Редици, клонящи към безкрайност

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

1. Неперово число

Определение. Границата на редицата $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ се нарича **неперово число** и се означава с e,

– $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$e = 2,7182\ldots$

– e е ирационално число.

n	a_n	n	a_n
1	**2**, 0000000000	500	**2, 7155685207**
2	**2**, 2500000000	1000	**2, 7169329322**
3	**2**, 3703703704	2000	**2, 7176025693**
4	**2**, 4414062500	5000	**2, 7180100501**
5	**2**, 4883200000	10000	**2, 7181459268**
6	**2**, 5216263717	20000	**2, 7182138745**
100	**2**, 7048138294	30000	**2, 7182365251**
200	**2, 7**115171229	2000000	**2, 7182811489**

– $\log_a b$ $\quad a \neq 1$, $a > 0$

$a = 10 \Rightarrow \lg b$

$a = e \Rightarrow \ln b \to$ натурален лог.

– a^x – пок. ф. $\quad e^x$ – експоненциална ф-я

$[1^\infty]$

Задача 4. Да се намери:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}$;

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$\sqrt[a]{x^b} = x^{\frac{b}{a}}$

$\sqrt[\frac{1}{2}]{\ } = (\ )^2$

а)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}_{e}\cdot\left(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{=0}\right)^{1} = e\cdot 1 = e$$

б)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^{2} = e^2$$

в)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n}{2}}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3n}{2}}\right)^{n\cdot\frac{3}{2}}\right]^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^2}$$

$(a^x)^y = a^{xy}$

Задача 9

Намерете границата:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}_{= e}\left(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{= 0}\right)^{2} = e\cdot 1^2 = e$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\Big[\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}_{e}\Big]^{2} = e^2$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\underbrace{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}_{= e}} = \sqrt{e}$

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\right)^{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2} = e\cdot 1^2 = e$

2. Сума на безкрайно намаляваща геометрична прогресия

$\div a_1, a_1 q, a_1 q^2, a_1 q^3 \ldots$

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} .$$

$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

Определение. Границата на редицата S_n, (ако съществува) се нарича **сума на безкрайна геометрична прогресия**.

Определение. Безкрайна геометрична прогресия, за която $|q|<1$, се нарича **безкрайно намаляваща геометрична прогресия**.

$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$

Теорема 2. Сумата на безкрайно намаляваща геометрична прогресия с първи член a_1 и частно $|q|<1$ е $S = \frac{a_1}{1-q}$.

Д-во:

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$

1. Да се намери сумата на безкрайната геометрична прогресия:

а) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$;

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4$

$a_1 = 1$

$q = \frac{1}{2}$

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

2. Да се намери сумата на безкрайна геометрична прогресия, ако:

а) $a_1 = 2\sqrt{3}$, $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2\sqrt{3}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3}^2}{\sqrt{3}-1} = \frac{6(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{6(\sqrt{3}+1)}{2} = 3(\sqrt{3}+1)$$

⑤ Превърнете безкрайните периодични дроби в обикновени.

а) 0,(7) б) 0,(24) в) 2,(15) г) 2,1(5)

а) $0,(7) = 0,7777\ldots = 0 + \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \ldots =$

$= 0 + 7\cdot\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots\right)$

$=$ $\quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \Rightarrow q = \frac{1}{10}$

$= 0 + 7\left(\dfrac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}}\right) = 0 + 7\cdot\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{7}{9}$

б) 0,(24) **в)** 2,(15)

б) $0,(24) = 0,242424\,24\ldots =$

$= 0 + \frac{24}{100} + \frac{24}{10000} + \frac{24}{1000000} + \ldots$

$= 0 + 24\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{1000000} + \ldots\right)$

$q = \frac{1}{100}$ a_1

$= 0 + 24 \cdot \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 0 + 24 \cdot \frac{\frac{1}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{24}{99} = \frac{8}{33}$

в) $2,(15) = 2,151515\ldots$

$= 2 + \frac{15}{100} + \frac{15}{10000} + \frac{15}{1000000} + \ldots$

$= 2 + 15 \cdot \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{1000000} + \ldots\right)$

$q = \frac{1}{100}$ a_1

$= 2 + 15 \cdot \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{100}} =$

$= 2 + 15 \cdot \frac{\frac{1}{100}}{\frac{99}{100}} =$

$= 2 + \frac{15}{99} = 2 + \frac{5}{33} = 2\frac{5}{33}$

$= \frac{71}{33}$

3. За безкрайно намаляваща геометрична прогресия са дадени:

а) $q=\frac{1}{4}$, $S=20$, намерете a_1;

5. Сумата на безкрайно намаляваща геометрична прогресия е 4, а сумата на първите ѝ три члена е $3{,}5$. Намерете първия член и частното на прогресията.