Version 2017-09-14

OTTO-VON-GUERICKE-UNIVERSITÄT MAGDEBURG

Digitale Medien und Werkzeuge im Mathematikunterricht

– Einführungskurs „GeoGebra“ –

Begleitmaterial zur Lehrerfortbildung „Digitale Medien und Werkzeuge im Mathematikunterricht“ (Nr.: *17L156002-01*).

Schulformen: Sekundarschule – Gesamtschule – Gymnasium – Gemeinschaftsschule

Leitung: Steffi Grötzsch

Dozenten: Dr. Wolfram Eid, Marcus Röhming

Inhalt

Abbildungsverzeichnis

1. Einleitung

GeoGebra ist (nicht nur) im Mathematikunterricht vielfältig einsetzbar. In der Fortbildungsreihe erfolgt eine Einführung in die Nutzung des Programmes. Dieses Begleitmaterial soll die bearbeiteten Inhalte zusammenfassen und für die Teilnehmer reproduzierbar machen. Darüber hinaus kann das Begleitmaterial als Einstiegspunkt in die Arbeit mit dem Programm genutzt werden.

1.1 Über das Programm

Die Bezeichnung GeoGebra ist ein Kofferwort aus den Begriffen Geometrie und Algebra. Bei dem Programm handelt es sich in erster Linie um eine dynamische Geometriesoftware (DGS). Im Unterschied zu vielen vergleichbaren Produkten steht dabei zusätzlich zu einer geometrischen auch eine algebraische Darstellung aller Objekte zur Verfügung. Entsprechend können geometrische Objekte nicht nur graphisch erstellt und verändert werden, sondern auch durch direkte Manipulation der algebraischen Darstellung. Aktuellere Versionen GeoGebras[1] enthalten darüber hinaus Funktionen zur Erzeugung und Veränderung von Funktionsgraphen, ebener Kurven und Vektoren. Sie verfügen Außerdem über ein *Computeralgebrasystem* (CAS, Giac seit Version 4.4) sowie eine *Tabellenkalkulation* (TK, seit Version 3.2) und eine Statistik-Ansicht. Nicht zuletzt verfügt GeoGebra auch über einen Modus für 3D-Geometrie (seit Version 5.0) sowie auch über einen Prüfungsmodus, der verschiedene Möglichkeiten beinhaltet einen Betrugsversuch zu vermeiden. So werden dabei zum Beispiel andere Rechnerfunktionen, wie unter Windows das Drücken der Windows-Taste oder ein Zugang zu anderen Dateien, deaktiviert.

Ursprünglich entwickelt wurde GeoGebra 2002 von Markus Hohenwarter im Rahmen seiner Doktorarbeit an der Universität Salzburg. Seitdem wurde das Programm kontinuierlich von verschiedenen Entwicklern weiterentwickelt, hat zahlreiche Preise gewonnen und ist heute ein internationales Produkt. Es ist in Java entwickelt und benötigt grundsätzlich eine Java Runtime Environment (JRE). GeoGebra ist unter der *GNU General Public License* als für nicht kommerzielle Nutzung freies Produkt lizensiert[2].

[1] Dieses Begleitmaterial bezieht sich auf die Version 6.0.382.0 vom 10. August 2017. Alle Inhalte sind 1 zu 1 auch auf die aktuelle Version 5.0.382.0 von GeoGebra Classic angewendet werden.
[2] Für eine kommerzielle Nutzung fallen Lizenzgebühren an. Teile der Software, wie das Installationsprogramm stehen darüber hinaus unter anderen Lizenzen, die eine kommerzielle Nutzung verbieten.

2. Erste Schritte

2.1 Die GeoGebra Homepage

Zur Verfügung steht GeoGebra für die Betriebssysteme Windows, Linux, macOS und seit 2013 auch für Android und iOS. Heruntergeladen werden kann das Programm für das gewünschte Betriebssystem unter https://www.geogebra.org/[3]. Den Nutzer begegnet dann das folgende Bild[4].

Abbildung 1: Startseite der GeoGebra Website

In der Leiste am oberen Bildschirmrand kann mit einem Klick auf das **+ Symbol** GeoGebra im Browser gestartet werden. Hierfür ist entsprechend keine Installation erforderlich, dafür eine konstante Internetverbindung.

Mit dem **Anmelden** Button kann man sich in sein GeoGebra Konto einloggen oder ein neues Konto anlegen. Es ist auch ein LogIn mit einem vorhandenen Google-, Microsoft-, Office365-

[3] Eine zusammenfassende Liste von nützlichen Links und Literaturempfehlungen findet sich auch am Ende des Dokuments.
[4] Alle Darstellungen der Website sowie andere Angaben sind Stand 27.08.2017.

,

Facebook- oder Twitterkonto möglich. Die Erstellung eines Kontos ist für Nutzung von GeoGebra nicht erforderlich. Sie ist aber kostenfrei und ermöglicht die Erstellung von (Online-)*Arbeitsblättern* und *Büchern*. Arbeitsblätter sind dabei im Wesentlichen eine Anordnung von Aufgabenstellung, unterstützenden Materialien und GeoGebraMaterialien, die Schüler im Browser öffnen und bearbeiten können. Bücher wiederum stellen eine Sammlung von Arbeitsblättern dar, die zu einem oder mehreren Themengebieten Aufgaben und Materialien zusammenfassen können. Darüber hinaus können neben Arbeitsblättern und Büchern auch *Gruppen* für Schulklassen, Lerngruppen oder die Zusammenarbeit mit Kollegen erstellt werden.

Mit einem Klick auf **Materialien** (obere Kopfleiste oder Button links unten in Abbildung 1) gelangt der Nutzer in eine umfangreiche Materialdatenbank, in welcher Nutzer ihre GeoGebra Dateien, sowie erstellte Arbeitsblätter und Bücher veröffentlichen können. Auf diese Weise veröffentliche Materialien sind gemäß der Nutzungsbedingungen GeoGebras[5] unter der Creative Commons[6] Lizenz CC BY-SA lizensiert. Damit ist jedem das Recht eingeräumt, diese beliebig zu kopieren, anzupassen, abzuändern und mit beliebigen Medien zu verbreiten (auch kommerziell), sofern eine angemessene Namensnennung erkennbar ist, ein Link zur Lizenz angegeben ist und deutlich wird, wo Änderungen vorgenommen wurden. Darüber hinaus muss das Werk, sollten Änderungen daran vorgenommen worden sein, unter der gleichen Lizenz – also CC BY-SA – veröffentlicht werden.

Die drei Buttons **Geometrie Rechner**, **Grafikrechner** bzw. **3D Rechner** starten die aktuelle Webversion GeoGebras in der entsprechenden Ansicht.

Der Button **Downloads** führt zu verschiedenen Downloadmöglichkeiten[7] Die oberen drei Downloads (**Geometrie Rechner**, **Grafikrechner** bzw. **3D Rechner**) sind für mobile Betriebssysteme und installieren nur den entsprechenden Teil des Funktionsumfangs des gesamten Programms. Weiter unten lässt sich GeoGebra als komplettes Paket herunterladen. Es kann zwischen der aktuellen Iteration von Version 6 (Abbildung 2, Folgeseitem, links) sowie von Version 5 (Abbildung 2, Folgeseite, rechts) unterschieden werden. Diese haben im Wesentlichen den gleichen Funktionsumfang, Version 6 hat sich aber im Vergleich zu seinen Vorgängern optisch stark verändert, weswegen Version 5 als GeoGebra Classic noch immer zum Download zur Verfügung steht.

[5] https://www.geogebra.org/cms/tos
[6] https://creativecommons.org/
[7] https://www.geogebra.org/download

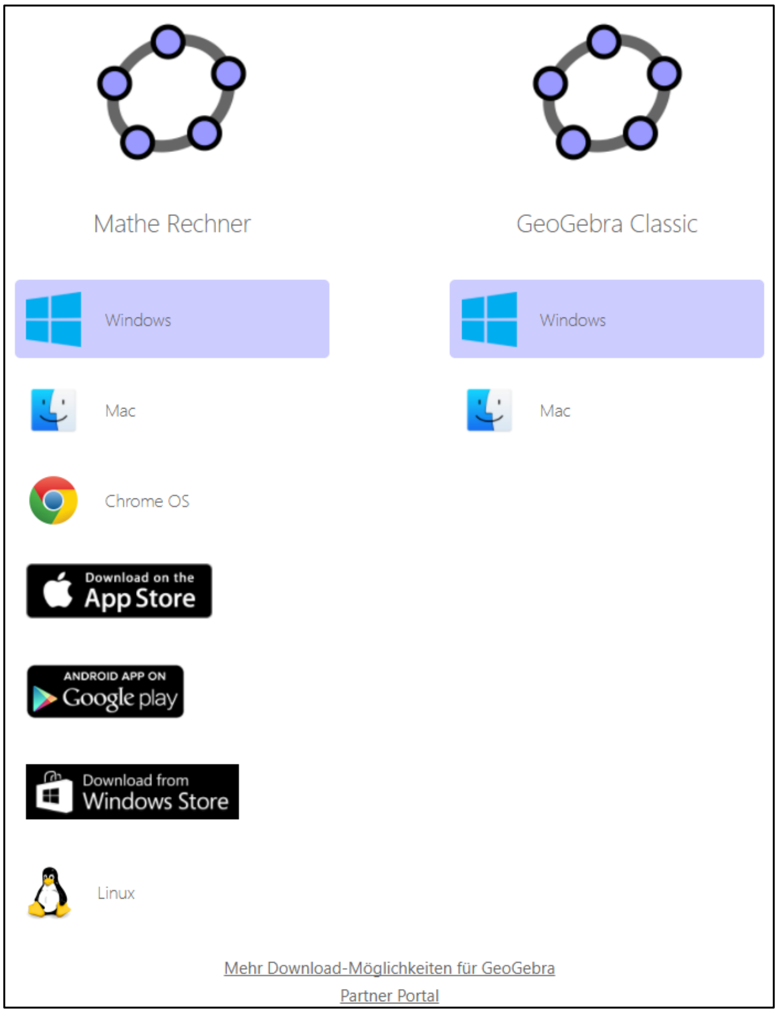


Abbildung 2: Downloadoptionen für das gesamte GeoGebra Paket

Unter diesen Downloads findet man außerdem noch einen Link zu weiteren Downloadmöglichkeiten für GeoGebra. Dieser führt unter anderem zu einer Version für das Rasperry PI 3 (Raspbian jessie) und einer Version, die ohne Installation lauffähig ist und so zum Beispiel von einem USB-Stick aus gestartet werden kann. Zudem findet man hier die Installation des GeoGebra Exam Sticks zur Nutzung GeoGebras bei Tests und Prüfungen[8].

2.2 Oberfläche und Menüs

Nach der Installation der aktuellen Version GeoGebras[9] und dem Start des Programms sieht sich der Nutzer einem in fünf wesentliche Abschnitte geteiltem Fenster gegenüber (vgl. Abbildung 3).

[8] In Österreich ist GeoGebra offizielles Arbeitsmittel bei der Matura.

[9] Nachfolgende Erklärungen und Bebilderungen beziehen sich auf GeoGebra 6. Die Funktionen sind auch auf GeoGebra 5 übertragbar, allerdings können diese unter Umständen wegen des stark verschiedenen Layouts anders erreicht werden.

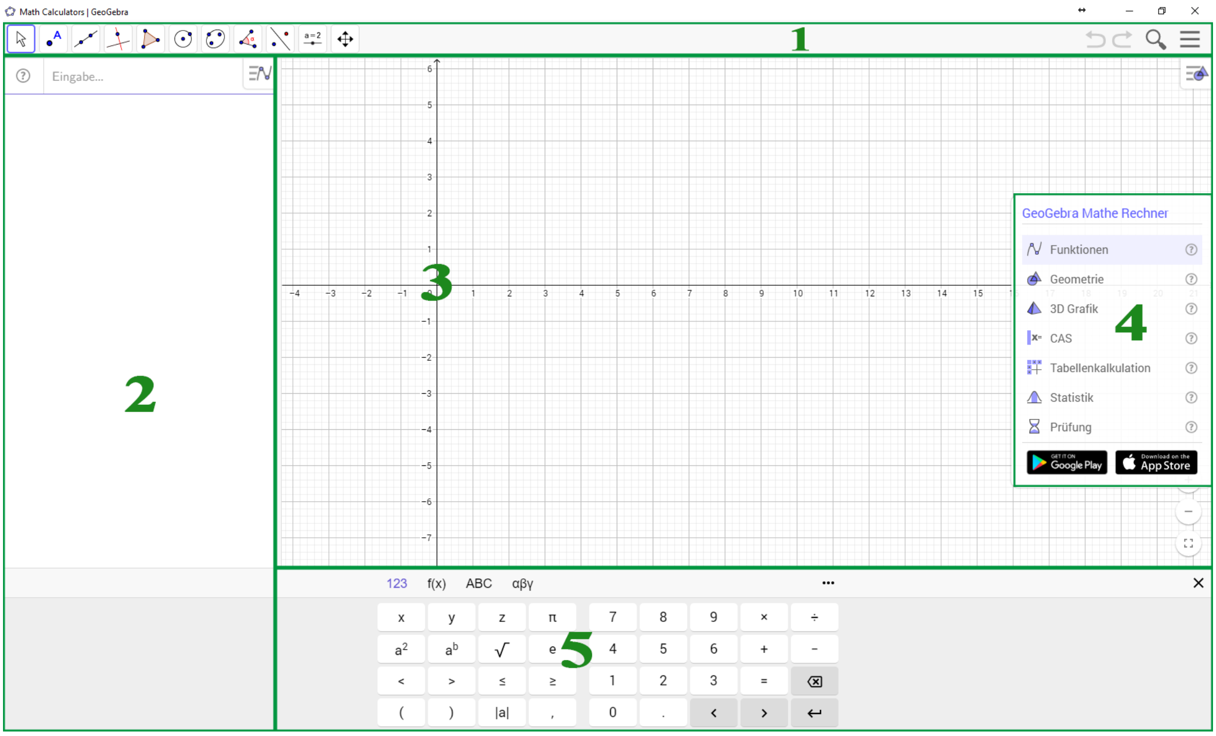


Abbildung 3: Das GeoGebra Fenster nach dem Start des Programms[10]

Zunächst zu **Abschnitt 4** in Abbildung 3. Dieser stellt eine Schnellstartfunktion bzw. -anleitung für die einzelnen Programmteile zur Verfügung, die mit einem Klick auf die entsprechende Funktion bzw. das zugehörige ?-Symbol daneben geöffnet werden können. Mit einem Klick an eine beliebige Stelle in einem anderen Bereich des Fensters werden die Funktionen ausgeblendet.

Abschnitt 5 ist eine Bildschirmtastatur speziell für die Eingabe mathematischer Ausdrücke und GeoGebra Funktionen, die vor allem für den Einsatz auf Tablets hilfreich ist. Auch diese wird mit einem Klick auf einen beliebigen anderen Bereich des Fensters ausgeblendet und kann danach über das Tastatur-Symbol im linken unteren Bereich des Fensters wieder aufgerufen werden.

Abschnitt 1 stellt die Werkzeugleiste der gerade aktiven *Ansicht* (Geometrie, Tabellenkalkulation, …) dar. Im Bild ist der grundlegende Funktionsumfang für 2D Geometrie zu sehen. Dieser ändert sich, wenn eine andere Ansicht aktiv ist. Die Werkzeugleisten aller Ansichten ist in Abbildung 4 dargestellt. Die Symbole der einzelnen Funktionen sind dabei jeweils verschiedene Kategorien unter denen noch weitere Funktionen zu finden sind. Die Funktionen der einzelnen Werkzeugleisten werden in Kapitel 3 bei den entsprechenden Ansichten genauer erläutert.

[10] Alle Darstellungen wurden auf einem Rechner mit dem Betriebssystem Windows 10 und einer Bildschirmauflösung von 1680x1050 aufgenommen. Abweichungen in der Darstellung und Anordnung der einzelnen Teile sind insbesondere bei anderer Auflösung oder Fenstergröße möglich.

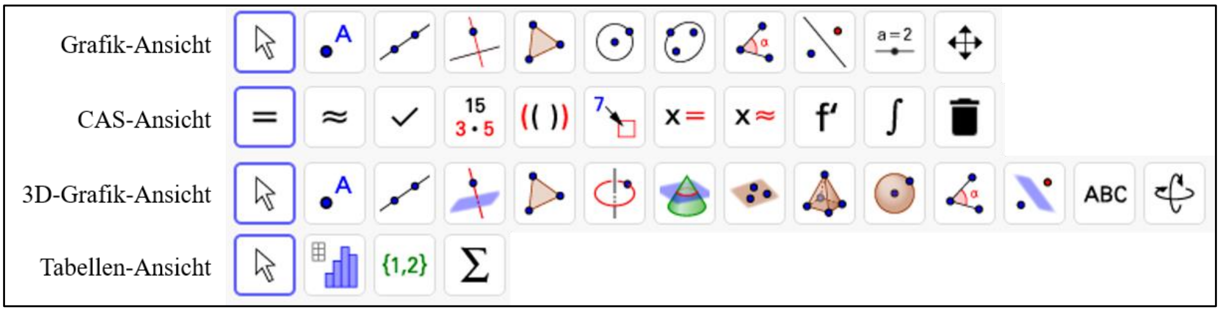


Abbildung 4: Werkzeugleisten der verschiedenen Ansichten

Auf der rechten Seite der Werkzeugleiste finden sich darüber hinaus noch Buttons zum rückgängig machen und wiederherstellen der letzten Aktionen (Pfeile), ein Schnellzugriff auf Materialien der GeoGebra Datenbank (Lupe) und das Hauptmenü (3 waagerechte Linien)[11].

Mit einem Klick auf letztgenannten Button, öffnet sich das Menü wie in Abbildung 5 (rechts) dargestellt[12].
Unter *Bearbeiten/Einstellungen* können hier Grundeinstellungen zu grafischer und algebraischer Darstellung vorgenommen werden. Beispielsweise können Achseneinteilung, Einheiten an den Achsen, Art eines Koordinatengitters, Hintergrundfarbe, Darstellung von Koordinaten in der Algebra-Ansicht oder die Winkeleinheit angepasst werden.

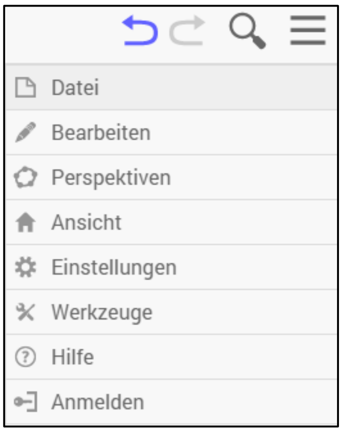


Abbildung 5: Das Hauptmenü

Unter dem Reiter *Perspektiven* können verschiedene Standardansichten ausgewählt werden. So kann zum Beispiel die Perspektive *Funktionen* gewählt werden, welche die Algebra-Ansicht zusammen mit einer Grafik-Ansicht mit Koordinatenachse und -gitter aktiviert, währenddessen die Perspektive *Geometrie* nur die Grafik-Ansicht anzeigt, allerdings bereits ohne Koordinatenachsen und -gitter.

Unter dem Reiter *Ansicht* können derweil einzelne Ansichten nach eigenem Erfordernis zu- oder abgeschaltet werden. Folgende Ansichten stehen dabei zur Verfügung:

- **Algebra**
  algebraische Darstellung aller Objekte
- **CAS**
  integriertes Computeralgebrasystem

---

[11] Dieser Button entspricht der üblichen Menüleiste, wie sie noch in Version 5 vorhanden war.
[12] Hier sollen nur die wichtigsten Funktionen vorgestellt werden. Für eine ausführliche Beschreibung sei auf das Handbuch (https://wiki.geogebra.org/de/Men%C3%BCleiste) verwiesen.

- **Grafik**
  Fenster zur grafischen Darstellung
- **Grafik 2**
  zweites Fenster für eine andere (unabhängige) grafische Darstellung
- **3D Grafik**
  grafische Darstellung von Objekten im $\mathbb{R}^3$
- **Tabelle**
  integrierte Tabellenkalkulation
- **Wahrscheinlichkeitsrechner**
  Rechner und Darstellung verschiedener Verteilungen
- **Konstruktionsprotokoll**
  Konstruktionsprotokoll zur aktiven Grafik-Ansicht zum Nachverfolgen der durchgeführten Aktionen
- **Eingabezeile**
  Eingabemöglichkeit für GeoGebra Befehle zur Erzeugung von Objekten und anderem. Sie ist automatisch in der Algebra-Ansicht zu finden, wenn die Eingabezeile selbst ausgeblendet ist.
- **Navigationszeile**
  Navigation durch die einzelnen Aktionen einer Konstruktion

Der Reiter *Einstellungen* enthält einige Grundeinstellungen, wie die Genauigkeit bei der Darstellung gerundeter Werte (standardmäßig 2 Dezimalstellen), Schriftgröße von Bezeichnungen sowie Spracheinstellungen.

Unter dem Reiter *Werkzeuge* können letztlich die Werkzeuge der einzelnen Ansichten angepasst werden[13] und neue Werkzeuge erstellt werden[14].

Abschnitt 2 ist die *Algebra-Ansicht*. Hier werden alle Objekte algebraisch dargestellt, die der Nutzer erstellt. Neu in GeoGebra 6 ist, dass direkt in der Algebra-Ansicht die Befehle zur Erstellung von neuen Objekten eingegeben werden können.

Abschnitt 3 schließlich ist die *Grafik-Ansicht*. Hier werden alle erstellten Objekte grafisch dargestellt. Objekte können dabei geometrische Objekte, wie Punkte, Geraden, Strecken, Ellipsen

[13] Beispielsweise kann die Funktion des Zeichnens einer senkrechten aus dem Funktionsumfang entfernt werden, wenn Schüler diese Konstruktion ausführlich durchführen sollen.
[14] Beispielsweise kann der Mittelpunkt eines Dreiecks im Grafikfenster einmal durchgeführt werden und diese Konstruktion als Werkzeug für beliebige Dreiecke abgespeichert werden.

oder ähnliches, aber auch Funktionsgraphen, eine Punktwolke einer Liste aus der Tabllenkalkulation, interaktive Elemente, Texte oder importierte Bilder sein.

Auf die Ansichten und damit die Abschnitte 2 und 3 wird im nächsten Kapitel nochmal ausführlicher eingegangen. Allerdings stellt die Kombination aus Algebra- und Grafik-Ansicht die wohl am häufigsten verwendete Darstellung GeoGebras dar. Daher an dieser Stelle noch ein Wort zum Workflow.

Soll beispielsweise ein rechtwinkliges Dreieck konstruiert werden, so kann das komplett im Grafik-Fenster geschehen. Hier wird aus der Werkzeugleiste die Funktion des *Punkt* aus der zweiten Funktionskategorie in der Werkzeugleiste ausgewählt. Bewegt man den Cursor über eine der Funktionen wird am unteren Bereich des Fensters auch ein Hinweis zu seiner Verwendung gegeben. Für Die Funktion Punkt kann in der Grafik-Ansicht einfach mit einem Linksklick ein Punkt erzeugt werden. Die Punkte werden dann auch automatisch bezeichnet. Mit der Funktion *Strecke* ausgewählt kann dann jeweils auf den Start- und Endpunkt der Strecken geklickt und somit das Dreieck gezeichnet werden.

Den gleichen Effekt könnte man auch erreichen, indem man in der Algebra-Ansicht beispielsweise den Befehl $\boldsymbol{A = (1, 2)}$ eingibt. Dieser Befehl erzeugt einen neuen Punkt. Dessen Bezeichnung ist A und er hat die Koordinaten $x = 1$ und $y = 2$. Die allgemeine Syntax zu Erstellung eines Punktes lautet dabei[15]:

$$(< x >, < y >) \qquad [2.1]$$

In den Klammern werden mit Komma getrennt die Argumente des Befehls übergeben. Vor der Klammer steht in der Regel der Bezeichner des Befehls. Die Erstellung eines Punktes funktioniert dabei auch ohne die Angabe eines Befehlsbezeichners. Es gibt darüber hinaus auch noch den Befehl $\boldsymbol{Punkt}(\ldots)$, der an dieser Stelle aber keine Rolle spielt[16]. Alle Befehle die ein Objekt erzeugen können dabei noch bezeichnet werden, indem der Name gefolgt von einem Gleichheitszeichen vorangestellt wird. $\boldsymbol{(1, 2)}$ würde entsprechend entsprechenden Punkt erzeugen und eine automatisierte Bezeichnung geben, welche sich an gängigen Konventionen orientiert. Punkte bekommen also bei A beginnend, lateinische Großbuchstaben zugewiesen, Gera-

[15] Elemente die eine Eingabe erfordert sind dabei in Spitzklammern markiert.
[16] Drei Punkte als Argumente eines Befehls sollen anzeigen, dass es mehrere Versionen dieses Befehls mit unterschiedlichen Optionen gibt, die nicht alle aufgelistet werden sollen.

den Kleinbuchstaben usw. Hingegen erzeugt $\boldsymbol{EinPunkt = (1, 2)}$ den gleichen Punkt und erzwingt die Bezeichnung mit dem Namen „EinPunkt“. Bei der Bezeichnung von Objekten ist dabei auf Groß- und Kleinschreibug zu achten. So können di

3. Die einzelnen Ansichten

3.1 Algebra

Die Algebra-Ansicht wurde im letzten Kapitel bereits erwähnt. Diese verbindet alle anderen Ansichten, wie die Grafik-Ansichten, die Tabellenkalkulation und das CAS, indem zu jedem Objekt, welches dort erstellt wird, die algebraische Darstellung hier angezeigt wird und abgeändert werden kann. Wenn die Eingabezeile ausgeblendet ist, findet sie sich darüber hinaus automatisch in der Algebra-Ansicht wieder, sodass auch neue Objekte mit den entsprechenden Befehlen direkt hier erstellt werden können.[17]

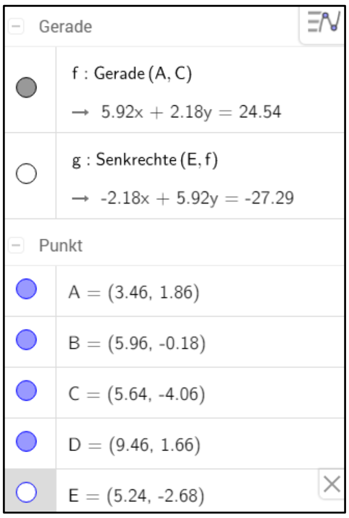


Abbildung 6: Die Algebra-Ansicht

Abbildung 6 (rechts) stellt beispielhaft dar, wie diese Ansicht aussehen kann, wenn bereits einige Objekte erstellt wurden (ob textuell oder über die Grafik-Ansicht ist dabei egal). In diesem Beispiel wurden fünf Punkte A bis E sowie zwei Geraden erstellt. Man erkennt die Koordinaten der Punkte und die beiden Geradengleichungen In der Algebra-Ansicht werden auch gleichzeitig die nötigen Befehle erkennbar, die dafür nötig sind. Der Syntax zur Erstellung eines Punktes wurde bereits in [2.1] dargestellt, man erkennt in der Abbildung darüber hinaus aber auch, dass die Gerade f durch die Punkte A und C verläuft und die Gerade g eine Senkrechte durch den Punkt E auf der Geraden f. Diese können über die entsprechenden Funktionen der Grafik-Ansicht angelegt werden, oder mit den Befehlen

$$GERADE(< Punkt >, < Punkt >) \qquad [3.1]$$

bzw.

$$SENKRECHTE(< Punkt >, < Gerade >) \qquad [3.2]$$

Die Befehle GERADE und SENKRECHTE müssen dabei nicht in Großbuchstaben geschrieben werden, dies dient lediglich der Hervorhebung. Darüber hinaus gibt es auch alternative Definition. Eine Gerade kann beispielsweise auch durch einen Punkt und eine parallele Gerade definiert werden, also $\boldsymbol{GERADE(< Punkt >, < Parallele\ Gerade >)}$. Der Befehl ist hier der Gleiche, lediglich die Anzahl und Art der Argumente innerhalb der Klammern ist verschieden.

[17] Ein wesentlicher Vorteil von GeoGebra gegenüber vergleichbaren Produkten ist die durchgängige Deutsprachigkeit. Neben den Menüs sind so auch die Befehle komplett in deutscher Sprache, sodass deren Verwendung auch für Schüler in der Regel sehr intuitiv möglich ist.

Den Zustand eines Befehls verschiedene Argumente anzunehmen nennt man *Überladenheit.* Der Befehl ist sogar dreifach überladen, er funktioniert auch mit $\boldsymbol{GERADE}(<\boldsymbol{Punkt}>,<\boldsymbol{Richtungsvektor}>)$.

Der Befehl SENKRECHTE ist sogar siebenfach überladen. Die Syntax der Befehle muss sich dabei nicht gemerkt werden, GeoGebra weist auf alle Möglichkeiten ausführlich hin, sobald die ersten drei Buchstaben eines Befehls eingegeben werden.

Mit den farbigen Kreisen vor der algebraischen Darstellung wird angezeigt, ob das jeweilige Objekt in einer der Grafik-Ansichten sichtbar (ausgefüllter Kreis) oder ausgeblendet ist (leerer Kreis). Die Farbe korrespondiert dabei mit der Farbe des Objekts in der grafischen Darstellung.

Neben den genannten Befehlen gibt es eine Vielzahl weitere, die zur Erzeugung von Objekten dienen. Um eine Funktion zu erzeugen kann beispielsweise der entsprechende Befehl

$$FUNKTION(<Funktion>,<Start>,<Ende>) \tag{3.3}$$

verwendet werden. Hiermit kann eine Funktion zwischen zwei x-Werten definiert werden. Soll eine Funktion über alle $x \in \mathbb{R}$ definiert werden, kann diese in Abhängigkeit von x einfach in die Eingabezeile eingegeben werden.

Auch Vektoren können einfach über einen der Befehle

$$VEKTOR(<Punkt>) \tag{3.4}$$

$$VEKTOR(<Anfangspunkt>,<Endepunkt>) \tag{3.5}$$

erzeugt werden.

Mit einem Rechtsklick auf eines der Objekte (vgl. Abbildung 7, hier für einen Punkt) können darüber hinaus weitere Eigenschaften des jeweiligen Objekts aufgerufen werden[18]. Für einen Punkt kann die algebraische Darstellung beispielsweise in Polarkoordinaten geändert werden (für eine Gerade kann zwischen impliziter und expliziter Geradengleichung gewählt werden).

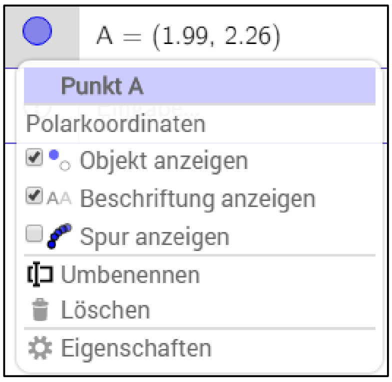


Abbildung 7: Kontextmenü für ein Punktobjekt

Darüber hinaus kann auch hier gewählt werden, ob das Objekt in der Grafik-Ansicht angezeigt werden soll, oder ob nur die Beschriftung ausgeblendet werden soll, der Punkt selbst aber sichtbar sein soll. Das Feld *Spur anzeigen* zeigt von einem Objekt den Pfad an, den es sich bewegt, wenn es verschoben wird. Das kann zum Beispiel für die Darstellung von Ortskurven hilfreich sein, oder um Änderungen irgendwelcher Art zu visualisieren. Mit dem Feld Eigenschaften öffnet sich ein weiteres Fenster, in dem ausführliche weiterführende Einstellungen zum jeweiligen Objekt vorgenommen werden können. So kann es beispielsweise dynamisch ein- oder ausgeblendet werden, Farbe und Form angepasst werden, oder komplexere Skripte dafür festgelegt werden. Diese werden an dieser Stelle aber nicht ausführlich betrachtet, sondern in Abschnitt 4 wenn nötig betrachtet. Für alles Weitere sei auch an dieser Stelle auf das Handbuch verwiesen.

Oben rechts in der Algebra-Ansicht findet man zudem noch das Symbol für die *Gestaltungleiste* für diese Ansicht. Diese Einstellungen findet man (in anderer Form) auch in den anderen Ansichten an gleicher Stelle. Hier kann die Sortierung der Elemente verändert werden, sowie eingestellt werden, was in der Algebra-Anzeige dargestellt werden soll.

[18] Die Eigenschaften können auch mit einem Rechtsklick auf ein Objekt in einer beliebigen anderen Ansicht (z. B. Grafik-Ansicht) aufgerufen werden. In der Algebra-Ansicht ist dies aber auch für ausgeblendete Objekte möglich.

3.2 CAS

Die CAS-Ansicht dient der symbolischen und numerischen Berechnung. Dabei kann diese auch mit der Algebra-Ansicht sowie den grafischen Darstellungen verknüpft werden. Da diese Ansicht dem Leser wohl am vertrautesten ist, sollen an dieser Stelle nur kurz die Funktionen beschrieben werden (vgl. Abbildung 8, rechts).

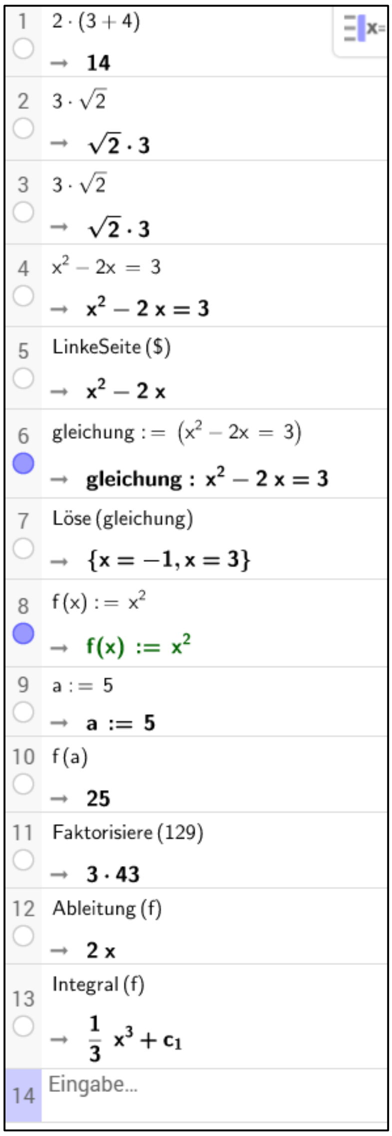


Abbildung 8: Die CAS-Ansicht

Einfache Berechnung zeigen die Zeilen 1 bis 3. Dabei kann sowohl über die Werkzeugleiste als auch via Tastenkombination eingestellt werden, ob die Berechnungen symbolisch (Eingabe) oder numerisch (Strg + Eingabe) ausgewertet werden soll.

Gleichungen können wie aus dem üblichen Mathematikunterricht gewohnt aufgeschrieben werden (Zeile 4). Auf diese können wie in Zeile 5 die Befehle

$$LINKESEITE(< Gleichung >) \tag{3.6}$$

bzw.

$$RECHTESEITE(< Gleichung >) \tag{3.7}$$

angewendet werden – mit dem zu erwartenden Ergebnis.

Zeile 5 zeigt ebenfalls einen relativen Zeilenzugriff mit dem Dollarzeichen für die vorige Zeile. Wird an das Dollarzeichen eine Zeilennummer angehangen (z. B. $4), wird auf die angegebene Zeile Bezug genommen. Um eine Gleichung oder ähnliches in einer Variablen zu speichern, wird der ≔ Operator verwendet (Zeile 6). Auch Funktionen oder Werte können auf diese Weise gespeichert werden (Zeilen 8 und 9). Zeile 10 zeigt das Einsetzen des vorher definierten Wertes für a in die ebenfalls definierte Funktion f.

Für das Lösen von Gleichungen steht der Befehl

$$LÖSE(< Gleichung >) \tag{3.8}$$

Weitere (nicht nur) für den CAS-Modus relevante Befehle zur Faktorisierung sowie zur Bestimmung der Ableitung und der Stammfunktion zeigen die Zeilen 11 bis 13. Diese können ebenfalls über die Werkzeugleiste aufgerufen werden.

$$FAKTORISIERE(< Zahl >), FAKTORISIERE(< Funktion >) \qquad [3.9]$$

$$ABLEITUNG(< Funktion >) \qquad [3.10]$$

$$INTEGRAL(< Funktion >) \qquad [3.11]$$

Auch die Funktionen ABLEITUNG und INTEGRAL sind überladen und nehmen beispielsweise auch den Grad der Ableitung oder die Grenzen des (bestimmten) Integrals als Argumente.

Die in Abbildung 8 dargestellten Befehle erzeugen alle eine Ausgabe. Diese kann unterdrückt werden, indem an den entsprechenden Befehl ein Semikolon (z. B. $\boldsymbol{a := 5}$;) angehangen wird.

Über die Gestaltungsleiste der CAS-Ansicht (Button oben rechts) kann die Schriftfarbe, sowie Schriftgestaltung angepasst werden, eine Navigationsleiste für die CAS-Ansicht zugeschaltet werden und angepasst werden, ob rationale Exponenten als Wurzeln angezeigt werden sollen oder nicht.

3.3 Grafik- bzw. Grafik 2

Die Grafik-Ansicht dient der grafischen Darstellung zweidimensionaler Objekte. Hierfür stehen in der Werkzeugleiste einige Funktionen zur Verfügung (vgl. Abbildung 9).

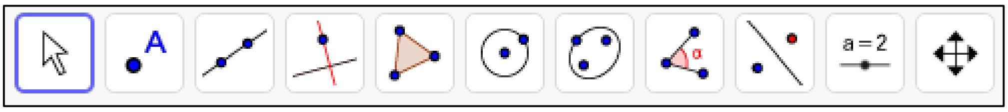


Abbildung 9: Werkzeugleiste der Grafik-Ansicht

Bevor die einzelnen Funktionen exemplarisch vorgestellt werden sollen, zunächst zum Einrichten der Grafik-Ansicht als solches. In Abschnitt 2.2 wurde bereits darauf eingegangen, dass die Einstellungen zu den Koordinatenachsen angepasst werden können. Diese können auch (ebenso wie das Koordinatengitter) ausgeblendet werden, wenn mit ausgewähltem *Bewege*-Werkzeug (in Abbildung 9 blau umrandet) auf die Gestaltungsleiste geklickt wird. Dort finden sich dann die Einstellungen zum Anzeigen der Achsen, des Gitters, sowie zum Standardausrichten der Ansicht und Punktfang am Koordinatengitter (von links nach rechts). Diese Einstellungen ändern sich, wenn ein Punkt- oder Linienwerkzeug ausgewählt wird. Dann können die Objekte selbst über die Gestaltungsleiste angepasst werden.

Die in Abbildung 9 sichtbaren Befehle stellen dabei nur eine Auswahl und den Zugang zu den jeweiligen Kategorien dar. Angezeigt wird dabei immer der aus der jeweiligen Kategorie zuletzt verwendete Befehl.

Abbildung 10 gibt eine Übersicht über die Werkzeuge des zweiten Kategorie. Der Befehl Punkt wurde bereits erwähnt. Wählt man diesen kann man mit einem Klick in der Grafikanzeige an beliebiger Stelle einen Punkt setzen, der ebenso beliebig verschoben werden kann.

Abbildung 10: Die Werkzeuge unter dem Reiter 2. Reiter „Punkt“

Wählt man dabei ein bereits existierendes Objekt, wie eine der Koordinatenachsen, eine Funktion oder eine Kurve, so ist dieser Punkt aber an dieses Objekt gebunden und kann nur entlang diesem bewegt werden.

Wählt man stattdessen den Schnittpunkt von zwei Objekten, wird ist der Punkt fix und bleibt stets der Schnittpunkt dieser Objekte, auch wenn diese sich ändern. Dies entspricht auch dem *Schneide*-Werkzeug in Abbildung 10 bzw. dem Befehl

$$SCHNEIDE(< Objekt >, < Objekt >) \qquad [3.12]$$

Man spricht dann von einem *freien* (dunkelblau), *abhängigen* (hellblau) bzw. *festen* Punkt (schwarz). Der hellblaue Punkt in Abbildung 11 ist damit definiert als ein Punkt der x-Achse[19], während der schwarze der Schnittpunkt der beiden Achsen ist[20]. Die Farben werden von GeoGebra standardmäßig so vergeben, sie können nach eigenem Ermessen natürlich beliebig geändert werden.

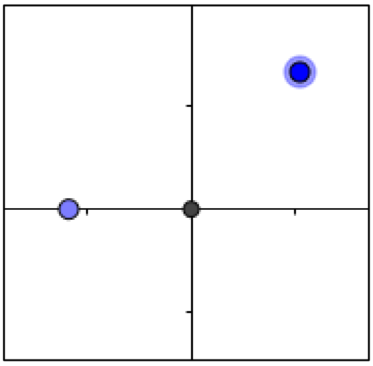


Abbildung 11: Die 3 Punktarten

Ebenso funktionieren die übrigen Befehle dieser Kategorie. Auch die der meisten anderen Kategorien der Grafik-Ansicht sind hinreichend selbsterklärend und sollen deshalb an dieser Stelle nicht genauer erläutert werden.

[19] PUNKT(xAchse)
[20] SCHNEIDE(xAchse, yAchse)

Lediglich auf die vorletzte Kategorie soll noch genauer eingegangen werden (vgl. Abbildung 12), da diese keine üblichen Geometriefunktionen bereitstellt.

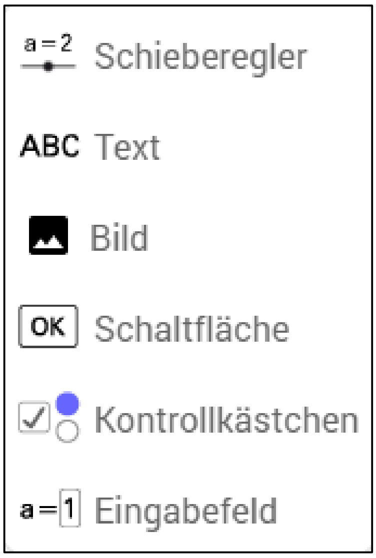


Abbildung 12: Interaktive Elemente in der Grafik-Ansicht

Stattdessen finden sich dort Werkzeuge, um interaktive Arbeitsblätter oder Animationen mit GeoGebra erstellen zu können. So kann beispielsweise über die entsprechende Funktion ein *Schieberegler* eingefügt werden. Dieser erhält eine Bezeichnung (z. B. a in der Abbildung), der in der Definition von Punkten, Funktionen oder ähnlichem verwendet werden kann.

Wird der Schieberegler bewegt ändert sich das entsprechende Objekt ebenfalls dynamisch. Legt man beispielsweise einen Schieberegler mit dem Bezeichner a an und definiert danach in der Eingabezeile eine Funktion $f(x) = x^2 + a$, so hat man damit eine Kurvenschar definiert.

Mit dem *Textfeld* kann in der Grafik-Ansicht ein Text angezeigt werden. Dieser kann auch dynamische Elemente, wie Werte von Schiebereglern oder Koordinaten von Punkten enthalten und so viele Funktionen erfüllen. LaTeX-Formatierungen sind ebenfalls möglich.

Mit dem *Bild*-Werkzeug kann ein Bild eingefügt werden über das Beispielsweise eine Funktion gelegt werden, oder das einfach als Hintergrundbild fungieren soll.

Mit den Werkzeugen *Schaltfläche* und *Kontrollkästchen* können sind einfache Skripte möglich. Somit können bestimmte Dinge nur unter den Bedingungen dieser Elemente angezeigt oder verändert werden.

Ein *Eingabefeld* kann mit einem bereits existierenden Objekt, wie einer Funktionsgleichung verbunden werden, sodass die Schüler im einfachsten Fall eine Eingabe tätigen können, ohne dass sie diese direkt über das Algebra-Menü oder die Eingabezeile tätigen müssen.

3.4 3D-Grafik

Die 3D-Grafik-Ansicht dient der grafischen Darstellung dreidimensionaler Objekte. Hierfür stehen in der Werkzeugleiste einige andere Funktionen im Vergleich mit der im letzten Abschnitt betrachteten Grafik-Ansicht zur Verfügung (vgl. Abbildung 13Abbildung 9).

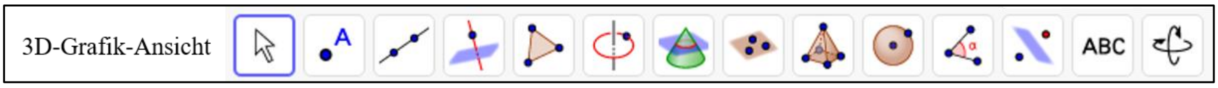


Abbildung 13: Werkzeugleiste der 3D-Grafik-Ansicht

Einige Funktionen verhalten sich ebenso, wie ihr zweidimensionales Pendant. Hierzu gehören die Werkzeuge *Punkt, Schneide, Gerade, Strecke, Winkel* und andere. Die Befehle sind dabei ebenfalls weithin identisch, lediglich der Befehl für einen freien Punkt im dreidimensionalen Raum hat naturgemäß in diesem Fall 3 Argumente (für die x-, y- und z-Koordinate). Er lautet

$$(<x>,<y>,<z>)$$

Das Festlegen eines Punktes ist in der 3D-Grafik-Ansicht einigermaßen beschwerlich, solange er nicht auf einem anderen Objekt liegt. Daher ist hier der genannte Befehl besonders hilfreich.[21]

Spezielle Werkzeuge für die dreidimensionale Geometrie sind:

- *Kreis mit Achse durch Punkt* ,
- *Kreis mit Mittelpunkt, Radius und Richtung*,
- *Schneide zwei Flächen*,
- *Ebene durch 3 Punkte*

und andere. In der Gestaltungsleiste kann zusätzlich zu den gewöhnlichen Grafik-Optionen eine Projektionsart gewählt und eine Animation der gesamten Ansicht eingestellt werden.

3.5 Tabelle, Wahrscheinlichkeitsrechner und Konstruktionsprotokoll

Die übrigen Ansichten werden im Rahmen dieses Materials zunächst nicht weiter betrachtet, weil sie mit den bisherigen Erklärungen auch gut selbstständig erkundet werden können, wozu der Leser sich an dieser Stelle ohnehin ermutigt fühlen soll. Lediglich durch das Ausprobieren kann der Funktionsumfang und die Zusammenhänge die GeoGebra liefert wirklich nachvollzogen werden. Alle weiteren Funktionen, die hier nicht erläutert wurden, werden darüber hinaus in Kapitel 4 an geeigneter Stelle beschrieben.

[21] Das gleiche gilt auch für die Verwendung von Vektoren in der 3D-Grafik-Ansicht

4. Unterrichtsbeispiele

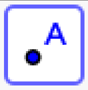
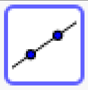
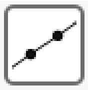
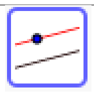
Nachfolgend finden Sie einige Beispiele, wie GeoGebra im Unterricht eingesetzt werden kann. Dabei ist die Erstellung jeweils Schritt für Schritt erläutert. Die Beispiele sind lose nach Schwierigkeit geordnet, sodass der Ungeübte sich zunächst den ersten Beispielen widmen sollte (diese erklären auch detaillierter die Grundfunktionen), während der fortgeschrittene Leser diese auch überspringen kann. Die nötigen Werkzeugsymbole sowie der Name des entsprechenden Werkzeugs sind dabei stets angezeigt. Ist das Symbol farbig, wird es an dieser Stelle das erste Mal in einem der Beispiele verwendet. Ist es grau, wurde es bereits vorher verwendet und seine Funktionsweise deswegen weitestgehend als bekannt angenommen.

4.1 Visualisierung zu den Winkelarten

Das erste Beispiel richtet sich an untere Klassenstufen (insbesondere Klassenstufe 5) und beschäftigt sich mit der Visualisierung verschiedener Winkelarten, genauer mit den Begriffen Neben-, Gegen-, Stufen- sowie Wechselwinkel. Die Darstellung dieser ist häufig mit einer statischen Zeichnung an der Tafel oder einem Arbeitsblatt verbunden. Dabei wird in der Regel selten die Allgemeingültigkeit dieser Winkelbeziehungen deutlich. Durch die Möglichkeit eine interaktive „Zeichnung" anfertigen zu können bietet GeoGebra die Möglichkeit diese Allgemeingültigkeit deutlich zu machen.

Für eine derartige Zeichnung wird in GeoGebra nur eine Grafik-Ansicht ohne Koordinatengitter und –achsen benötigt. Hierfür kann nach dem Start des Programms aus dem Schnellstartmenü direkt die Geometrie-Perspektive gewählt werden. Alternativ können im Hauptmenü ☰ unter *Ansicht* die entsprechenden Ansichten zu- bzw. abgeschaltet werden. Hier sollte entsprechend nur *Grafik* ausgewählt sein.[22] Im Anschluss können über die Gestaltungsleiste der Grafik-Ansicht die Koordinatenachsen sowie das –gitter ausgeblendet werden. Sind die Grundeinstellungen vorgenommen kann mit dem eigentlichen Erstellen der Visualisierung begonnen werden. Diese ist nachfolgend Schrittweise dargestellt. Dabei kann das gleiche Ergebnis auch durch die Verwendung der entsprechenden Befehle erzeugt werden, die an geeigneter Stelle ebenfalls dargestellt sind.

[22] Wer Interesse an der algebraischen Darstellung sowie den zugehörigen Befehlen hat, kann ebenfalls die Algebra-Ansicht zuschalten.

#	Werkzeug(e)	
1		Zunächst wähle man aus der Werkzeugleiste das Punkt-Werkzeug aus.[23] Anschließend klicke man auf 3 beliebige Stellen in der Grafik-Ansicht, die nicht auf einer Geraden liegen, um drei Punkte (standardmäßig A, B und C) zu erzeugen.[24]
2		Anschließend wählt man das Geraden-Werkzeug und klickt nacheinander auf A und B.[25] Es wird eine Gerade f durch diese beiden Punkte erzeugt. Bewegt man nun einen der Punkte durch Drag&Drop verschiebt sich auch die Gerade entsprechend mit.
3		Den gleichen Vorgang wiederhole man für die Punkte A und C.[26] Man erhält eine Gerade g durch diese beiden Punkte.
4		Als nächstes wählt man das Werkzeug *Parallele Gerade* aus. Man klicke damit nacheinander auf den Punkt C sowie die Gerade f und erhält damit eine Gerade h, die parallel zu g ist und durch den Punkt C verläuft.[27]

Im Anschluss sollte der Zeichenbereich etwa wie folgt aussehen:

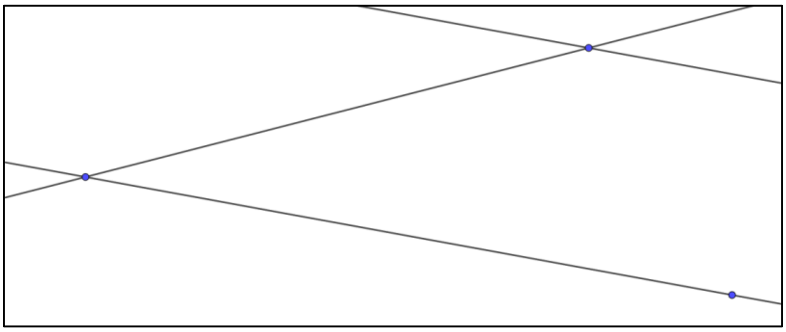
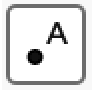
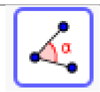


Abbildung 14: Konstruktion nach den ersten Schritten

Nun müssen die für die Visualisierung benötigten Winkel eingezeichnet werden. Hierfür stehen mit dem *Winkel*-Werkzeug  grundsätzlich zwei Möglichkeiten zur Verfügung. Es kann der Winkel entweder bzgl. zweier sich schneidender Geraden oder dreier Punkte bestimmt werden, von denen zwei auf den Schenkeln des Winkels liegen und der übrige den Scheitelpunkt darstellt. Wählt man mit dem Winkel-Werkzeug zwei Geraden aus, führt dies allerdings dazu, dass stets der kleinere Winkel der beiden Geraden oder sein Ergänzungswinkel als Schnittwinkel

23 Das ausgewählte Werkzeug ist blau umrandet.
24 Befehl: $(<x>,<y>)$
25 $GERADE(A,B)$
26 $GERADE(A,C)$
27 $GERADE(C,g)$

ausgewählt werden. Daher ist es für eine genauere Kontrolle über den zu zeichnenden Winkel von Vorteil Hilfspunkte festzulegen, um die zweite beschriebene Variante nutzen zu können. Entsprechend ergibt sich folgendes weiteres Vorgehen.

#	Werkzeug(e)	
5		Zunächst werden wie beschrieben 6 Punkte (D-I) auf den Geraden f,g und h derart platziert, dass sie als Hilfspunkte für die Konstruktion der 8 Winkel an den Schnittpunkten A und C herangezogen werden können (B kann bereits als einer der Hilfspunkte verwendet werden).[28]
6		Im Anschluss wähle man das Winkel-Werkzeug. Nun wähle man der Reihe nach 3 Punkte aus, die den zu zeichnenden Winkel bestimmen, wobei der zweite gewählte Punkt der Scheitelpunkt ist.[29] Dieser Vorgang wird 7 mal wiederholt, um alle Winkel zu zeichnen.[30]
7		Hiernach kann nacheinander auf alle Hilfspunkte (außer B) rechts geklickt werden. Im Kontextmenü entfernt man den Haken bei *Objekt anzeigen*, um die Hilfspunkte auszublenden. Das kann auch über die Algebra-Ansicht erledigt werden.
8		Nun klicke man nacheinander auf die einzelnen Winkel. Über die Gestaltungsleiste kann die Farbe der Punkte geändert werden.[31] Man färbe gegenüberliegende Winkel und Stufenwinkel jeweils in der gleichen Farbe. Mit gedrückter STRG-Taste können auch mehrere Objekte auf einmal ausgewählt werden.

Im Anschluss sollte die Zeichnung in etwa wie folgt aussehen.

[28] Es sollte auffallen, dass bei platzieren der Punkte auf den Geraden alle Punkte hellblau dargestellt werden. Diese sind somit abhängige Punkte ($PUNKT(< Objekt >)$), welche nur auf dem zugehörigen Objekt verschoben werden können.
[29] $WINKEL(< Punkt >, < Scheitelpunkt >, < Punkt >)$
[30] Die Winkel werden stets in mathematisch positiver Richtung gezeichnet.
[31] $SETZEFARBE(< Objekt >, < "Farbe" >)$

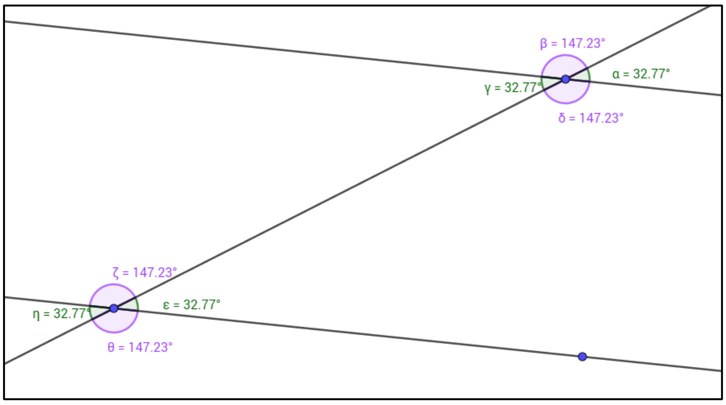


Abbildung 15: Konstruktion nach Einfügen der wesentliuchen Elemente

Sollten die Beschriftungen der Winkel zu nah aneinander sein, können sie per Drag&Drop ein wenig verschoben werden, um eine bessere Lesbarkeit zu erzielen. Bewegt man nun die Punkte A, B oder C, so verändert sich das Bild. Da die Winkel aber alle in Abhängigkeit der Hilfspunkte D bis I und damit in Abhängigkeit der Geraden f, g und h definiert wurden, ändern diese ihr Erscheinungsbild dynamisch und passen sich an die Veränderungen an.

Auf diese Weise kann interaktiv dargestellt werden, dass die Zusammenhänge zwischen den genannten Winkelarten unabhängig von der Lage der Geraden sind. Ferner kann das entstandene Arbeitsblatt auch für eine selbstständige Schülertätigkeit genutzt werden, in welcher diese die Zusammenhänge der Winkel durch Manipulation der Punkte A, B und C selbstständig erkunden. Dies erfordert allerdings neben einer detaillierten Arbeitsanweisung vor allem Schüler, die an selbstständiges Arbeiten gewohnt sind. Ist dies nicht der Fall, kann ein solches dynamisches Arbeitsblatt schnell zur Überforderung führen. Darüber hinaus sollten die Schüler im Idealfall bereits ein wenig mit GeoGebra vertraut sein und insbesondere wissen, wie man Objekte in der Grafik-Ansicht verschiebt. Zuletzt kann nun noch eine Überschrift eingefügt werden.

#	Werkzeug(e)	
9		Man wähle das Werkzeug *Text* aus und blende (falls nicht bereits der Fall) die Gestaltungsleiste ein. In dieser wähle man nun als Schriftart *Fett*, sowie als Textgröße *sehr groß* aus. Anschließend klicke man an eine geeignete Stelle in der Grafik-Ansicht. Es öffnet sich ein neues Fenster, in welcher eine geeignete Überschrift eingetragen werden kann. Abschließend bestätige man die Eingabe mit einem Klick auf den *OK*-Button.

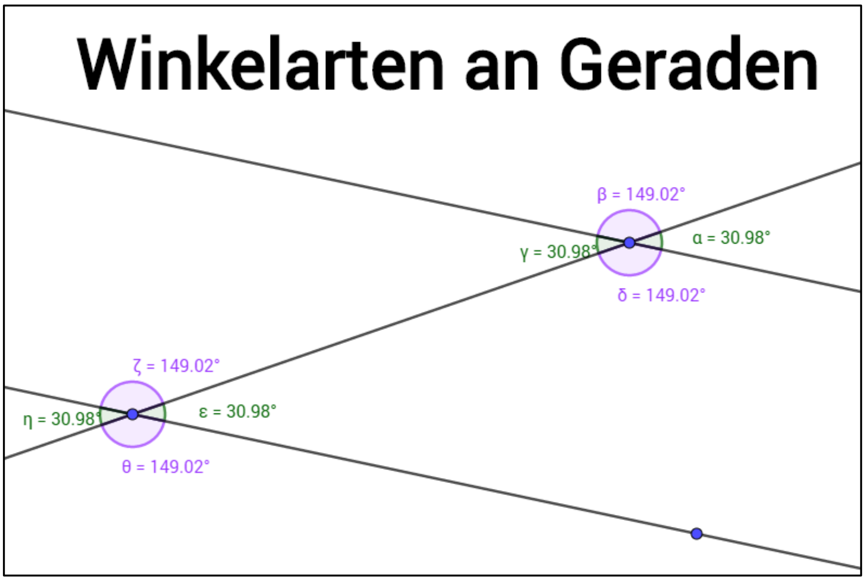


Abbildung 16: fertiges Arbeitsblatt

Mit ausgewähltem Text-Werkzeug kann das eingefügte Textfeld auch nachträglich noch verschoben werden. Wenn das Textfeld selbst markiert ist, kann das Erscheinungsbild auch über die Gestaltungsleiste oder die *Eigenschaften* geändert werden. Da keine mathematischen Symbole oder dynamischen Inhalte von GeoGebra Objekten benötigt werden, ist eine Betrachtung des Reiters *Erweitert* hier nicht vonnöten. Trotzdem kann an dieser Stelle natürlich auch hiermit experimentiert werden. So kann beispielsweise die Gleichheit der Winkel mit einem Textfeld verdeutlicht werden.

#	**Werkzeug(e)**	
10		Man wähle erneut das Text-Werkzeug und wähle in der Gestaltungsleiste die fette Schriftart ab und als Textgröße *Mittel*. Anschließend klicke man erneut auf eine geeignete Stelle in der Grafik-Ansicht. Im sich öffnenden Fenster klicke man auf *LaTeX-Formel* und trage im Textfeld „$\backslash alpha + \backslash beta =$“. Man öffne mit einem Klick den *Erweitert*-Reiter. In der Vorschau sollte „$\alpha + \beta =$“ angezeigt werden. Anschließend wähle man das -Symbol, wähle (zum Beispiel) den Winkel α aus. Dieser wird an der Stelle des Cursors in einem separaten Feld eingefügt. Man füge ein Pluszeichen hinter Winkel α ein und hiernach den Winkel β. Hiernach wiederum ein Gleichheitszeichen. Abschließend füge man erneut den Winkel α als Objekt ein. Man

		wähle das Objektfeld mit einem Klick aus und füge dort nun noch „$+\beta$“ ein[32]. So wird $\alpha + \beta$ stets neu berechnet, wenn sich die Winkel ändern.

Insgesamt sollte die Eingabe dann wie in der folgenden Abbildung aussehen. Der Dialog wird mit OK bestätigt und das Textfeld erscheint daraufhin in der Grafik-Ansicht. Verschiebt man nun die Punkte A, B und C, so aktualisiert sich die Berechnung im Textfeld entsprechend.

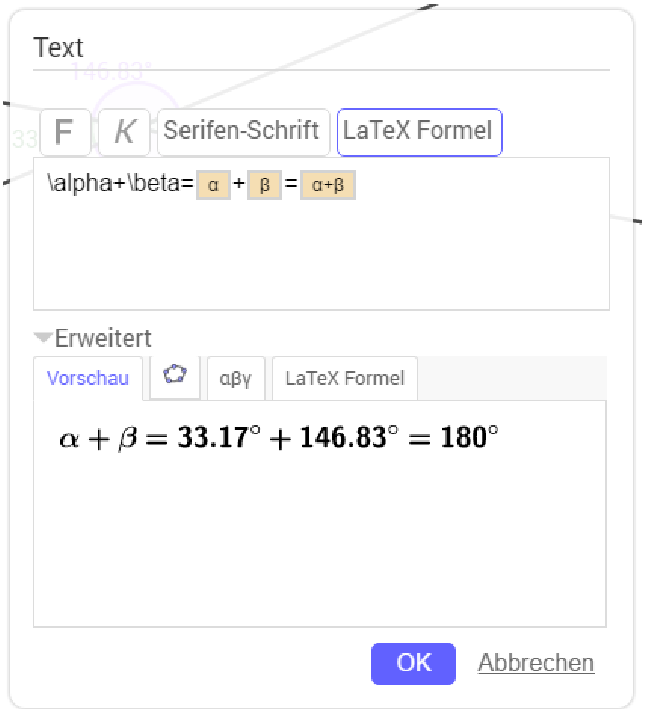


Abbildung 17: Eingabe im Text-Editor

4.2 Anwendung zur Symmetrie

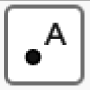
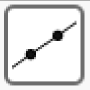
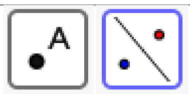
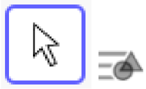
Das zweite Beispiel befasst sich nochmals mit den grundlegenden Werkzeugen der Grafik-Ansicht. Thematisch bewegt es sich ebenfalls in den Klassenstufen 5/6.

Symmetrie findet sich in vielen Objekten, insbesondere auch in der Natur. Bei diesem Beispiel soll eine Visualisierung erstellt werden, die an einem einfachen Beispiel verdeutlicht, was Achsensymmetrie bedeutet. Darüber hinaus kann auch geprüft werden, wie symmetrisch reale Objekte wirklich sind. Dafür wird ein Bild als Hintergrundbild sowie eine Gerade als Spiegelachse eingefügt. Dazu legt man einen Punkt beliebig fest und spiegelt ihn an der Geraden. Diese Aktionen können auch im Unterricht mit den Schülern gemeinsam durchgeführt werden, da sie nur weniger Minuten Zeit brauchen.

[32] Der Winkel β kann über das den Reiter *Mathematische Symbole* eingefügt werden.

Sind die Lernenden bereits ein wenig versierter im Umgang mit GeoGebra, können sie auch selbst (bspw. an einer interaktiven Tafel) die Spiegelachse festlegen oder sie verschieben, wenn das Bild geändert wird. So können relativ einfach wesentliche Eigenschaften von achsensymmetrischen Objekten[33] diskutiert und verdeutlicht werden.

Benötigt wird nur die Grafik-Ansicht ohne Achsen und Koordinatengitter. Entsprechend kann nach dem Start GeoGebras gleich die Geometrie-Perspektive aus dem Schnellstartfenster ausgewählt werden. Dort werden nun einige Dinge „vorbereitet“. Nachfolgend ein Überblick über die zu unternehmenden Schritte.

#	**Werkzeug(e)**	
1		Man erstelle zwei Punkte, indem das Punkt-Werkzeug ausgewählt wird und an zwei beliebige Stellen in der Grafik-Ansicht klickt. Es werden zwei Punkte (A und B) angelegt.
2		Man wähle das Geraden-Werkzeug aus und klicke auf die beiden in 1 erstellten Punkte um eine Gerade f zwischen ihnen zu erzeugen[34]. Diese dient als Spiegelachse.
3		Mit dem Punkt-Werkzeug erstellt man einen weiteren unabhängigen Punkt C (der also nicht auf der in 2 erstellten Gerade liegt). Anschließend wähle man das *Spiegle an Gerade*-Werkzeug aus und klickt auf den soeben erstellten Punkt und danach auf die Gerade. Es wird ein vierter Punkt C‘ erstellt, der zwar Dunkelblau ist, der aber dennoch nicht verschoben werden kann.
4		Von einem der beiden Punkte aus 3 kann nun die Farbe geändert werden. Dies geschieht, indem dieser ausgewählt wird. Dann kann über die Gestaltungsleiste die Farbe geändert werden. Mit dem *Bewege*-Werkzeug klicke man auf beide Punkte rechts und wähle jeweils *Spur anzeigen* aus dem Kontextmenü aus. Wird der entsprechende Punkt nun bewegt, wird seine Spur angezeigt.[35]

[33] Das Beispiel ist genauso auf Punktsymmetrie übertragbar. Lediglich das Erstellen der Spiegelachse, muss durch die Erstellung eines weiteren Punktes ersetzt werden.
[34] Die Gerade kann auch ohne Schritt (1) erstellt werden, indem mit ausgewähltem an zwei beliebige Stellen auf in der Grafik-Ansicht geklickt wird.
[35] Die Spur ist nur temporär und wird gelöscht, sobald der Bildschirminhalt neu gezeichnet wird (beim Verschieben des Bildschirminhalts oder Zoomen). Der Bildschirminhalt kann auch auf Tastendruck neu gezeichnet werden. Hierfür drückt man Strg + F.

Bewegt man nun die beiden Punkte A und B, welche die Spiegelachse definieren, ändert sich der gespiegelte Punkt C‘, da sich der Abstand von C zu f verändert. Bewegt man hingegen den Punkt C, so ist bewegt sich der Punkt C‘ entsprechend seiner Definition als an f gespiegelter Punkt. Es sollte bei den Punkten C und C‘ die Spur dargestellt werden. An dieser Stelle könne das Ergebnis etwa so aussehen wie in Abbildung 18.

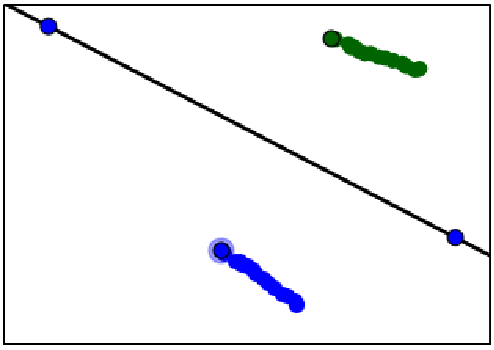


Abbildung 18: Konstruktion nach den ersten Schritten

Die Spur ist dabei lediglich ein temporäres Element, dass beim Aktualisieren der Anzeige gelöscht wird. Das kann durch Bewegen des Grafik-Fenster Ausschnitts über das *Bewege-* oder das *Vergrößere/Verkleinere*-Werkzeug geschehen. Der Bildschirminhalt kann auch aufgefrischt werden, indem man **Strg + F** drückt.

Nun muss lediglich noch ein Bild eingefügt werden. Alternativ kann natürlich auch ein symmetrisches Objekt zusätzlich konstruiert werden. Um ein Bild einzufügen geht man wie folgt vor.

#	**Werkzeug(e)**	
5		Mit einem Klick auf das *Bild*-Werkzeug kann ein Bild in die Grafik-Ansicht eingefügt werden[36].

Damit ist die Erstellung im Wesentlichen abgeschlossen. Verschiebt man nun aber die Symmetrieachse und versucht den freien Punkt zu bewegen, so wird nur außerhalb der Ränder des Bildes die Spur der Punkte angezeigt. Das liegt daran, dass das Bild auf „über“ den Punkten liegt. Dieses Problem ist auf zwei Arten lösbar. Zunächst ruft man über das Kontextmenü (Rechtsklick) die Eigenschaften des gewählten Objektes aus. Es öffnet sich auf der rechten

[36] An der unteren linken und rechten Ecke befinden sich nach dem Einfügen zwei freie Punkte, die zum Verschieben, Drehen und Skalieren des Bildes dienen. Diese können gelöscht werden, man verliert dadurch aber diese Möglichkeiten. Es ist hier besser sie über einen Rechtsklick über *Objekt anzeigen* auszublenden, oder sie einfach zu ignorieren.

Seite das Eigenschaftsfenster mit den Grundeinstellungen. Die erste (zu bevorzugende) Möglichkeit ist das Festlegen des Bildes als *Hintergrundbild*[37]. Die andere Alternative besteht darin, die Ebene der Punkte C und C‘ zu ändern. Dies kann über deren Einstellungen unter *Erweitert* getan werden.

Danach kann mit dem Punkt C die Kontur der gewählten Föigur nachgezogen werden. Der Punkt C‘ bewegt sich auf der anderen Seite der Symmetrieachse entsprechend. Das Ergebnis

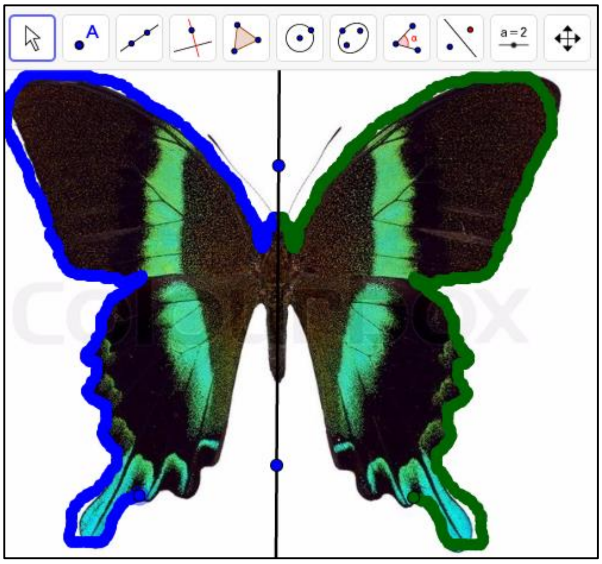


Abbildung 19: fertige Symmetrie Visualisierung[38]

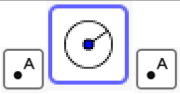
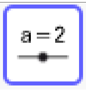
Das Bild kann ausgetauscht werden, um mit den Schülern verschiedene Symmetrieuntersuchungen vornehmen zu können. Eine Erweiterung kann hinsichtlich der Anpassung auf Punktsymmetrie vorgenommen werden. Auch eine Kombination beider Symmetriearten ist in einem oder mit beiden Grafik-Ansichten denkbar. Darüber hinaus könnte auch eine Anpassung hinsichtlich eines Arbeitsblattes für die Lernenden vorgenommen werden, in dem die Schüler selbstständig diese Art von Untersuchungen vornehmen.

4.3 Animation zu den Winkelfunktionen

Das dritte Beispiel soll zeigen, wie die Animationsfunktion GeoGebras eingesetzt werden kann. Thematisch behandelt das Beispiel die Darstellung der Winkelfunktionen (speziell der Sinusfunktion), sowie deren Beziehungen zum Einheitskreis.

[37] Dadurch ist das Bild immer hinter den anderen Objekten. Nachteil ist, dass es in der Grafik-Ansicht nicht mehr verschieb- oder auswählbar ist. Es kann aber noch über die Algebra-Ansicht erreicht werden.
[38] Bild: https://s-media-cache-ak0.pinimg.com/736x/a5/db/4e/a5db4e1a9ead9854ebba93e5d18644e4.jpg

Vorbereitend ist erneut nur die Grafik-Ansicht notwendig. Die Achsen und (bei Bedarf) auch das Koordinatengitter sollten sichtbar sein. Hilfreich ist außerdem die Algebra-Ansicht. Entsprechend kann die standardmäßig eingestellte *Funktionen*-Perspektive beibehalten.

#	Werkzeug(e)	
1		Man lege zunächst einen Punkt A im Koordinatenurpsrung an.[39] Danach wähle man das Werkzeug *Kreis mit Mittelpunkt und Radius* aus und klicke auf A. Es öffnet sich ein neues Fenster, in dem der Radius des Kreises angegeben werden soll. Man gebe einen Radius von 1 an und bestätige mit *OK*. Generiert wird ein Kreis c[40]. Danach lege man einen Punkt B als Schnittpunkt von c und der positiven x-Achse fest[41].
2		Nachfolgend wähle man das *Schieberegler*-Werkzeug und klicke an eine die Stelle der Grafik-Ansicht, an welcher der Schieberegler erstellt werden soll.[42] Es öffnet sich ein weiteres Fenster, in dem der Regler konfiguriert werden kann. Man lege als Intervall [0,2π] fest (Für den Wert von π kann einfach „pi" geschrieben werden). Als Schrittweite wähle man $\frac{\pi}{100}$ und bestätige mit *OK*[43]. Es wird ein Schieberegler a angelegt. Der Startwert ist 1.
3		Nachfolgend werden zwei Punkte P und P‘ festgelegt, dessen Koordinaten von denen von a abhängen. Daher geht dies nur über einen entsprechenden Befehl. P soll sich dabei auf dem Kreis bewegen. Der Punkt P‘ ist der zu P gehörige Punkt auf der Sinus-Funktion. Entsprechend können folgende Befehle zur Erzeugung genutzt werden: $P = (\cos(a), \sin(a))$ $P' = \big(a, y(P)\big)$ $y(P)$ ist dabei die y-Koordinate des Punktes B. Analog kann hier auch $x(P)$ angegeben werden, um am Ende die cos-Funktion zu erhalten oder $y(P)/x(P)$, um die tan-Funktion zu erzeugen.

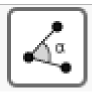
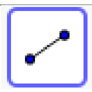
[39] $SCHNEIDE(< Objekt >, < Objekt >) = SCHNEIDE(xAchse, yAchse)$

[40] $KREIS(< Mittelpunkt >, < Radius >) = KREIS(A, 1)$

[41] $SCHNEIDE(< Objekt >, < Objekt >, < Nummer\ des\ Schnittpunktes >) = SCHNEIDE(, xAchse, c, 2)$

[42] Mit ausgewähltem Schieberegler-Werkzeug kann dieser auch nachträglich verschoben werden.

[43] $SCHIEBEREGLER(< Min >, < Max >, < Schrittweite >, < Geschwindigkeit >, < Breite >, < IstWinkel >, < Horizontal >, < Animiert >, < Zufällig >) = SCHIEBEREGLER(0{,}2pi, pi/100)$

		Im Anschluss ändere man über die Gestaltungsleiste die Darstellung von P‘ als Kreuz, sowie die Farbe auf Blau und schalte die Spur ein (Rechtsklick auf P‘ – Spur anzeigen).
4		Man markiere mit dem Winkel-Werkzeug die Punkt B, A und P (in dieser Reihenfolge), um $\angle BAP$ zu zeichnen. Punkt B kann danach ausgeblendet werden (über den zugehörigen ausgefüllten Kreis links in der Algebra-Ansicht oder mit einem Rechtsklick auf den Punkt in der Grafik-Ansicht). Auch die Bezeichnung des Winkels kann ausgeblendet werden.
5		Im Anschluss wähle man das *Strecke*-Werkzeug aus und klicke damit auf die Punkte A und P.

Hiernach kann der Schieberegler verschoben werden. Die Spur des Punktes P‘ beschreibt nun die Funktion $f(x) = \sin(x)$. Mit einem Rechtsklick auf den Schieberegler kann darüber hinaus eine Animation gestartet werden, sodass dieser seine Werte automatisch ändert (und damit auch die Punkte P und P‘). Die Achseneinteilung ist für diese Darstellung aber noch nicht ideal. Eine Einteilung der x-Achse in Abständen von $\frac{\pi}{2}$ wäre hier hilfreich. Hierfür klicke man mit dem Bewege-Werkzeug auf eine freie Stelle in der Grafik-Ansicht und wähle *Grafik*. Dort wähle man den Reiter *xAchse* und setze den Haken bei *Abstand*. Im entsprechenden Textfeld kann nun der gewünschte ausgewählt oder eingegeben werden. Dort gebe man also „$pi/2$“ ein. Die Grafik-Ansicht sollte nun etwa wie folgt aussehen:

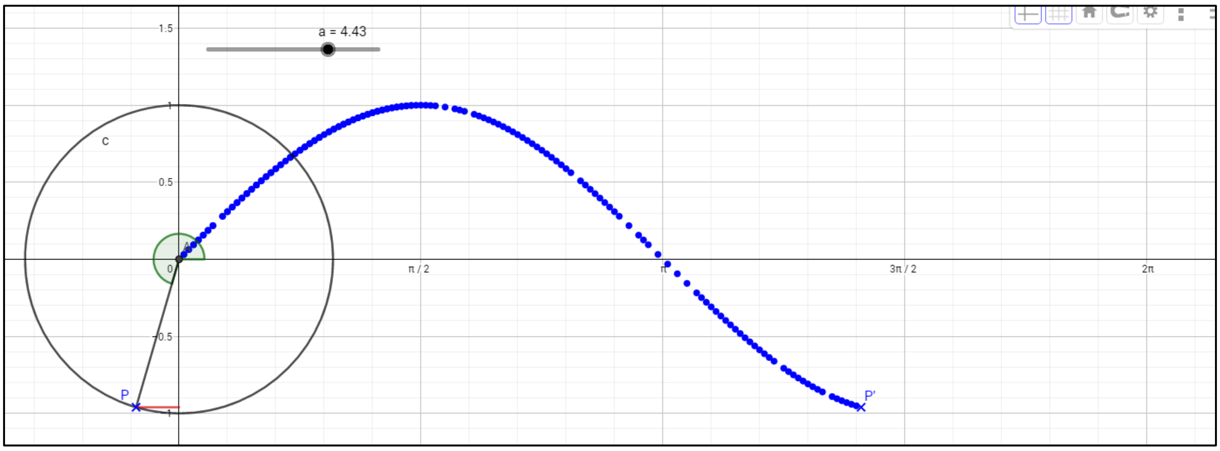


Abbildung 20: fertige Animation

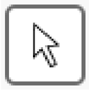
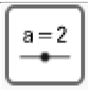
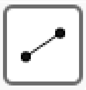
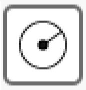
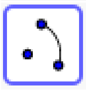
Die Animation kann auf die gleiche Weise gestoppt werden, wie sie gestartet wurde. Alternativ steht hierfür auch ein Button in der Algebra-Ansicht oder links unten in der Grafik-Ansicht zur Verfügung.

Die Animation kann nun noch verändert werden. Die Strecke, welche die y-Koordinate des Punktes P beschreibt könnte noch dargestellt werden, um den Zusammenhang zu verdeutlichen. Darüber hinaus können auch die Cosinus- und Tangensfunktion hinzugefügt werden. Auch eine Steuerung der sichtbaren Spuren könnte über das *Kontrollkästchen*-Werkzeug realisiert werden. All diese Änderungen sind aber der Experimentierfreude des Lesers überlassen.

4.4 Arbeitsmittel zur Dreieckskonstruktion

Dieses Beispiel soll ein Hilfsmittel für Schüler bei der Dreieckskonstruktion bei drei gegebenen Seiten sein. An diesem Beispiel werden vor allem das bedingte Anzeigen sowie das Verwenden von dynamischen Farben von Objekten gezeigt. Da es sich um ein geometrisches Problem handelt ist erneut die Grafik-Ansicht das Mittel der Wahl. Dabei ist auch die Algebra-Ansicht hilfreich, um den Überblick über die Objekte nicht zu verlieren.

#	**Werkzeug(e)**	
1		Man wähle das Text-Werkzeug aus und stelle in der Gestaltungsleiste eine fette Schriftart, sowie als Schriftgröße Mittel ein. Anschließend erzeuge man 6 Textfelder mit folgenden Inhalten: „geg.: a=5cm, b=7cm, c=6cm“ „Ziehe am Schieberegler, um nach und nach die Anleitung zur Konstruktion des Dreiecks bei drei gegebenen Seiten durchzugehen.“ „Zeichne die Seite a. Bezeichne Anfangs- und Endpunkt mid B und C.“ „Nimm die Länge der Seite b in die Zirkelspanne und schlage einen Kreisbogen um B.“ „Verfahre genauso mit der Seite c und dem Punkt C.“ „Verbinde die Punkte B und C mit dem Schnittpunkt der Kreisbögen. Bezeichnet den neuen Schnittpunkt mit A.“ Das erste Textfeld wird an der oberen Kante der Grafik-Ansicht angeordnet. Alle anderen direkt darunter und zwar derart, dass sie sich alle (bis auf das erste) überlagern und die Anfangsbuchstaben übereinanderliegen.

2		Anschließend rahme man mit ausgewähltem Bewege-Werkzeuge und gedrückter rechter Maustaste alle Textfelder ein, klicke rechts auf sie und setze den Haken bei *Am Bildschirm anheften*[44].
3		Man füge nun einen Schieberegler ein. Im Konfigurationsmenü wähle man *Ganze Zahl*. Das Minimum soll 1, das Maximum 5 sein. Diese werden später für die 5 übereinanderliegenden Textfelder verwendet. Unter dem Reiter *Schieberegler* wird nun als Ausrichtung *vertikal* und als Breite 600px[45] gewählt und mit *OK* bestätigt. Der Schieberegler wird anschließend an der linken Seite der Grafik-Ansicht platziert. Mit einem Rechtsklick wird die Beschriftung ausgeblendet. Ist der Schieberegler nun ganz oben, sollte er auf 5 stehen. Ist er ganz unten, auf 1.
4	   	Als nächstes konstruiere man ein Dreieck gemäß der gegebenen Größen. Hierfür zeichne man zwei Punkte B und C und verbinde diese mit einer Strecke a.[46] Von B und C aus markiere man danach die Kreisbögen mit $7cm$ und $6cm$ Radius mit dem *Kreisebogen*-Werkzeug. Es bietet sich an vorher jeweils einen entsprechenden Kreis festzulegen, der danach ausgeblendet werden sollte. Der Schnittpunkt der beiden Kreisbögen markiere man als Punkt A[47] und zeichne abschließend die beiden fehlenden Strecken b und c.

[44] Diese Option sorgt dafür, dass sich die Texte nicht mehr verschieben, wenn der Bildschirmausschnitt verschoben wird.
[45] Diese Einstellung hängt stark von der verwendeten Bildschirmauflösung ab. Für eine Full HD Auflösung bieten sich 600px allerdings an, wenn GeoGebra im Vollbild gestartet ist.
[46] $STRECKE(< Punkt >, < Punkt >)$
$a = STRECKE(B, C)$
[47] $A = SCHNEIDE($

Die Konstruktion sollte nun etwa wie auf dem folgenden Bild aussehen:

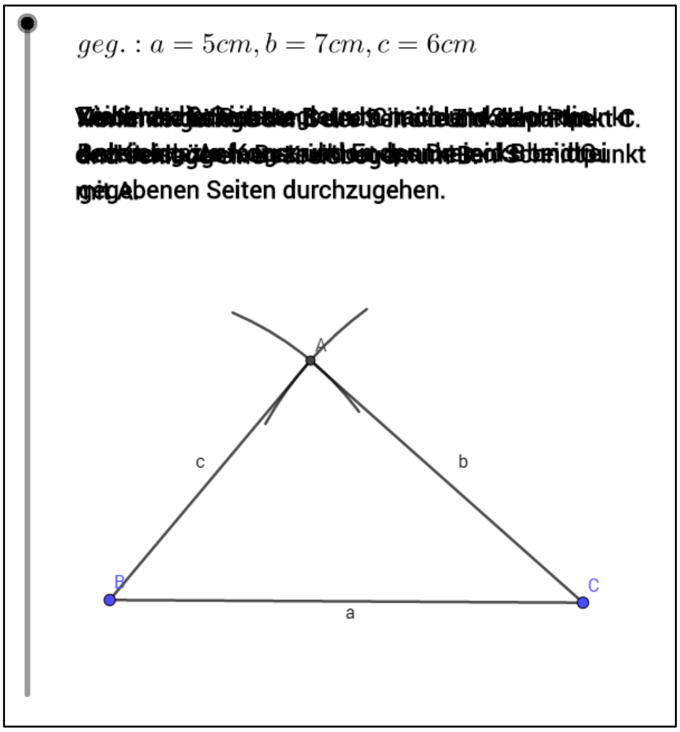


Abbildung 21: Grundkonstruktion des Dreiecks

Nachfolgend wird nun noch konfiguriert, dass die einzelnen Elemente beim Bewegen des Schiebereglers angezeigt werden und dabei die neu hinzugefügten Elemente dynamisch rot eingefärbt werden. Das erfordert einige Arbeit im Einstellungsmenü. Falls nicht schon geschehen öffne man dieses also zunächst.

Zunächst zum Nacheinanderanzeigen der Konstruktion, sowie der zugehörigen Texte. Hierfür wähle man zuerst alle Objekte aus, die angezeigt werden sollen, wenn der Schieberegler ganz oben steht ($n = 5$). Das sollte lediglich der einführende Text sein. Am einfachsten ist hier die Auswahl über die Algebra-Ansicht. Hierfür klingt man idealerweise irgendwo auf das den Sichtbarkeitskreis umschließende Rechteck auf der linken Seite des entsprechenden Textfeldes. Im Eigenschaftsmenü wird nun das entsprechende Objekt angezeigt.

Hier wechsle man nun in den Reiter *Erweitert*. Dort ist das obenstehende Feld die *Bedingung, um das Objekt anzuzeigen*. Im Textfeld kann eine Formel eingegeben werden, die entweder zu *WAHR* oder *FALSCH* ausgewertet werden kann. Entsprechend wird das Objekt angezeigt, oder eben nicht. Es können dafür die Vergleichsoperatoren $>, \geq, <, \leq, ==$ und $! =$ verwendet werden. Der vorletzte Operator wird dabei zu *WAHR* ausgewertet, wenn auf beiden Seiten des Operators der gleiche Wert, bzw. das gleiche Objekt, gleiche Funktion o. ä. steht. Der letzte

Operator wird zu *WAHR* ausgewertet, wenn beide Seiten verschieden sind. Die ersten vier Operatoren funktionieren entsprechend.

Damit das Objekt nur bei $n = 5$ angezeigt wird, ist als Eingabe „$n == 5$“ erforderlich. Bestätigt wird mit der Eingabetaste. Wenn nach getätigter Eingabe der Schieberegler verschoben wird, sollte der Text nur erscheinen, wenn der Schieberegler ganz oben steht.

Das gleiche Vorgehen vollziehe man nun für die restlichen Texte für „$n == 4$“ etc. Dabei ist darauf zu achten, welcher Text mit welchem Zustand des Schiebereglers verknüpft wird. Hat man das getan, kann man das Ergebnis testen, indem man den Schieberegler auf und ab bewegt. Es sollten nacheinander die Konstruktionsanweisungen eingeblendet werden.

Ähnlich muss nun auch für die entsprechenden Teile des Dreiecks verfahren werden. Für $n = 4$ wird der erste Konstruktionsschritt eingeblendet, nämlich das zeichnen der Punkte B und C, sowie der Strecke a. Diese wähle man nun gleichzeitig in der Algebra-Ansicht aus, indem man bei gedrückter Strg-Taste nacheinander auf die den Sichtbarkeitskreis umschließenden Rechtecke klickt. Da diese nach einmaligen nicht wieder ausgeblendet werden sollen, gebe man als Bedingung „$n <= 4$“ ein.[48]

Zusätzlich sollen diese Objekte aber auch beim ersten Anzeigen (also bei $n = 4$) in Rot angezeigt werden. Hierfür kann bei den *Dynamischen Farben* im Feld für die Farbe *Rot* eine Zahl zwischen 0 (schwarz) und 1 (rot) eingegeben werden. Man gebe dort folgendes ein

$$WENN(n == 4,1,0)$$

Erklärung: Diese Funktion[49] evaluiert die Bedingung (erstes Argument) entweder zu *WAHR* oder *FALSCH* und springt im *WAHR*-Fall zum zweiten Argument, im *FALSCH*-Fall zum dritten. Im Fall $n = 4$ steht in diesem Feld also eine 1 (rot) in jedem anderen Feld eine 0 (schwarz).

Für die übrigen Teile des Dreiecks geht man analog vor. Am Ende sollte das Arbeitsblatt wie auf der Abbildung auf der nachfolgenden Seite aussehen:

[48] Es wird hier der Operator „Kleiner-Gleich“ verwendet (und nicht, wie zu vermuten wäre „Größer-Gleich“), weil n beim Ziehen nach unten kleiner und nicht größer wird.
[49] allgemein: $WENN(< BEDINGUNG >, < DANN\ OBJEKT >, < SONST\ OBJEKT >)$

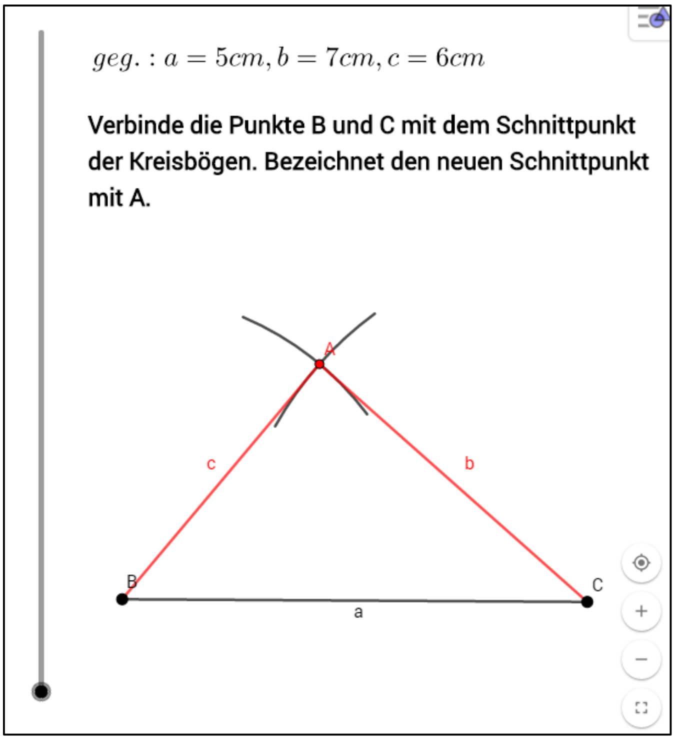


Abbildung 22: Fertiges Arbeitsblatt

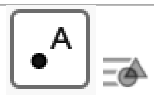
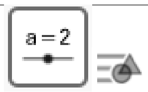
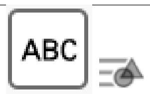
Dieses Prinzip kann sehr einfach auch für dynamische Anzeigen in anderen Zusammenhängen genutzt werden. Die Anzeigebedingung kann dabei auch beispielsweise an das Auswählen eines Kontrollkästchens oder die Koordinaten eines Punktes gebunden sein. Zusätzlich kann das Arbeitsblatt auch noch durch eine Auswahlmöglichkeit der vorgegebenen Größen erweitert werden.

4.5 Ein einfacher Algorithmus

Dieses Beispiel soll sich ein wenig mit der Verwendung von GeoGebra-Skripten befassen. Diese sind eine Aneinanderreihung von GeoGebra-Befehlen, die entweder bei Klick auf ein Objekt (beispielsweise auf einen Button, aber auch eines beliebigen anderen Objektes) oder bei der Aktualisierung dieser (beispielsweise beim Aktualisieren eines Schiebereglers) ausgeführt werden.

Thematisch hat dieses Beispiel keine direkte Relevanz für den Mathematikunterricht, stellt aber an einem einfachen Beispiel die Skriptingmöglichkeiten GeoGebras dar und hat ein mathematisch interessantes Resultat, welches für den geneigten Leser unter Umständen zur Horziontserweiterung gereicht.

Benötigt werden einmal mehr eine leere Grafik-Ansicht sowie (zur Übersicht) die Algebra-Ansicht.

#	Werkzeug(e)	
1		Man ändere zunächst die Hintergrundfarbe der Grafik-Ansicht über die Grundeinstellungen zu einem dunklen Grau.
2		Als nächstes ordne man drei Punkte A, B, C in einem die Ansicht füllenden Dreieck an, ändere ihre Farbe zu Weiß und ihre Darstellungsart zu Kreuzen. Man erzeuge einen vierten Punkt P, welchen man ebenfalls weiß färbt und von welchem man die Bezeichnung ausblendet. Von Punkt P schalte man die Spur ein.
3		Daraufhin erzeuge man drei Schieberegler. Der Erste heiße „iterationsschritt“, sein Startwert ist 0 und er ist eine ganze Zahl zwischen 0 und 10.000.000 Der Zweite heiße „speed“ habe den Startwert 1 und ist eine Zahl zwischen 1 und 5 mit einer Schrittweite von 0,1. Man färbe diese beiden Regler weiß. Danach wähle man den ersten Regler aus und ändere in seinen Einstellungen unter dem Reiter *Schieberegler* die *Geschwindigkeit* auf $10\text{^}(speed - 6)$. Der dritte Regler heiße „rnd“ und sei eine ganze Zahl aus dem Intervall [1,3]. Dieser Regler wird ausgeblendet.
4		Man erstelle ein weißes, mittelgroßes Textfeld mit dem Inhalt: „Zufallszahl: “ sowie dem Wert der rnd-Variable. Zusätzlich hefte man das Textfeld am Bildschirm an (Rechtsklick).

Nun zum eigentlichen Skript:

Man wähle den Regler „iterationsschritt“ aus und wechsle in seinen Einstellungen in den *Skripting*-Reiter. Hier kann gewählt. Hier kann ein GeoGebra-Skript geschrieben werden, dass ausgeführt wird, wann immer der Reglerwert sich verändert.[50]

Dort können (jeweils in eine neue Zeile) verschiedene GeoGebra-Befehle geschrieben werden, die bei jedem Aktualisieren des Reglerwertes ausgeführt werden. Man gebe dort nun die folgenden Befehle ein

[50] Der Reiter *Globales JavaScript* wird an dieser Stelle nicht weiter betrachtet und dem erfahreneren Nutzer zum Selbststudium überlassen.

$$SETZEWERT(rnd, ZUFALLSZAHL(1,3))$$

$$WENN\left(rnd == 1, SETZEWERT(P, P + 0.5(A - P))\right)$$

$$WENN\left(rnd == 2, SETZEWERT(P, P + 0.5(B - P))\right)$$

$$WENN\left(rnd == 3, SETZEWERT(P, P + 0.5(C - P))\right)$$

Zur Erklärung: Die erste Zeile weist dem Wert rnd eine zufällige (ganze) Zahl aus dem Intervall [1,3] zu. Basierend auf dieser Zufallszahl bewegt sich P entweder um $\frac{1}{2}\overrightarrow{PA}, \frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$ oder $\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$.

Dank der eingeschalteten Spur wird der „Pfad" den P nimmt „aufgezeichnet". Trotz der anfangs (gleichverteilt) generierten Zufallszahl *rnd* entsteht aber kein zufälliges Punktmuster, sondern eine bekannte mathematische Figur, nämlich ein Sierpinski-Dreieck. Dies kann beobachtet werden, wenn die Animation des Reglers „iterationsschritt" eingeschaltet wird. Dieser zählt entsprechend stets um 1 nach oben und jedes Mal wird das obenstehende Skript ausgeführt. Mit dem Regler „speed" kann die Geschwindigkeit der Animation reguliert werden.

Auf eine Begründung oder einen Beweis des Ergebnisses wird an dieser Stelle verzichtet. Stattdessen sei auf BURGER/STARBIRD (2004) verwiesen[51]. Das Endergebnis sollte wie folgt aussehen. Die Punkte A, B und C müssen für ein korrektes Funktionieren auch kein gleichseitiges Dreieck bilden, sondern können beliebig angeordnet werden.

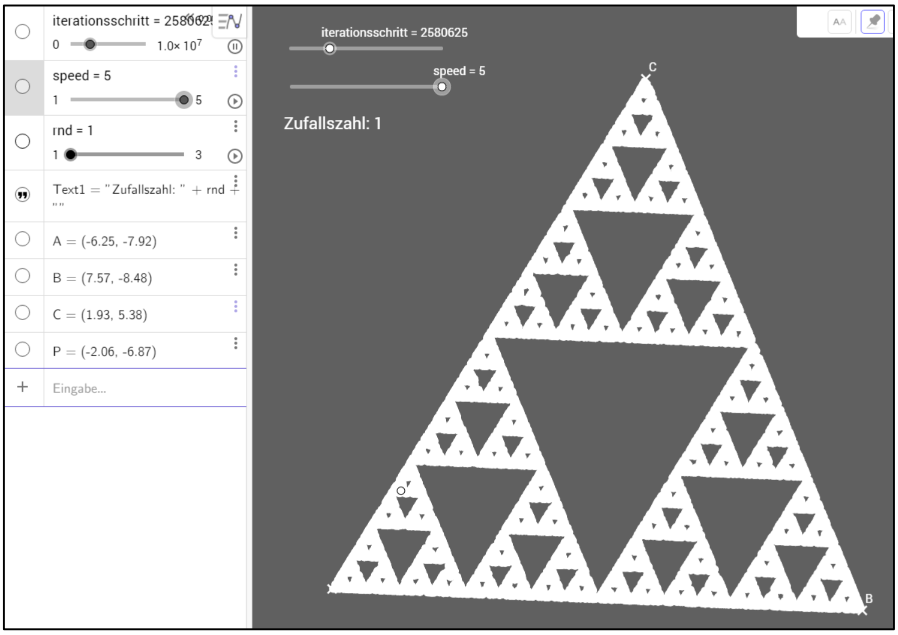


Abbildung 23: Ergebnis des Skriptes bei mehrfacher Iteration

[51] Edward B. Burger, Michael Starbird (2004): The Heart of Mathematics: An invitation to effective thinking. Springer.

Weiterführende Links und Literatur

https://www.geogebra.org/
Die GeoGebra Homepage

https://www.geogebra.org/download
Seite zum Download der aktuellen Version GeoGebras

https://wiki.geogebra.org/de/
Das GeoGebra Handbuch

https://www.geogebra.org/cms/tos
Die Nutzungsbedinungen der GeoGebraHomepage

https://creativecommons.org/
Weiterführende Informationen zu den Creative Commons Lizenzen **(en)**

Erb, R. (2016): *Optik mit GeoGebra.* Berlin: De Gruyter.

Hall, J.; Lingerfjärd, T. (2016): *Mathematical Modeling: Applications with GeoGebra*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.

Hohenwarter, M. (2006): *GeoGebra – didaktische Materialien und Anwendungen für den Mathematikunterricht*. Paris-Lodron-Universität Salzburg, Naturwissenschaftliche Fakultät: Dissertation.

Kaenders, R.; Schmidt R. (2014, 2. Aufl.): *Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen. Beispiele für die Förderung eines tieferen Mathematikverständnisses*. Köln/Bonn: GeoGebra Institut & Wiesbaden: Springer Spektrum.

Glossar

Nachfolgend sind alle Befehle kategorisiert aufgelistet, die innerhalb dieses Begleitmaterials direkt oder indirekt Verwendung fanden, sowie einige andere wichtige darüber hinaus. Unterstrichene Befehle sind dabei exklusiv für die CAS-Ansicht. Eine vollständige Liste aller Befehle mit ausführlichen Beispielen findet sich im GeoGebra Handbuch[52].

#[53]	Syntax	**Kurzbeschreibung**
[2.1]	(<x>,<y>) (<x>,<y>,<z>)	Erzeugt einen Punkt mit den Koordinaten (x, y) bzw. (x,y,z).
[3.1]	GERADE(<Punkt>,<Punkt>) GERADE(<Punkt>,<Parallele Gerade>) GERADE(<Punkt>,<Richtungsvektor>)	Erzeugt eine Gerade gemäß der angegebenen Argumente.
[3.2]	SENKRECHTE(<Punkt>,<Gerade>) SENKRECHTE(<Punkt>,<Strecke>) SENKRECHTE(<Punkt>,<Vektor>) SENKRECHTE(<Punkt>,<Ebene>) SENKRECHTE(<Gerade>,<Gerade>) SENKRECHTE(<Punkt>,<Richtung>,<Richtung>) SENKRECHTE(<Punkt>,<Gerade>,<Kontext>)	Erzeugt eine Gerade die senkrecht auf einem anderen Objekt steht gemäß der angegebenen Argumente.
[3.3]	FUNKTION(<Funktion>,<Start>,<Ende>)	Erzeugt eine Funktion im angegebenen Intervall.
[3.4] [3.5]	VEKTOR(<Punkt>) VEKTOR(<Startpunkt>,<Endpunkt>)	Erzeugt einen Ortsvektor bzw. Richtungsvektor.
[3.6]	LINKESEITE(<Gleichung>)	Linke Seite einer Gleichung.
[3.7]	RECHTESEITE(<Gleichung>)	Rechte Seite einer Gleichung.
[3.8]	LÖSE(<Gleichung in x>) LÖSE(<Gleichung>,<Variable>) LÖSE(<Liste von Gleichungen>,<Liste von Variablen>)	Löst eine Gleichung gemäß der angegebenen Argumente
[3.9]	FAKTORISIERE(<Zahl>) FAKTORSIERE(<Funktion>) FAKTORISIERE(<Ausdruck>,<Variable>)	Faktorisiert ein angegebenes Objekt.
[3.10]	ABLEITUNG(<Funktion>) ABLEITUNG(<Kurve>) ABLEITUNG(<Funktion>,<Grad der Ableitung>) ABLEITUNG(<Kurve>,<Grad der Ableitung) ABLEITUNG(<Funktion>,<Variable>) ABLEITUNG(<Funktion>,<Variable>,<Grad der Ableitung>) ABLEITUNG(<Funktion>)	Ableitung einer Funktion (oder Kurve) gemäß der angegebenen Argumente.
[3.11]	INTEGRAL(<Funktion>) INTEGRAL(<Funktion>,<Variable>) INTEGRAL(<Funktion>,<Startwert>,<Endwert>)	Stammfunktion einer Funktion gemäß der angegebenen Argumente.

[52] https://wiki.geogebra.org/de/Befehle
[53] Die Nummerierung entspricht der Nummerierung im Dokument.

[3.12]	SCHNEIDE(<Objekt>,<Objekt>) SCHNEIDE(<Objekt>,<Objekt>,<Anzahl der Schnittpunkte>) SCHNEIDE(<Funktion>,<Funktion>,<Anfang>,<Ende>)	Erzeugt einen Punkt als Schnittpunkt(e) der angegebenen Objekte.