Produktionsmodelle mit LGS

Modellierung von linearen Verflechtungen mit Hilfe von Linearen Gleichungssystemen

Wir betrachten das Einführungsbeispiel zu den Produktionsmodellen linearer Verflechtungen:

A	Z_{11}	Z_{12}	Z_{13}
R_1	2	3	1
R_2	4	1	2

B	Z_{21}	Z_{22}
Z_{11}	2	0,2
Z_{12}	1	2
Z_{13}	0,5	3

C	E_1	E_2
Z_{21}	3	4
Z_{22}	2	1,5

die zugehörigen Matrizen sind:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 0{,}2\\ 1 & 2\\ 0{,}5 & 3\end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 1{,}5\end{pmatrix} .$$

Es gilt:

$$\vec{r}=\mathbf{A}\cdot\vec{z}_1 \quad , \quad \vec{z}_1=\mathbf{B}\cdot\vec{z}_2 \quad , \quad \vec{z}_2=\mathbf{C}\cdot\vec{e} \quad ,$$

hierbei ist $\vec{r}$ ein Rohstoffvektor, $\vec{z}_1$ ein Vektor von Zwischenprodukten erster Stufen, $\vec{z}_2$ ein Vektor von Zwischenprodukten zweiter Stufe und $\vec{e}$ ein Endprodukte- oder Bestellvektor.

Für den Bestellvektor

$$\vec{e}=\begin{pmatrix}40\\ 60\end{pmatrix}$$

seien

x_1	die benötigten Mengeneinheiten des Rohstoffes R_1,
x_2	die benötigten Mengeneinheiten des Rohstoffes R_2,
x_3	die herzustellenden Mengeneinheiten des Zwischenproduktes 1. Stufe Z_{11},
x_4	die herzustellenden Mengeneinheiten des Zwischenproduktes 1. Stufe Z_{12},
x_5	die herzustellenden Mengeneinheiten des Zwischenproduktes 1. Stufe Z_{13},
x_6	die herzustellenden Mengeneinheiten des Zwischenproduktes 2. Stufe Z_{21},
x_7	die herzustellenden Mengeneinheiten des Zwischenproduktes 2. Stufe Z_{22},
x_8 (=40)	die herzustellenden Mengeneinheiten des Endproduktes E_1,
x_9 (=60)	die herzustellenden Mengeneinheiten des Endproduktes E_2.

Mit diesen Festlegungen gilt:

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} \quad , \quad \vec{z}_1=\begin{pmatrix}x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix} \quad , \quad \vec{z}_2=\begin{pmatrix}x_6\\ x_7\end{pmatrix} \quad , \quad \vec{e}=\begin{pmatrix}x_8\\ x_9\end{pmatrix} .$$

Es ergeben sich die folgenden vier Gleichungssysteme:

(1)

$$\vec{r}=\mathbf{A}\vec{z}_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= 2x_3+3x_4+x_5\\ x_2 &= 4x_3+x_4+2x_5\end{aligned}$$

Produktionsmodelle mit LGS

(2)
(3)

$$\vec{z}_1 = \mathbf{B}\vec{z}_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0{,}2 \\ 1 & 2 \\ 0{,}5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_3 = 2x_6 + 0{,}2x_7 \\ x_4 = x_6 + 2x_7 \\ x_5 = 0{,}5x_6 + 3x_7 \end{array}$$

(4)

$$\vec{z}_2 = \mathbf{C}\vec{e} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_6 = 3x_8 + 4x_9 \\ x_7 = 2x_8 + 1{,}5x_9 \end{array}$$

und insbesondere (4)

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_8 = 40 \\ x_9 = 60 \end{array}:$$

Wir formen die Gleichungssysteme um

(1)’

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & - & 2x_3 & - & 3x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ & x_2 & - & 4x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \end{array}$$

(2)’

$$\begin{array}{cccccccc} x_3 & & & - & 2x_6 & - & 0{,}2x_7 & = & 0 \\ & x_4 & & - & x_6 & - & 2x_7 & = & 0 \\ & & x_5 & - & 0{,}5x_6 & - & 3x_7 & = & 0 \end{array}$$

(3)’

$$\begin{array}{cccccccc} x_6 & & - & 3x_8 & - & 4x_9 & = & 0 \\ & x_7 & - & 2x_8 & - & 1{,}5x_9 & = & 0 \end{array}$$

(4)’

$$\begin{array}{cccc} x_8 & & = & 40 \\ & x_9 & = & 60 \end{array}$$

und fassen sie zu einem einzigen Gleichungssystem mit neun Gleichungen zusammen:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & & -2x_3 & -3x_4 & -x_5 & & & & & = & 0 \\ & x_2 & -4x_3 & -x_4 & -2x_5 & & & & & = & 0 \\ & & x_3 & & & -2x_6 & -0{,}2x_7 & & & = & 0 \\ & & & x_4 & & -x_6 & -2x_7 & & & = & 0 \\ & & & & x_5 & -0{,}5x_6 & -3x_7 & & & = & 0 \\ & & & & & x_6 & & -3x_8 & -4x_9 & = & 0 \\ & & & & & & x_7 & -2x_8 & -1{,}5x_9 & = & 0 \\ & & & & & & & x_8 & & = & 40 \\ & & & & & & & & x_9 & = & 60 \end{array}$$

Produktionsmodelle mit LGS

In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0{,}5 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{K} \cdot \vec{x} = \vec{y}$$

$\vec{y}$ kann als 9-dimensionaler Bestellvektor aufgefaßt werden, der in der Darstellung des LGS als erweiterte Koeffizientenmatrix $(\mathbf{K}|\,\vec{y})$ vorkommt:

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -0{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0{,}5 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 60 \end{array}\right)$$

Aus der Dreiecksform der Koeffizientenmatrix ist erkennbar, daß das LGS eine eindeutige Lösung besitzt. Die Anwendung des Gaußschen Algorithmus führt zu

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4298 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5096 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 754 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 700 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 690 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 360 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 170 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 60 \end{array}\right) \Leftrightarrow \text{Lösung: } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4298 \\ 5096 \\ 754 \\ 700 \\ 690 \\ 360 \\ 170 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Betrachten wir die Koeffizientenmatrix **K**. Sie weist eine Blockstruktur auf. Drei dieser Blöcke sind identisch mit den negativen Stücklisten-Matrizen **-A**, **-B** und **-C**.

Produktionsmodelle mit LGS

$$
\left(\begin{array}{cc|ccc|cc|cc}
1 & 0 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -4 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -0{,}2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0{,}5 & -3 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & -3 & -4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1{,}5 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\left(\begin{array}{cc|ccc|cc|cc}
1 & 0 & & \textbf{-A} & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \multicolumn{2}{c|}{\textbf{-B}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \multicolumn{2}{c}{\textbf{-C}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

Wir ersetzen auch die Einheits- und die Nullmatrizen in den einzelnen Blöcken und stellen die Koeffizientenmatix **K** als **Matrix von Matrizen** dar.

$$
\mathbf{K} = \begin{pmatrix}
\mathbf{E}_{(2,2)} & -\mathbf{A}_{(2,3)} & \mathbf{0}_{(2,2)} & \mathbf{0}_{(2,2)} \\
\mathbf{0}_{(3,2)} & \mathbf{E}_{(3,3)} & -\mathbf{B}_{(3,2)} & \mathbf{0}_{(3,2)} \\
\mathbf{0}_{(2,2)} & \mathbf{0}_{(2,3)} & \mathbf{E}_{(2,2)} & -\mathbf{C}_{(2,2)} \\
\mathbf{0}_{(2,2)} & \mathbf{0}_{(2,3)} & \mathbf{0}_{(2,2)} & \mathbf{E}_{(2,2)}
\end{pmatrix}
$$

Da die **K** invertierbar ist, läßt der Lösungsvektor $\vec{x}$ auch mit Hilfe der Inversen $\mathbf{K}^{-1}$ ermitteln ($\vec{x} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \vec{y}$). Es ist:

$$
\mathbf{K}^{-1} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 7{,}5 & 9{,}4 & 41{,}3 & 44{,}1 \\
0 & 1 & 4 & 1 & 2 & 10 & 8{,}8 & 47{,}6 & 53{,}2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0{,}2 & 6{,}4 & 8{,}3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 7 & 7 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}5 & 3 & 7{,}5 & 6{,}5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1{,}5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
\mathbf{E}_{(2,2)} & \mathbf{A}_{(2,3)} & (\mathbf{AB})_{(2,2)} & (\mathbf{ABC})_{(2,2)} \\
\mathbf{0}_{(3,2)} & \mathbf{E}_{(3,3)} & \mathbf{B}_{(3,2)} & (\mathbf{BC})_{(3,2)} \\
\mathbf{0}_{(2,2)} & \mathbf{0}_{(2,3)} & \mathbf{E}_{(2,2)} & \mathbf{C}_{(2,2)} \\
\mathbf{0}_{(2,2)} & \mathbf{0}_{(2,3)} & \mathbf{0}_{(2,2)} & \mathbf{E}_{(2,2)}
\end{pmatrix}
$$

Produktionsmodelle mit LGS

Die Inverse der Koeffizientenmatrix enthält die Matrizen der direkten, der indirekten und der totalen Einsatzkoeffizienten als Unterblöcke und damit die Informationen des gesamten Produktionsprozesses. $\mathbf{K}^{-1}$ heißt deshalb **Gesamtbedarfsmatrix**.

Die Modellierung von linearen Verflechtungen mit Hilfe von linearen Gleichungssystemen hat gegenüber dem im Einführungsbeispiel behandelten Multiplikationsmodell mehrere Vorteile:

- der gesamte Produktionsprozeß ist übersichtlicher in einer Matrix dargestellt;

- die Koeffizientenmatrix **K** ist eine invertierbare quadratische Matrix, damit liegen dem soeben behandelten Modell leistungsfähigere algebraische Strukturen zugrunde;

- in den 9-dimensionalen Bestellvektor $\vec{y}$ können leicht neben den Endprodukten auch Zwischenprodukte für eine eventuelle Erhöhung der Lagerhaltung oder für die Lieferung von Ersatzteilen einbezogen werden (siehe Aufgabe weiter unten);

- das Modell bleibt auch für Produktionsprozesse, bei denen beispielsweise Rohstoffe auch in Zwischenprodukten höherer Stufe oder in Endprodukten verwendet werden, gültig, darüberhinaus lassen sich Produktionsprozesse mit Materialrückflüssen, wie sie insbesondere in der chemischen Industrie vorkommen behandeln.

Aufgabe

Der Auftraggeber der 40 ME des Endproduktes E_1 und der 60 ME des Endproduktes E_2 bestellt je 100 ME der Zwischenprodukte Z_{21} und Z_{22} als Ersatzteile. Darüber hinaus soll der Lagerbestand der Zwischenprodukte Z_{11}, Z_{12} und Z_{13} um je 50 Einheiten erhöht werden. Berechnen Sie Gesamtbedarfsvektor $\vec{x}$.

Lösung: Mit den angebebenen Mengeneinheiten von Endprodukten und Zwischenprodukten ergibt sich der folgende Bestellvektor $\vec{y}$:

$$\vec{y}^T = (\underbrace{0|0}_{\substack{Roh-\\stoffe}} \;|\; \underbrace{50|50|50}_{\substack{Zwischenprodukte\\ersterStufe}} \;|\; \underbrace{100|100}_{\substack{Zwischenprodukte\\zweiterStufe}} \;|\; \underbrace{40|60}_{Endprodukte})$$

$$\vec{x} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 7{,}5 & 9{,}4 & 41{,}3 & 44{,}1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 2 & 10 & 8{,}8 & 47{,}6 & 53{,}2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0{,}2 & 6{,}4 & 8{,}3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}5 & 3 & 7{,}5 & 6{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \\ 50 \\ 50 \\ 100 \\ 100 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6288 \\ 7326 \\ 1024 \\ 1050 \\ 1090 \\ 460 \\ 270 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$