La recta L corta al triangulo ABC en lado AB en el punto M, y al lado BC en el punto N, formándose un triángulo y un cuadrilátero, y se considera que ambas figuras deben tener la misma área y el mismo perímetro.

Para que estos se cumpla se debe cumplir lo siguiente:

$$Perímetro \triangle = Perímetro \boxdot$$
$$\overline{BM} + \cancel{\overline{MN}} + \overline{BN} = \overline{AC} + \overline{CN} + \cancel{\overline{MN}} + \overline{AM}$$
$$\overline{BM} + \overline{BN} = \overline{AC} + \overline{CN} + \overline{AM} \quad (1)$$

Luego se trazan las bisectrices del triángulo ABC y el punto P será el punto de intersección de la recta L con el incentro. Luego se proyecta el punto P sobre los lados del triángulo ABC, obteniéndose los puntos D, E y F; y 3 rectas

El punto P al pertenecer a la bisectriz del ángulo en $\measuredangle B$ entonces deberá cumplir con lo siguiente:

$$\overline{PD} = \overline{PF} = h \quad (2)$$

Donde h será la altura del o los triángulos que se formen.

Luego se considera que ambas áreas deben ser iguales, por lo que se dispone a calcularlas y verificar si la recta L pasa por el incentro.

El área del triángulo BMN viene dada por $\frac{b*h}{2}$ donde b será el lado (base) conocido y h la altura, pero desconocida. Así, dividimos el triángulo en dos más pequeño en función del punto P, obteniéndose $\triangle BPN \; y \; \triangle BPM$, en donde conocemos su base y su altura. Se tiene entonces que:

$$A \triangle_{BMN} = A \triangle_{BPN} + A \triangle_{BPM}$$
$$A \triangle_{BMN} = \frac{\overline{BM} * \overline{PF}}{2} + \frac{\overline{BN} * \overline{PD}}{2}$$
$$A \triangle_{BMN} = \frac{\overline{BM} * \overline{PF} + \overline{BN} * \overline{PD}}{2} \quad (3)$$

El área del cuadrilátero ACNM puede venir dada por $A = a * h$ **o** $A = \frac{(B+b)*h}{2}$, pero, como el cuadrilátero es un polígono irregular, **donde se observa y demuestra en la figura de al lado por poseer diferentes lados**, lo dividimos en tres triángulos en función del punto P, obteniéndose $\triangle APM \;\; \triangle APC \;\; \triangle CPN$. Así el área del cuadrilátero será la suma de las áreas de los triángulos:

$$A \boxdot_{\mathrm{ACNM}} = A \triangle_{APM} + A \triangle_{APC} + A \triangle_{CPN}$$
$$A \boxdot_{\mathrm{ACNM}} = \frac{\overline{AM} * \overline{PF}}{2} + \frac{\overline{AC} * \overline{PE}}{2} + \frac{\overline{CN} * \overline{PD}}{2}$$
$$A \boxdot_{\mathrm{ACNM}} = \frac{\overline{AM} * \overline{PF} + \overline{AC} * \overline{PE} + \overline{CN} * \overline{PD}}{2} \quad (4)$$

Luego, igualamos ambas áreas:

$$A \triangle_{BMN} = A \boxdot_{\mathrm{ACNM}}$$

$$\frac{\overline{BM} * \overline{PF} + \overline{BN} * \overline{PD}}{2} = \frac{\overline{AM} * \overline{PF} + \overline{AC} * \overline{PE} + \overline{CN} * \overline{PD}}{2}$$

$$\overline{BM} * \overline{PF} + \overline{BN} * \overline{PD} = \overline{AM} * \overline{PF} + \overline{AC} * \overline{PE} + \overline{CN} * \overline{PD} \quad (5)$$

De aquí, consideramos en <u>este caso</u> que cada altura es igual a “h”

$$\overline{BM} * h + \overline{BN} * h = \overline{AM} * h + \overline{AC} * h + \overline{CN} * h \quad (6)$$

Restando (5) y (6) mediante un sistema de ecuaciones, y considerando (2)

$$\begin{Bmatrix} \overline{BM} * \overline{PF} + \overline{BN} * \overline{PD} = \overline{AM} * \overline{PF} + \overline{AC} * \overline{PE} + \overline{CN} * \overline{PD} \\ \overline{BM} * \overline{h} + \overline{BN} * h = \overline{AM} * \overline{h} + \overline{AC} * \overline{h} + \overline{CN} * \overline{h} \end{Bmatrix}$$
$$0 + 0 = 0 + \overline{AC} * \overline{PE} - \overline{AC} * \overline{h} + 0$$
$$0 = \overline{AC}\,(\overline{PE} - h)$$
$$0 = \overline{PE} - h$$
$$\overline{PE} = h$$

Se tiene entonces que $\overline{PD} = \overline{PF} = h = \overline{PE}$, que el punto P equidista de los lados del triángulo siendo éste el incentro. Por lo tanto se cumple que la recta L que pasa por el incentro divide el triángulo ABC en dos polígonos que tienen el mismo perímetro y la misma área.

De todo lo anterior, se concluye que la recta L debe cumplir con las siguientes condiciones:

1.- Sea P el incentro del triangulo $\overline{PD} = \overline{PF} = \overline{PE} = h$

2.-

$$A \triangle_{BMN} = A \boxdot_{\mathrm{ACNM}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BM} * \overline{PF} + \overline{BN} * \overline{PD} = \overline{AM} * \overline{PF} + \overline{AC} * \overline{PE} + \overline{CN} * \overline{PD}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BM} * h + \overline{BN} * h = \overline{AM} * h + \overline{AC} * h + \overline{CN} * h$$

$$\Leftrightarrow \cancel{h}\,(\overline{BM} + \overline{BN}) = \cancel{h}\,(\overline{AM} + \overline{AC} + \overline{CN})$$

$$\Leftrightarrow \overline{BM} + \overline{BN} = \overline{AM} + \overline{AC} + \overline{CN}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BM} + \overline{BN} + \overline{MN} = \overline{AM} + \overline{AC} + \overline{CN} + \overline{MN}$$

$$A \triangle_{BMN} = A \boxdot_{\mathrm{ACNM}} \Leftrightarrow Perímetro \triangle = Perímetro \boxdot$$

Por lo que la recta que pasa por el incentro y divide al triangulo ABC en igual perímetro y área, existe y se cumple.