5. Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten

DEFINITION

Funktionen der Form $f: x \longmapsto a \cdot x^{\frac{p}{q}} = a\sqrt[q]{x^p}$ $(a \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N})$ heißen Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten.

Da im Nenner keine ganze Zahl steht, ist die Ableitung für uns aktuell nicht bildbar.

Wir verwenden deshalb einen kleinen Trick:

Gegeben sei die Funktion $\quad f(x) = \sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}} \quad | \uparrow q$

Beide Seiten hoch q $\quad f(x)^q = x^p$

Ableiten beider Seiten $\quad$ Kettenregel $\downarrow$ Potenzregel

$$q \cdot f(x)^{q-1} \cdot f'(x) = p \cdot x^{p-1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{p \cdot x^{p-1}}{q \cdot f(x)^{q-1}} \qquad \text{) } f(x) = x^{\frac{p}{q}}$$

$$= \frac{p \cdot x^{p-1}}{q \cdot \left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}}$$

$$= \frac{p \cdot x^{p-1}}{q \cdot x^{p - \frac{p}{q}}} \qquad \text{In Zähler schreiben!}$$

$$= \frac{p}{q} \cdot x^{p-1} \cdot x^{\frac{p}{q} - p}$$

$$= \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q} - 1}$$

MERKE

Rationale Exponenten werden abgeleitet wie ganzzahlige Exponenten:

$$x^{\frac{p}{q}} \xrightarrow{\text{Ableitung}} \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q} - 1}$$