Primitives et Intégration

Connaissance travaillée	Non acquise	En cours d'acquisition	Acquise
Calculer l'intégrale d'une fonction sur un intervalle [a;b].			
Calculer la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle [a;b].			
Calculer une aire sous une courbe ou entre deux courbes.			

I/ Rappel de 1ère sur les primitives :

1) Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On nomme primitive de *f* sur I, toute fonction dérivable sur I dont la dérivée *F'* est égale à *F*. Généralement, par convention, les fonctions sont nommées avec des lettres minuscules et leurs primitives avec la même lettre mais en majuscule.

Autrement dit, trouver la primitive c'est faire l'opération « inverse » de la dérivée.

Exemple :
Soient $F(x) = x^2$ et $f(x) = 2x$. On remarque que $F'(x) = 2x = f(x)$. Donc *F* est une primitive de *f*.

Remarque : Si nous avions posé $F(x) = x^2 + 2$, $F(x)$ aurait aussi été une primitive de *f* puisque la dérivée d'une constante est nulle. **Ainsi nous remarquons qu'une fonction admet une infinité de primitives.** Souvent les données de l'énoncé nous permettrons de déterminer la constante.

2) Primitives des fonctions usuelles :

f est définie sur I par:	**une** primitive F de f sur I	I
$f(x) = x^n$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$	n entier naturel sur tout intervalle de $\mathbb{R}$sauf n = -1 Rappel : $\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$ $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = ln(x)$	sur tout intervalle de $]0;+\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	sur tout intervalle de $\mathbb{R}$

Exemples :
Donnez une primitives des fonctions suivantes :

$f(x) = x^2$
$F(x) = \frac{1}{2+1}x^{2+1} = \frac{1}{3}x^4$

$f(x) = x^8$
$F(x) = \frac{1}{8+1}x^{8+1} = \frac{1}{9}x^9$

3) Primitives et opération :

Nous admettrons les règles suivantes :

- Si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I alors F + G est une primitive de f + g sur I. De la même manière que l'on additionne les dérivées, il est possible d'additionner les primitives.
- Si F est une primitive de F sur un intervalle I, alors pour tout réel k, kF est une primitive de kf sur I. Comme dans les dérivées, les constantes n'interviennent pas dans le calcul.

Exemples : Dans chaque exemple C sera une constante.

$f(x) = x^2 - 4x + 7$ alors $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 7x + C$

$g(x) = -x^3 + x^2 - 1{,}5\,x - 1$ alors $G(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1{,}5}{2}x^2 - x + C$

$h(x) = 10e^x - 8$ alors $H(x) = 10e^x - 8x + C$

4) Primitive des fonctions du type $u'e^u$.

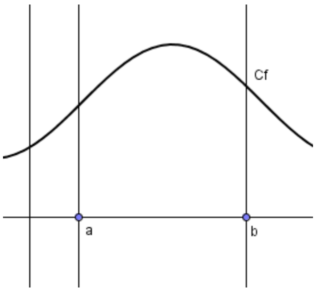
Soit une fonction u, définie et dérivable sur un intervalle I et soit u' sa dérivée, nous admettrons que les primitives de la fonction $f(x) = u'e^u$ sont $F(x) = e^u + C$ avec C une constante.

Exemples : $f(x) = 3e^{3x}$ alors $F(x) = e^{3x} + C$, $g(x) = -3x^2e^{-x^3}$ alors $G(x) = e^{-x^3} + C$, $h(x) = e^{2x+1}$ alors $H(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1}$

II/ Intégrale d'une fonction :

1) Aire sous une courbe :

Définition

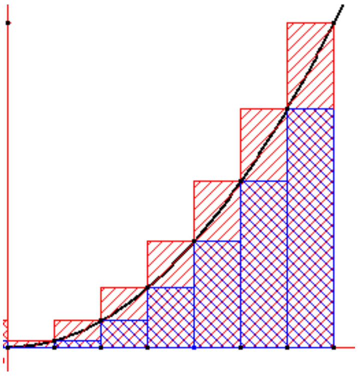


Dans un repère, ***C*** est la courbe représentative d'une fonction f **continue et positive** sur un intervalle $[a;b]$.

Le domaine ***D*** situé sous la courbe ***C***, au-dessus de l'axe des abscisses et entre les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ admet une aire.

On dit que ***D*** **est le domaine situé sous la courbe *C*.**

Intuitivement : calcul de l'aire sous la parabole $y = x^2$ entre 0 et 1 :



On construit d'abord n ($n \in N^*$) rectangles à l'intérieur du domaine ***D*** :

la somme A_n de leurs aires donne une valeur approchée par défaut du domaine.

Puis on construit n rectangles qui « dépassent » du domaine ***D*** :

la somme B_n de leurs aires donne une valeur approchée par excès du domaine.

Plus on augmente le nombre n de rectangles, plus on s'approche de l'aire réelle du domaine ***D***.

En faisant varier le nombre n de rectangles, on obtient deux suites (A_n) et (B_n) :

(A_n) croissante, (B_n) décroissante, et $\lim(A_n - B_n) = 0$.

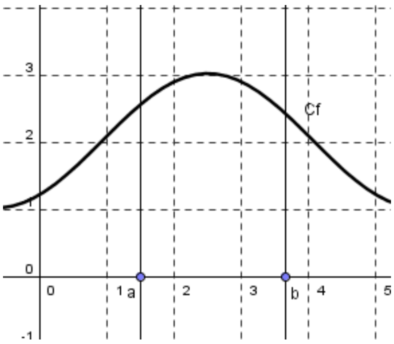
(A_n) et (B_n) ont la même limite et cette limite est en fait l'aire du domaine **D.**

ainsi aire de D = lim A_n = **lim** B_n quand n tend vers $+\infty$.

On dit que cette aire est l'intégrale de 0 à 1 de la fonction carrée.

2) Intégrale d'une fonction continue et positive :

a) Définition :



f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.

C_f est la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$.

L'intégrale de a à b de la fonction f, notée :

$$\int_a^b f(x)dx$$

Elle correspond au domaine ***D*** situé sous la courbe C_f, et donc à l'aire sous la courbe entre *a* et *b*.

Remarque : le symbole $\int$ est un S afin de rappeler que l'intégrale peut être obtenue comme limite d'une somme de rectangles.

Le résultat obtenu donne l'aire sous la courbe en unités d'aire du repère. L'unité d'aire étant le rectangle de sommets O, I et J.

b) Calcul :

Nous admettrons que si f est une fonction définie et dérivable sur [a ; b] et que F est sa primitive alors :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Donc pour calculer l'aire sous la courbe d'une fonction, il faut calculer son intégrale et donc connaître sa primitive.
Autrement dit, il faut suivre les deux étapes suivantes :

1) Déterminer une primitive de la fonction f
2) Calculer l'image des bornes du domaine et en faire la différence.

Exemple :
Calculons l'aire sous la courbe de la fonction *g(x)* = x^2 sur [0 ; 1].

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}\times 1^3 - \frac{1}{3}\times 0^3 = \frac{1}{3}$$

Donc l'aire sous la courbe est de 1/3 d'unité d'aire.
Calculons maintenant l'aire sous la courbe de la fonction *f(x) = 2x + 1* sur [3 ; 5] :

$$\int_3^5 f(x)dx = [x^2 + x]_3^5 = (5^2+5) - (3^2+3) = 18$$

Donc l'aire sous la courbe est de 18 unités d'aires.

3) Intégrale d'une fonction continue négative :

Il est possible d'appliquer la méthode précédente à une fonction négative sur l'intervalle d'intégration, mais le résultat obtenu sera alors négatif, il s'agit de l'aire Algébrique du domaine sous la courbe. Ainsi l'aire du domaine défini par la courbe et l'axe des abscisses sera l'opposée du résultat de l'intégrale.

Exemple : Calculons l'aire sous la courbe de la fonction *f(x) = x sur* [-5 ; -2]

$$\int_{-5}^{-2} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-5}^{-2} = \frac{1}{2}(-2)^2 - \frac{1}{2}(-5)^2 = -10{,}5$$

Nous en déduisons que l'aire sous la courbe de la fonction *f(x)* = *x* sur [-5 ; -2] est de 10,5 unités d'aire.

III/ Propriétés de l'intégrale :

1) Propriétés

Positivité :

Si f est continue et positive sur *[a ; b]* alors $\int_a^b f(x)dx > 0$, de même si *f (x) < 0* sur *[a ; b]* alors $\int_a^b f(x)dx < 0$
Attention la réciproque n'est pas vraie. $\int_a^b f(x)dx > 0$ n'implique pas *f(x) > 0*

Relation d'ordre :

Soient *f* et *g* deux fonctions continues sur *[a ; b]* telles que *f(x) < g(x)*. Alors$\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$

Relation de Chasles :

Soit une fonction *f* continue sur un intervalle et *a*, *b* et *c* dans cet intervalle on admettra que :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx > 0$$

Linéarité de l'intégrale :

Soient deux fonctions *f* et *g* continues sur un intervalle alors dans cet intervalle on admettra que :

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Donc par extension si *k* est un réel alors :

$$\int_a^b k\times f(x)dx = k\times\int_a^b f(x)dx$$

2) Conséquences :

Calcul d'aire sous une courbe de signe quelconque :
Pour calculer ce type d'aire, il faudra découper la fonction en différentes parties en fonction de son signe. Sur les parties ou la fonction est positive on prendra la valeur de l'intégrale et pour les parties où la fonction est négative on prendra l'opposé de la valeur de l'intégrale. Il suffira ensuite d'ajouter les aires les unes aux autres.

Exemple :
Calculez l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe de la fonction $f(x) = x^2 + x - 2$ sur *[-4 ; 4]*.
Après avoir étudié le signe de la fonction f nous obtenons les résultats suivants :
f(x) > 0 sur [-4 ; -2[U]1 ; 4] et f(x) < 0 sur]-2 ; 1[.

Cherchons une primitive de f(x) :
F(x) = $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$

Calculons l'aire :
A = $\int_{-4}^{-2} f(x)dx + \int_{1}^{4} f(x)dx - \int_{-2}^{1} f(x)dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-4}^{-2} + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{1}^{4} - \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-2}^{1}$
A= $\frac{26}{3} + \frac{45}{2} - (-\frac{9}{2}) = \frac{107}{3}$

Calcul d'air du domaine entre deux courbes :

Soient f et g deux fonctions sur un intervalle [a ; b] telle que f >g. Alors l'aire du domaine comprise entre les courbes représentatives de f et g se calcule de la manière suivante :

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

Exemple :
Déterminez l'aire du domaine entre les fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$ entre -1 et 1
Déterminons les primitives :
F(x) = $\frac{1}{3}x^3$ G(x) = $\frac{1}{2}x^2$
Donc :
$A = \int_{-1}^{0} f(x)dx - \int_{-1}^{0} g(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x) - g(x)dx = \int_{-1}^{0} x^2 - xdx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}$ $A = \frac{1}{3} \times 0^3 - \frac{1}{2} \times 0^2 - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 - \frac{1}{2}(-1)^2\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$