Problemas – Tema 6

Problemas resueltos - 13 - determinar si una matriz admite inversa por el método de Gauss

1. ¿Para qué valores de a **no admite inversa la matriz** $A=\begin{pmatrix} 0 & a-3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **?**

Obtenemos la matriz triangular por Gauss para saber cuántos vectores linealmente independientes hay, como máximo, en la matriz. Si hay 3 vectores linealmente independientes, el rango será 3 y la matriz tendrá inversa.

$\begin{pmatrix} 0 & a-3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix}$ → Reordeno y coloco F_3 como primera fila → $\begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 0 & a-3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ →

→ $F'_3=(a-3)F_3-F_2$ → $\begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 0 & a-3 & 4 \\ 0 & 0 & -2a+2 \end{pmatrix}$ → Discusión de casos:

- Si $-2a+2=0$ → $a=1$ → $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ → Rango = 2
- El caso $a-3=0$ no lo contemplo en la matriz final porque anula la transformación $F'_3=(a-3)F_3-F_2$. Debemos sustituir $a=3$ en la matriz previa a la operación no permitida → $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ → intercambiando Filas 2 y 3 → $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ → Rango = 3
- Si $a=0$ → $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ → $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ → $F'_2=F_2-3F_1+F_3$ → $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ →

  → $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ → Su rango es 2
- Caso complementario: $a\neq 0,1$ → Rango 3 en la matriz final

Conclusión: Si $a=1$ o $a=0$ la matriz no admite inversa.