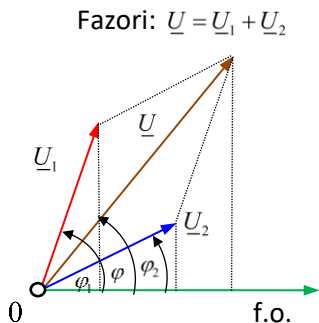
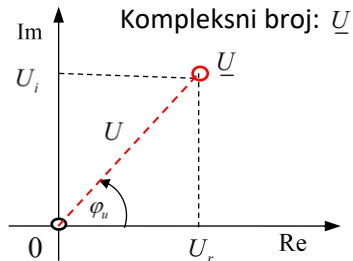
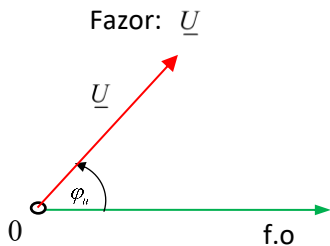
Eksponencijalni oblik

$$\underline{z} = ze^{j\varphi}$$



4.4.1.1 PREDSTAVLJANJE FAZORA KOMPLEKSNIH BROJEM

Svaki fazor se može predstaviti jednim kompleksnim brojem.



4.4.1.2 PREDSTVLJANJE PROSTOPERIODIČNIH VELIČINA KOMPLEKSNIM BROJEVIMA

Trenutne vrednosti napona i struje

$$u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \varphi_i)$$

mogu se prikazati na sledeći način pomoću kompleksnih brojeva

$$\underline{U} = Ue^{j\varphi_u}$$

$$\underline{I} = Ie^{j\varphi_i}$$

4.4.2 KOMPLEKSNI NAPON, STRUJA I IMPEDANSA

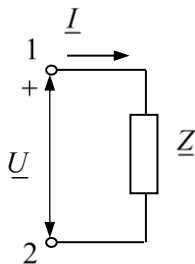
Kompleksni napon i struja

$$\underline{U} = Ue^{j\varphi_u} - \text{kompleksni napon}$$

U - efektivna vrednost napona, φ_u - fazni pomeraj napona

$$\underline{I} = Ie^{j\varphi_i} - \text{kompleksna struja}$$

I - efektivna vrednost struje, φ_i - fazni pomeraj struje



Kompleksna impedansa

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{Ue^{j\varphi_u}}{Ie^{j\varphi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = \boxed{Ze^{j\varphi_p}}$$

$Z = U / I$ - moduo kompleksne impedanse

$\varphi_p = \varphi_u - \varphi_i$ - argument kompleksne

Realni i imaginarni deo impedanse

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi_p} = Z(\cos \varphi_p + j \sin \varphi_p) = \underbrace{Z \cos \varphi_p}_R + j \underbrace{Z \sin \varphi_p}_X = R + jX$$

Aktivna i reaktivna otpornost

$R = Z \cos \varphi_p$ - aktivna otpornost, $X = Z \sin \varphi_p$ - reaktivna otpornost (reaktansa)

KOMPLEKSNA IMPEDANSA, NAPON I STRUJA OTPORNIKA, KALEMA I KONDENZATORA

Otpornik: $\underline{Z} = R e^{j0} = \underline{R}$,

$$\underline{U} = R \underline{I}$$

Kalem: $\underline{Z} = X_L e^{j\pi/2} = \omega L e^{j\pi/2} = \omega L j = \underline{j\omega L}$,

$$\underline{U} = jX_L \underline{I} = j\omega L \underline{I}$$

Kondenzator: $\underline{Z} = X_C e^{-j\pi/2} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2} = -j \frac{1}{\omega C} = \underline{\frac{1}{j\omega C}}$,

$$\underline{U} = -jX_C \underline{I} = -j \frac{1}{\omega C} \underline{I}$$

	Kompleksna Impedansa \underline{Z}	Eksponencijalni oblik kompleksne impedanse \underline{Z}	Veza između kompleksnih napona i struje
Otpornik	R	R	$\underline{U} = R \underline{I}$
Kalem	$j\omega L$ jX_L	$\omega L e^{j\frac{\pi}{2}}$ $X_L e^{j\frac{\pi}{2}}$	$\underline{U} = jX_L \underline{I}$ $\underline{U} = X_L e^{j\frac{\pi}{2}} \underline{I}$
Kondenzator	$\frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C}$ $-jX_C$	$\frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}$ $X_C e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$\underline{U} = -jX_C \underline{I}$ $\underline{U} = X_C e^{-j\frac{\pi}{2}} \underline{I}$

4.4.3 KOMPLEKSNA, AKTIVNA, REAKTIVNA I PRIVIDNA SNAGA PRIJEMNIKA

Kompleksna impedansa prijemnika

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi_p} = R + jX \quad / \cdot \underline{I} \underline{I}^* = I^2 \Rightarrow \underline{Z} \underline{I} \underline{I}^* = \underline{U} \underline{I}^* = \underline{S}$$

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^*$$

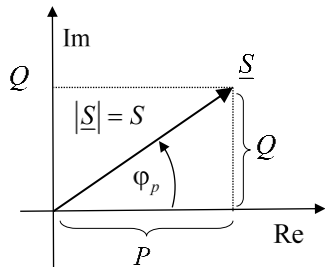
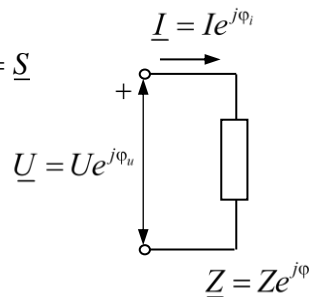
$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = U e^{j\varphi_u} I e^{-j\varphi_i} = UI e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = S e^{j\varphi_p}$$
$$= \underbrace{S \cos \varphi_p}_P + j \underbrace{S \sin \varphi_p}_Q = P + jQ$$

$$\underline{S} = P + jQ$$

Prividna snaga prijemnika

$$S = UI$$

$$S = |\underline{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2}$$



Aktivna snaga prijemnika

$$P = UI \cos \varphi_p = S \cos \varphi_p = \operatorname{Re}\{\underline{S}\}$$

Reaktivna snaga prijemnika

$$Q = UI \sin \varphi_p = S \sin \varphi_p = \operatorname{Im}\{\underline{S}\}$$

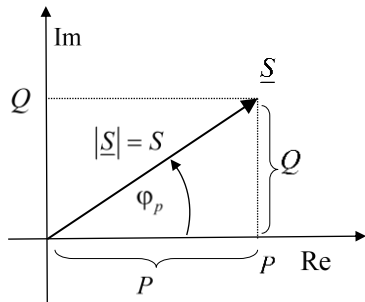
Ostali izrazi za kompleksnu snagu

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^* = \underline{U} \left(\frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \right)^* = \frac{U^2}{\underline{Z}^*}$$

$$\underline{S} = \frac{U^2}{\underline{Z}^*}$$

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^* = \underline{Z}\underline{I}\underline{I}^* = \underline{Z}I^2$$

$$\underline{S} = \underline{Z}I^2$$



4.4.4 FAKTOR SNAGE PRIJEMNIKA

Faktor snage prijemnika

$$k = \frac{P}{S} = \frac{S \cos \varphi_p}{S} = \cos \varphi_p$$

$$k = \cos \varphi_p$$

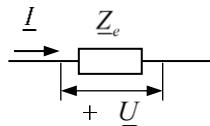
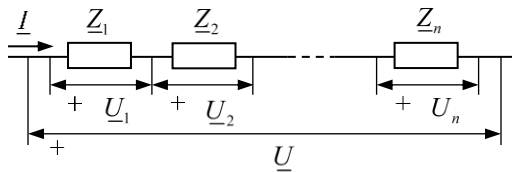
$$0 \leq k \leq 1$$

$k = 1$ - za čisto otporničke prijemnike

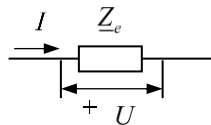
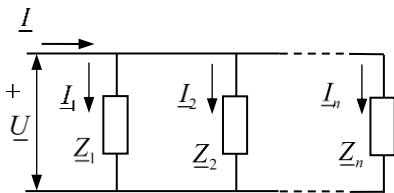
$k = 0$ - za čisto reaktivne prijemnike (kalem i kondenzator)

$0 < k < 1$ - veza otpornika sa kalemovima i/ili kondenzatorima

4.4.5 REDNA I PARALELNA VEZA IMPEDANSI



$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_n$$



$$\frac{1}{\underline{Z}_e} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\underline{Z}_n}$$

4.4.6 REŠAVANJE SLOŽENIH KOLA U KOMPLEKSNOM DOMENU

Omov zakon, Kirhofovi zakoni, kao i sve metode korišćene pri rešavanju kola jednosmernih struja, ostaju i dalje u važnosti u istoj formi i u domenu kompleksnih struja, napona i elektromotornih sila.

4.4.6.1 OMOV ZAKON

Za impedansu

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}, \quad \underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}, \quad \underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}$$

Za prosto kolo

$$\underline{I} = \frac{\sum \underline{E}}{\sum \underline{Z}_i + \sum \underline{Z}}$$

4.4.6.2 NAPON NA KRAJEVIMA GRANE KOLA; STRUJA U GRANI

$$\underline{U}_{AB} = \underline{I} \sum \underline{Z} - \sum \underline{E}, \quad \underline{I} = \underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB} + \sum \underline{E}}{\sum \underline{Z}}$$

4.4.6.3 KIRHOFOVI ZAKONI

I Kirhofov zakon

$$\sum \underline{I} = 0$$

II Kirhofov zakon

$$\sum \underline{Z} \underline{I} = \sum \underline{E}$$

4.4.6.4 NAPON IZMEĐU DVE TAČKE U KOLU

$$\underline{U}_{AB} = \sum \underline{Z} \underline{I} - \sum \underline{E}$$

4.4.6.5 METOD KONTURNIH STRUJA

$$\underline{Z}_{11} \underline{I}_{k1} + \underline{Z}_{12} \underline{I}_{k2} + \cdots + \underline{Z}_{1n_k} \underline{I}_{kn_k} = \underline{E}_{k1}$$

$$\underline{Z}_{12} \underline{I}_{k1} + \underline{Z}_{22} \underline{I}_{k2} + \cdots + \underline{Z}_{2n_k} \underline{I}_{kn_k} = \underline{E}_{k2}$$

⋮

$$\underline{Z}_{n_k 1} \underline{I}_{k1} + \underline{Z}_{n_k 2} \underline{I}_{k2} + \cdots + \underline{Z}_{n_k n_k} \underline{I}_{kn_k} = \underline{E}_{kn_k}$$

4.5 TROFAZNA ELEKTRIČNA KOLA

4.5.1 JEDNOFAZNI I VIŠEFAZNI GENERATORI I PRIJEMNICI

U dosadašnjem kursu razmatrali smo generatore i prijemnike sa dva priključna kraja. Pri tome, prijemnik impedanse Z se na generator povezuje sa dva provodnika.

Takvi generatori i prijemnici se nazivaju jednofaznim, odnosno monofaznim.

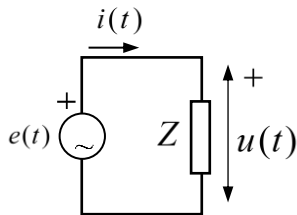
Međutim, moguće je ostvariti generatore i prijemnike sa više pristupnih krajeva.

Takvi generatori i prijemnici se nazivaju višefaznim ili polifaznim, a sistemi u kojima se oni pojavljuju se nazivaju višefazni, odnosno polifazni sistemi.

U energetici se isključivo koriste trofazni sistemi, dok se u drugim oblastima elektrotehnike koriste i drugi polifazni sistemi.

Prednosti trofaznih sistema su:

- zahtevaju manji broj priključnih provodnika za prijemnike; npr. 3 generatora i 3 prijemnika u trofaznom sistemu zahteva 3 priključna provodnika umesto 6.



4.5.2 TROFAZNI SISTEM

4.5.2.1 TROFAZNI GENERATOR I TROFAZNI POTROŠAČ

Trofazni sistem se sastoji iz tri generatora čije su ems istih efektivnih vrednosti i učestanosti, a koje su fazno pomerene jedna u odnosu na drugu za $2\pi/3$ rad .

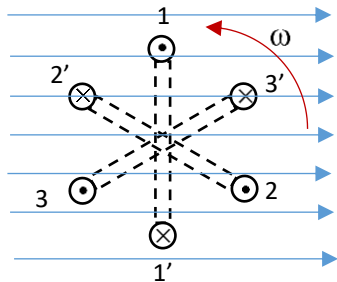
Teorijski, ovaj sistem se može dobiti kada se **tri identična kalema** (1-1', 2-2', 3-3'), međusobno učvršćena i prostorno pomerena za $2\pi/3$, obrću stalnom ugaonom brzinom ω u homogenom magnetnom polju indukcije \vec{B} .

U svakom od ovih kalemova **indukuju se ems:**

$$e_1(t) = \sqrt{2}E \cos(\omega t)$$

$$e_2(t) = \sqrt{2}E \sin(\omega t - 2\pi/3)$$

$$e_3(t) = \sqrt{2}E \sin(\omega t + 2\pi/3)$$



Kompleksne vrednosti napona faza:

$$\underline{E}_1 = E e^{j0}$$

$$\underline{E}_2 = E e^{-j2\pi/3}$$

$$\underline{E}_3 = E e^{j2\pi/3}$$

Kalemovi (namotaji) generatora se mogu vezati na dva načina:

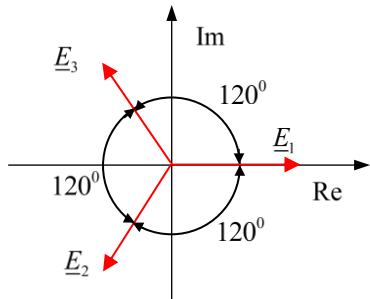
- u trougao i
- u zvezdu.

Sve veličine, koje su vezane za jedan namotaj generatora, nazivaju se **faznim veličinama**.

Veličine koje su vezane za liniju (provodnike između generatora i potrošača) nazivaju se **linijskim veličinama**.

Trofazni potrošač se sastoji od tri impedanse koje se mogu vezati u zvezdu ili trougao.

Ukoliko su impedanse međusobno jednake, za potrošač se kaže da je simetričan, pa je i **trofazni sistem simetričan**, inače je nesimetričan.



4.5.2.2 VEZA GENERATORA U TROUGAO

1. Fazni naponi:

$$\underline{U}_{f1} = \underline{E}_1 = U_f e^{j0} = U_f$$

$$\underline{U}_{f2} = \underline{E}_2 = U_f e^{-j2\pi/3}$$

$$\underline{U}_{f3} = \underline{E}_3 = U_f e^{j2\pi/3}$$

U_f - efektivna vrednost faznih napona

2. Linijski naponi:

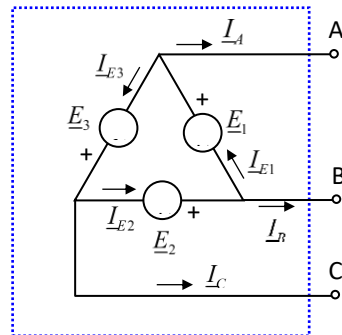
$$\underline{U}_{l1} = \underline{U}_{AB} = \underline{U}_{f1} = U_f = U_l$$

$$\underline{U}_{l2} = \underline{U}_{BC} = \underline{U}_{f2} = U_f e^{-j2\pi/3} = U_l e^{-j2\pi/3}$$

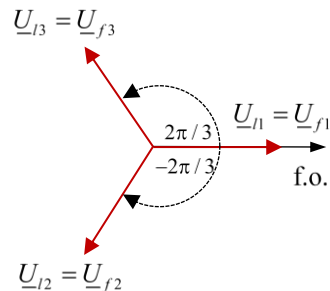
$$\underline{U}_{l3} = \underline{U}_{CA} = \underline{U}_{f3} = U_f e^{j2\pi/3} = U_l e^{j2\pi/3}$$

U_l - efektivna vrednost linijskih napona

Veza između efektivnih vrednosti linijskih i faznih napona: $U_l = U_f$



3. Fazorski dijagram napona:



4.5.2.3 VEZA GENERATORA U ZVEZDU

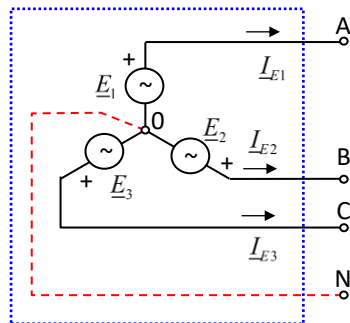
1. Fazni naponi:

$$\underline{U}_{f1} = \underline{U}_A = \underline{E}_1 = U_f e^{j0} = U_f$$

$$\underline{U}_{f2} = \underline{U}_B = \underline{E}_2 = U_f e^{-j2\pi/3}$$

$$\underline{U}_{f3} = \underline{U}_C = \underline{E}_3 = U_f e^{j2\pi/3}$$

U_f - efektivna vrednost faznih napona



2. Linijski naponi:

$$\underline{U}_{l1} = \underline{U}_A - \underline{U}_B = \underline{U}_{f1} - \underline{U}_{f2} = U_f (1 - e^{-j2\pi/3}) = \boxed{U_f \sqrt{3} e^{j\pi/6}} = \boxed{U_l e^{j\pi/6}}$$

$$\underline{U}_{l2} = \underline{U}_B - \underline{U}_C = \underline{U}_{f2} - \underline{U}_{f3} = U_f (e^{-j2\pi/3} - e^{j2\pi/3}) = \boxed{U_f \sqrt{3} e^{-j\pi/2}} = \boxed{U_l e^{-j\pi/2}}$$

$$\underline{U}_{l3} = \underline{U}_C - \underline{U}_A = \underline{U}_{f3} - \underline{U}_{f1} = U_f (e^{j2\pi/3} - 1) = \boxed{U_f \sqrt{3} e^{j5\pi/6}} = \boxed{U_l e^{j5\pi/6}}$$

U_l - efektivna vrednost linijskih napona

Veza između efektivnih vrednosti linijskih i faznih napona

$$U_l = U_f \sqrt{3}$$

3. Fazorski dijagram napona

Fazni naponi

$$\underline{U}_{f1} = U_f e^{j0} = U_f$$

$$\underline{U}_{f2} = U_f e^{-j2\pi/3}$$

$$\underline{U}_{f3} = U_f e^{j2\pi/3}$$

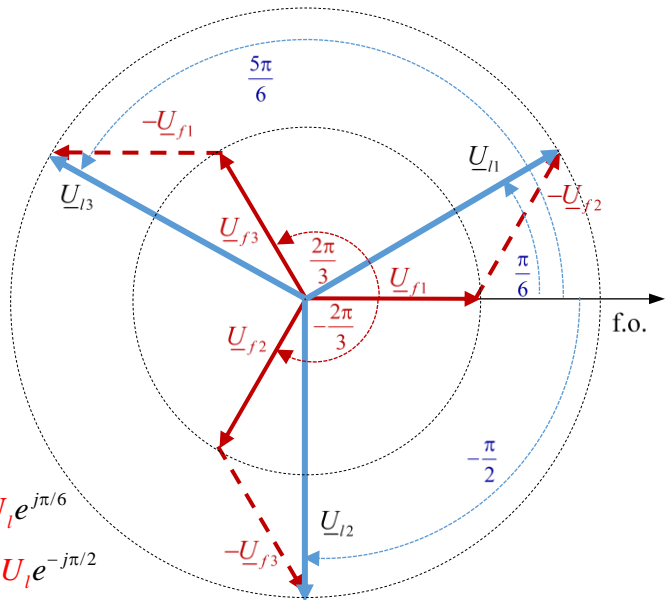
Linijski naponi

$$\underline{U}_{l1} = \underline{U}_{f1} - \underline{U}_{f2} = U_f \sqrt{3} e^{j\pi/6} = U_l e^{j\pi/6}$$

$$\underline{U}_{l2} = \underline{U}_{f2} - \underline{U}_{f3} = U_f \sqrt{3} e^{-j\pi/2} = U_l e^{-j\pi/2}$$

$$\underline{U}_{l3} = \underline{U}_{f3} - \underline{U}_{f1} = U_f \sqrt{3} e^{j5\pi/6} = U_l e^{j5\pi/6}$$

$$U_l = \sqrt{3} U_f$$



4.5.2.4 NISKONAPONSKA GRADSKA MREŽA

- fazni napon je $U_f = 230 \text{ V}$
- linijski napon je $U_l = 400 \text{ V}$ ($\approx 230 \cdot \sqrt{3} \text{ V}$)
- Učestanost u elektroenergetskim sistemima:
 - kod nas i u svim evropskim zemljama $f = 50 \text{ Hz}$
 - u nekim drugim zemljama (na primer, SAD) je $f = 60 \text{ Hz}$

4.5.2.5 SIMETRIČNI TROFAZNI PRIJEMNIK

$$\underline{Z}_p = Z_p e^{j\varphi_p}$$

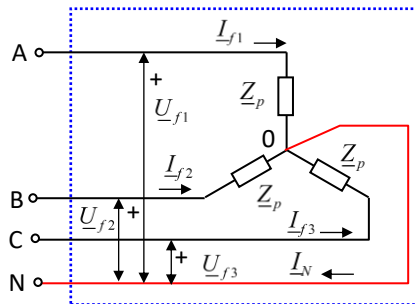
Z_p impedansa

φ_p - faza prijemnika

$$\underline{U}_{f1} = U_f e^{j0} = U_f$$

$$\underline{U}_{f2} = U_f e^{-j2\pi/3}$$

$$\underline{U}_{f3} = U_f e^{j2\pi/3}$$



Veza prijemnika u zvezdu

Linijske struje su jednake faznim strujama

$$I_{l1} = I_{f1} = \frac{\underline{U}_{f1}}{\underline{Z}_p} = \frac{U_f}{Z_p e^{j\varphi_p}} = \frac{U_f}{Z_p} e^{-j\varphi_p} = I_f e^{-j\varphi_p} = I_l e^{-j\varphi_p}$$

$$I_{l2} = I_{f2} = \frac{\underline{U}_{f2}}{\underline{Z}_p} = \frac{U_f e^{-j2\pi/3}}{Z_p e^{j\varphi_p}} = I_f e^{j(-2\pi/3 - \varphi_p)} = I_l e^{-j2\pi/3} e^{-j\varphi_p}$$

$$I_{l3} = I_{f3} = \frac{\underline{U}_{f3}}{\underline{Z}_p} = \frac{U_f e^{j2\pi/3}}{Z_p e^{j\varphi_p}} = I_f e^{j(2\pi/3 - \varphi_p)} = I_l e^{j2\pi/3} e^{-j\varphi_p}$$

Efektivne vrednosti faznih i linijskih struja: $I_l = I_f = U_f / Z_p$

Kod prijemnika vezanog u zvezdu, **efektivna vrednost linijskih struja** je jednaka **efektivnoj vrednosti faznih struja** $I_l = I_f$

Fazorski dijagram

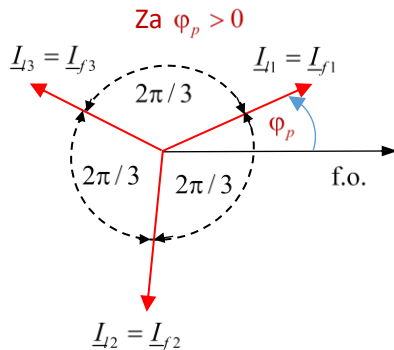
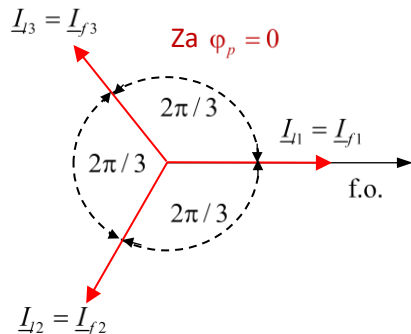
Struja neutralnog provodnika za simetrični prijemnik:

$$\begin{aligned}\underline{I}_N &= \underline{I}_{f1} + \underline{I}_{f2} + \underline{I}_{f3} \\ &= I_l e^{-j\varphi_p} + I_l e^{-j2\pi/3} e^{-j\varphi_p} + I_l e^{-j2\pi/3} e^{-j\varphi_p} \\ &= I_l \underbrace{\left(1 + e^{-j2\pi/3} + e^{j2\pi/3}\right)}_0 e^{-j\varphi_p} = I_l \cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Neutralni provodnik se može izostaviti!

U praksi, sistem nikada nije potpuno uravnotežen:

u neutralnom provodniku postoji struja, ali je ona obično znatno manja od struja u faznim provodnicima.



Veza prijemnika u trougao

$$\underline{Z}_P = Z_P e^{j\varphi_P}$$

$$\underline{U}_{l1} = \underline{U}_{AB} = U_l e^{j0}$$

$$\underline{U}_{l2} = \underline{U}_{BC} = U_l e^{-j2\pi/3}$$

$$\underline{U}_{l3} = \underline{U}_{CA} = U_l e^{j2\pi/3}$$

Fazne struje:

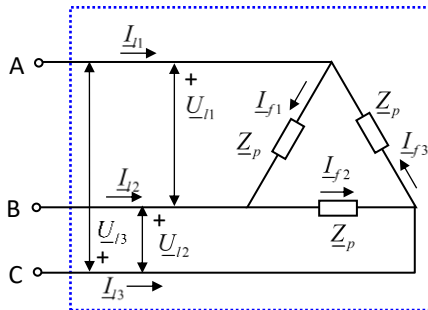
$$\underline{I}_{f1} = \frac{\underline{U}_{l1}}{\underline{Z}_P} = \frac{U_l}{Z_P} = \frac{U_l}{Z_P} e^{-j\varphi_P} = I_f e^{-j\varphi_P}$$

$$\underline{I}_{f2} = \frac{\underline{U}_{l2}}{\underline{Z}_P} = \frac{U_l e^{-j2\pi/3}}{Z_P e^{j\varphi_P}} = \frac{U_l}{Z_P} e^{-j(2\pi/3+\varphi_P)} = I_f e^{-j2\pi/3} e^{-j\varphi_P}$$

$$\underline{I}_{f3} = \frac{\underline{U}_{l3}}{\underline{Z}_P} = \frac{U_l e^{j2\pi/3}}{Z_P e^{j\varphi_P}} = \frac{U_l}{Z_P} e^{j(2\pi/3-\varphi_P)} = I_f e^{j2\pi/3} e^{-j\varphi_P}$$

$I_f = U_l / Z_P$ - efektivna vrednost fazne struje

U_l - efektivna vrednost linijskog napona



Linijske struje:

$$\underline{I}_{l1} = \underline{I}_{f1} - \underline{I}_{f3} = I_f (1 - e^{j2\pi/3}) e^{-j\varphi_p} = \sqrt{3} I_f e^{-j\pi/6} e^{-j\varphi_p}$$

$$\underline{I}_{l2} = \underline{I}_{f2} - \underline{I}_{f1} = I_f (e^{-j2\pi/3} - 1) e^{-j\varphi_p} = \sqrt{3} I_f e^{-j5\pi/6} e^{-j\varphi_p}$$

$$\underline{I}_{l3} = \underline{I}_{f3} - \underline{I}_{f2} = I_f (e^{j2\pi/3} - e^{-j2\pi/3}) e^{-j\varphi_p} = \sqrt{3} I_f e^{j\pi/2} e^{-j\varphi_p}$$

$$I_l = \sqrt{3} I_f = \sqrt{3} U_l / Z_p \text{ - efektivne vrednosti linijskih struja}$$

U_l - efektivna vrednost linijskog napona

Kod prijemnika vezanog u trougao, **efektivna vrednost linijskih struja** je $\sqrt{3}$ puta veća od **efektivne vrednosti faznih struja**

$$I_l = \sqrt{3} I_f$$

Fazorski dijagram struja za $\varphi_p = 0$

Fazne struje

$$\underline{I}_{f1} = I_f e^{j0}$$

$$\underline{I}_{f2} = I_f e^{-j2\pi/3}$$

$$\underline{I}_{f3} = I_f e^{j2\pi/3}$$

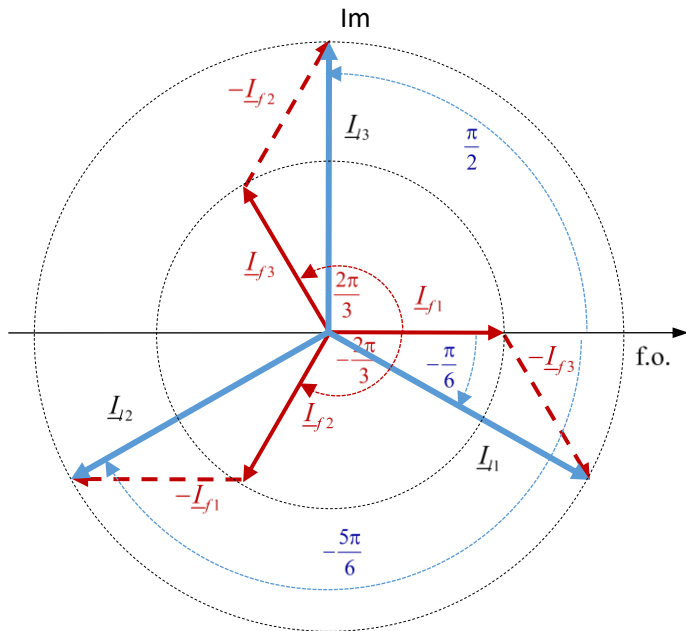
Linijne struje

$$\underline{I}_{l1} = \underline{I}_{f1} - \underline{I}_{f3} = I_l e^{-j\pi/6}$$

$$\underline{I}_{l2} = \underline{I}_{f2} - \underline{I}_{f1} = I_l e^{-j5\pi/6}$$

$$\underline{I}_{l3} = \underline{I}_{f3} - \underline{I}_{f2} = I_l e^{j\pi/2}$$

$$I_l = \sqrt{3} I_f$$



4.5.2.6 SNAGE SIMETRIČNIH TROFAZNIH PRIJEMNIKA

Snaga prijemnika vezanog u zvezdu

Kompleksna snaga:

$$\underline{S} = \frac{U_f^2}{\underline{Z}_p^*} + \frac{U_f^2}{\underline{Z}_p^*} + \frac{U_f^2}{\underline{Z}_p^*} = 3 \frac{U_f^2}{Z_p e^{-j\phi_p}} = \boxed{3 \frac{U_f^2}{Z_p} e^{j\phi_p}} = \boxed{3U_f I_f e^{j\phi_p}} = \boxed{\sqrt{3}U_l I_l e^{j\phi_p}}$$

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \sqrt{3}U_l I_l e^{j\phi_p} = \sqrt{3}U_l I_l (\cos \phi_p + j \sin \phi_p) \\ &= \sqrt{3}U_l I_l \cos \phi_p + j\sqrt{3}U_l I_l \sin \phi_p = P + jQ\end{aligned}$$

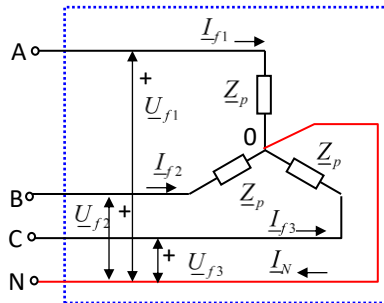
Aktivna, reaktivna i prividna snaga:

$$P = \operatorname{Re}\{\underline{S}\} = \sqrt{3}U_l I_l \cos \phi_p = 3U_f I_f \cos \phi_p$$

$$Q = \operatorname{Im}\{\underline{S}\} = \sqrt{3}U_l I_l \sin \phi_p = 3U_f I_f \sin \phi_p$$

$$S = |\underline{S}| = \left| \sqrt{3}U_l I_l e^{j\phi_p} \right| = \sqrt{3}U_l I_l = 3U_f I_f$$

$$U_l = \sqrt{3}U_f, \quad I_l = I_f$$



Snaga prijemnika vezanog u trougao

Kompleksna snaga:

$$\underline{S} = \frac{U_l^2}{\underline{Z}_p^*} + \frac{U_l^2}{\underline{Z}_p^*} + \frac{U_l^2}{\underline{Z}_p^*} = 3 \frac{U_l^2}{\underline{Z}_p e^{-j\varphi_p}} = \boxed{3 \frac{U_l^2}{\underline{Z}_p} e^{j\varphi_p}} = \boxed{3U_l I_f e^{j\varphi_p}} = \boxed{\sqrt{3}U_l I_l e^{j\varphi_p}}$$

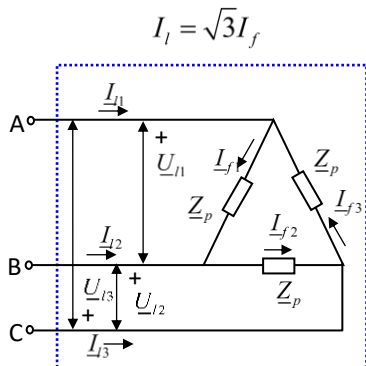
$$\begin{aligned}\underline{S} &= \sqrt{3}U_l I_l e^{j\varphi_p} = \sqrt{3}U_l I_l (\cos \varphi_p + j \sin \varphi_p) \\ &= \sqrt{3}U_l I_l \cos \varphi_p + j\sqrt{3}U_l I_l \sin \varphi_p = P + jQ\end{aligned}$$

Aktivna, reaktivna i prividna snaga:

$$P = \operatorname{Re}\{\underline{S}\} = \sqrt{3}U_l I_l \cos \varphi_p = 3U_l I_f \cos \varphi_p$$

$$Q = \operatorname{Im}\{\underline{S}\} = \sqrt{3}U_l I_l \sin \varphi_p = 3U_l I_f \sin \varphi_p$$

$$S = |\underline{S}| = \sqrt{3}U_l I_l = 3U_l I_f$$

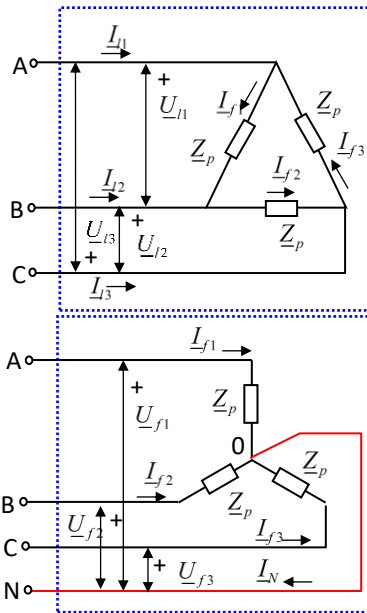


Odnos snaga prijemnika vezanog u trougao i zvezdu

$$\frac{P_{\Delta}}{P_{\star}} = \frac{3 \frac{U_l^2}{Z_p} \cos \varphi_p}{3 \frac{U_f^2}{Z_p} \cos \varphi_p} = \left(\frac{U_l}{U_f} \right)^2 = 3$$

$$\frac{Q_{\Delta}}{Q_{\star}} = \frac{3 \frac{U_l^2}{Z_p} \sin \varphi_p}{3 \frac{U_f^2}{Z_p} \sin \varphi_p} = \left(\frac{U_l}{U_f} \right)^2 = 3$$

$$\frac{S_{\Delta}}{S_{\star}} = \frac{3 \frac{U_l^2}{Z_p}}{3 \frac{U_f^2}{Z_p}} = \left(\frac{U_l}{U_f} \right)^2 = 3$$



Aktivna, reaktivna i prividna snaga tri puta je veća u slučaju **prijemnika vezanog u trougao** u odnosu na **prijemnik vezan u zvezdu**.