Vectores en R^2 y R^3

Magnitudes escalares y vectoriales

Hay magnitudes que quedan determinadas dando un solo número real. Por ejemplo: la longitud de una regla, la masa de un cuerpo o el tiempo transcurrido entre dos sucesos. Tales magnitudes se llaman *escalares*, y pueden ser representadas sobre la recta real mediante un número que indica su medida. Otros ejemplos de escalares son: la densidad, el volumen, el trabajo, la potencia.

Para otras magnitudes, en cambio, no es suficiente dar un número para determinarlas. Para la velocidad en un punto, por ejemplo, no basta conocer su intensidad, sino que hace falta conocer además la *dirección* y el *sentido* con que el punto se mueve.

La dirección viene dada por una recta, de manera que todas las rectas paralelas representan la misma dirección. Otras rectas no paralelas tienen direcciones diferentes. Cada dirección tiene dos sentidos, determinados por las dos orientaciones posibles sobre la recta.

Lo mismo que con la velocidad ocurre con la fuerza, con el campo eléctrico, etc. Son magnitudes en las que su efecto depende no sólo de la intensidad sino también de la dirección y sentido en que actúan.

Estas magnitudes en las que hay que distinguir su intensidad (que es una magnitud escalar), su dirección y su sentido, se llaman *magnitudes vectoriales*. Otros ejemplos son: la aceleración, la cantidad de movimiento, el campo magnético, el flujo de calor o de materia, etc.

Las magnitudes vectoriales ya no se pueden representar, como los escalares, por puntos sobre una recta. Hay que tomar segmentos de una dada longitud (indicadora de su intensidad) a partir de un punto fijo, los cuales tengan la dirección y sentido correspondientes.

Vectores.

Un segmento de recta queda determinado por sus dos puntos extremos. Cuando esos puntos están dados en un cierto orden, se dice que el segmento está *orientado*. Se llama *vector* a todo segmento orientado. El primer punto es el *origen* y el segundo, el *extremo* del vector.

La recta que contiene al vector determina su dirección; la orientación sobre la recta, definida desde el origen hasta el extremo, determina su sentido. Todos los vectores situados sobre una misma recta o sobre rectas paralelas tienen la misma dirección. Sobre cada recta hay dos sentidos opuestos.

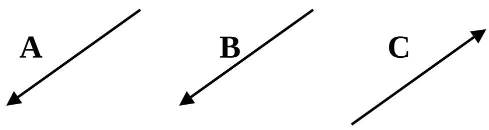
Se llama *módulo* de un vector a la longitud del segmento que lo representa, que es proporcional a la intensidad de la magnitud representada. El módulo es una cantidad escalar siempre positiva. Si **A** es el vector que tiene origen en O y extremo en P, su módulo representa la distancia entre los puntos O y P y se expresa de cualquiera de las tres siguientes maneras:

$$\text{mod } \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = |\overrightarrow{OP}|$$

Cuando el módulo de un vector es nulo, el segmento se reduce a un punto y no puede hablarse de vector pues carece de dirección y sentido. Sin embargo, se conviene en definir el *vector nulo* como aquél de módulo cero.

Para indicar un vector se usa con frecuencia una flecha encima: $\vec{\mathbf{A}}$ o bien $\overrightarrow{OP}$.

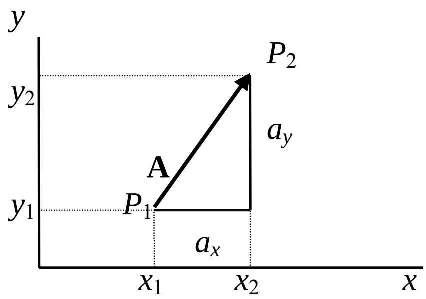
Dos vectores se dicen *iguales* cuando tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Los vectores **A** y **B** de la figura, ubicados sobre rectas paralelas, son iguales, **A=B**. Con este criterio de igualdad, todos los vectores pueden ser trasladados a un mismo origen. Dos vectores se dicen *opuestos* cuando tienen el mismo módulo, la misma dirección y sentidos opuestos. Los vectores **A** y **C** son opuestos y se indican **A**=-**C**.



Componentes de un vector

Supongamos que los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en $\mathbf{R}^2$ representan el origen y el extremo de un vector **A**=$\overrightarrow{P_1P_2}$. Se llaman *componentes* de **A** a las proyecciones de **A** sobre los ejes:

$$a_x = x_2 - x_1 \quad , \quad a_y = y_2 - y_1$$

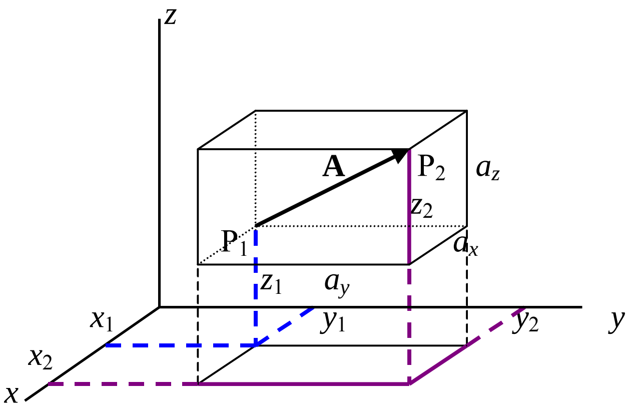


En general, un vector **A** en $\mathbf{R}^2$ se indicará por medio de sus dos componentes en la forma $\mathbf{A}(a_x, a_y)$. De la figura resulta que el módulo de **A** y sus componentes verifican:

$$|\mathbf{A}| = a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2}$$

Si el problema es en $\mathbf{R}^3$, los puntos que representan el origen y el extremo del vector **A**=$\overrightarrow{P_1P_2}$ se indican $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ (en azul) y $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ (en violeta). Las *componentes* de **A**, es decir, las proyecciones de **A** sobre los ejes son:

$$a_x = x_2 - x_1 \quad , \quad a_y = y_2 - y_1 \quad , \quad a_z = z_2 - z_1$$



En general, escribiremos $\mathbf{A}(a_x, a_y, a_z)$ para indicar las componentes de **A**. De la figura resulta que el módulo de **A** y sus componentes verifican:

$$|\mathbf{A}| = a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$$

La distancia d entre los puntos P_1 y P_2 se calcula a partir de las coordenadas de ambos puntos en la forma

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

y en forma análoga en $\mathbf{R}^2$.

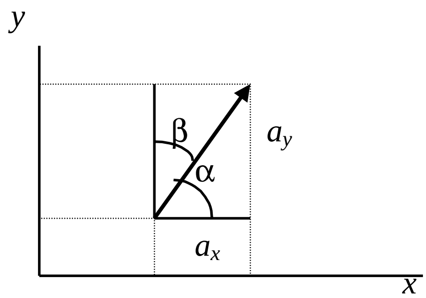
Dos vectores *opuestos* tienen sus componentes de igual valor absoluto pero de signos contrarios.

Cosenos directores de un vector

Se llaman *cosenos directores* de un vector respecto de un sistema de coordenadas ortogonales, a los cosenos de los ángulos que forma el vector con el sentido positivo de cada uno de los ejes coordenados. Los ángulos se toman entre 0 y π, de modo que los cosenos directores pueden ser positivos o negativos.

En $\mathbf{R}^2$, si los ángulos del vector $\mathbf{A}=(a_x , a_y)$ con los ejes x e y son respectivamente α y β, los cosenos directores se expresan como:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{a}$$



Se comprueba fácilmente que:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$$

♣ Ejemplo: Determinar las componentes, el módulo y los cosenos directores de un vector en el plano cuyo origen es el punto (1, 2) y su extremo el punto (-3, 3).
Indicamos con $P_1 = (x_1, y_1)$ al punto (1,2) y con $P_2 = (x_2, y_2)$ al punto (-3,3). Las componentes del vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ son $a_x = x_2 - x_1 = -3 - 1 = -4$, $a_y = y_2 - y_1 = 3 - 2 = 1$. Luego, $\overrightarrow{P_1P_2} = (-4,1)$. Su módulo es $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2} = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$. Los cosenos directores son $\cos\alpha = \frac{a_x}{a} = \frac{-4}{\sqrt{17}}; \cos\beta = \frac{a_y}{a} = \frac{1}{\sqrt{17}}$. A partir de los cosenos se puede calcular cada uno de los ángulos que forma el vector con los ejes coordenados: $\alpha = \arccos\frac{-4}{\sqrt{17}} \cong 166.0°$, $\beta = \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} \cong 76.0°$.

En $\mathbf{R}^3$, si los ángulos del vector $\mathbf{A}(a_x, a_y, a_z)$ con los ejes x, y, z son α, β, γ, respectivamente, los cosenos directores se expresan como:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{a} \quad ; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{a}$$

Se comprueba que:

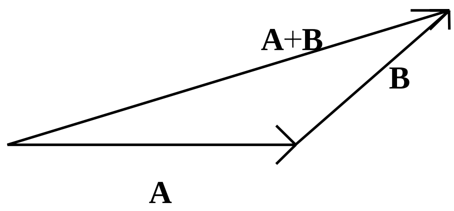
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

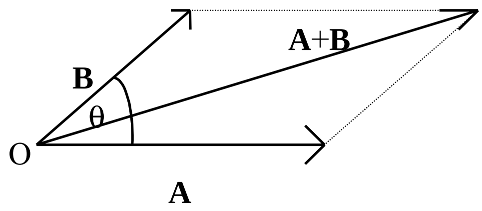
♣ Ejemplo: Determinar las componentes, el módulo y los cosenos directores de un vector en $\mathbf{R}^3$ cuyo origen es el punto (0, -1, 2) y su extremo el punto (-3, 1, 3).
Indicamos con $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ al punto (0,-1,2) y con $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ al punto (-3, 1, 3). Las componentes del vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ son $a_x = x_2 - x_1 = -3 - 0 = -3$, $a_y = y_2 - y_1 = 1 - (-1) = 2$, $a_z = z_2 - z_1 = 3 - 2 = 1$. Luego, $\overrightarrow{P_1P_2} = (-3,2,1)$. Su módulo es $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2} = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$. Los cosenos directores son $\cos\alpha = \frac{a_x}{a} = \frac{-3}{\sqrt{14}}; \cos\beta = \frac{a_y}{a} = \frac{2}{\sqrt{14}}$; $\cos\gamma = \frac{a_z}{a} = \frac{1}{\sqrt{14}}$. A partir de los cosenos se puede calcular cada uno de los ángulos que forma el vector con los ejes coordenados: $\alpha = \arccos\frac{-3}{\sqrt{14}} \cong 143.3°$, $\beta = \arccos\frac{2}{\sqrt{14}} \cong 57.7°$, $\gamma = \arccos\frac{1}{\sqrt{14}} \cong 74.5°$

Se concluye que, dadas las componentes de un vector, se pueden calcular tanto su módulo como sus cosenos directores, es decir, un vector queda completamente determinado (en módulo, dirección y sentido) a partir de sus componentes.

Adición y sustracción de vectores

Para sumar dos vectores **A** y **B**, ya sea en el plano como en el espacio tridimensional, se representa **B** a continuación de **A**, es decir, el origen de **B** se hace coincidir con el extremo de **A**. El vector **A**+**B** tiene su origen en el origen de **A** y su extremo en el extremo de **B**. Se llega al mismo resultado representando ambos vectores con el mismo origen O, trazando el paralelogramo sobre **A** y **B** y definiendo la suma como la diagonal que pasa por O.





Proyectando la poligonal formada por los vectores **A**, **B** y **A**+**B** sobre los ejes coordenados, resulta que las componentes de **A**+**B** son la suma de las componentes de **A** y de **B**. Si los vectores pertenecen a un plano de coordenadas *x*, *y*, se expresan como **A**=(a_x , a_y) y **B**=(b_x ,b_y) y su suma como ($a_x + b_x$, $a_y + b_y$). En el espacio, se tiene **A**=(a_x , a_y , a_z) y **B**=(b_x , b_y , b_z) y el vector suma es ($a_x + b_x$, $a_y + b_y$, $a_z + b_z$). De aquí surge que la suma de vectores es *conmutativa*:

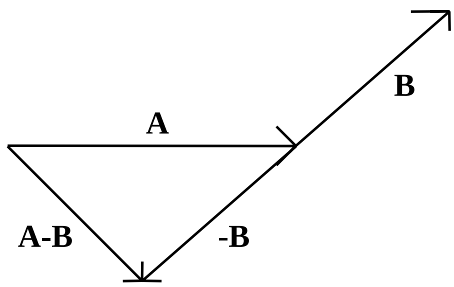
$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$$

El vector **A**+**B** verifica que

$$|\mathbf{A}+\mathbf{B}| \leq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$$
$$|\mathbf{A}+\mathbf{B}|^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta$$

donde θ es el ángulo formado por **A** y **B**, como se muestra en la figura.

La diferencia **A**-**B** es igual a la suma del vector **A** con el vector **-B**, que es el opuesto de **B** y sus componentes son: $a_x - b_x$, $a_y - b_y$, $a_z - b_z$. Gráficamente, dados **A** y **B**, la diferencia **A**-**B** se obtiene siguiendo el procedimiento que se indica en la figura:



Para efectuar la suma de varios vectores habrá que colocar sucesivamente uno a continuación de otro, de manera que el origen de cada uno coincida con el extremo del precedente. El vector suma es el que une el origen del primero con el extremo del último. De manera análoga se efectúa una suma algebraica, con la salvedad que habrá que considerar los opuestos de los vectores que aparecen restados.

Producto de un escalar por un vector

Dado un vector **A**=(a_x , a_y , a_z) y un escalar (número real) λ, el vector λ**A** tiene el módulo igual al producto de λ por el módulo de **A** y la misma dirección que **A**. El sentido de λ**A** es el mismo que el de **A** si λ es positivo y sentido opuesto si λ es negativo. Las componentes de λ**A** son:

$$\lambda a_x \quad , \quad \lambda a_y \quad , \quad \lambda a_z$$

Análogamente, si el vector se expresa como **A**=(a_x, a_y), las componentes de λ**A** son:

$$\lambda a_x \quad , \quad \lambda a_y$$

Vector unitario o versor

Se denomina *versor* a todo vector de módulo 1. Dado un vector de $\mathbf{R}^3$, **A**=(a_x, a_y, a_z), al dividirlo por su módulo $a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$ (escalar), se obtiene otro vector de igual dirección y sentido que **A** pero de módulo 1. Para representar al versor suele emplearse el símbolo $\hat{\mathbf{a}}$.

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{A}}{a}$$

y sus componentes son $(\frac{a_x}{a}, \frac{a_y}{a}, \frac{a_z}{a})$.

El caso plano se formula de manera análoga.

Versores fundamentales

Sobre cada uno de los ejes cartesianos ortogonales, y en coincidencia con el sentido positivo de los mismos, consideramos en $\mathbf{R}^2$ los vectores **i**, **j** de componentes

$$\mathbf{i}(1,0) \quad , \quad \mathbf{j}(0,1)$$

o en $\mathbf{R}^3$ los vectores **i**, **j**, **k** de componentes

$$\mathbf{i}(1,0,0) \quad , \quad \mathbf{j}(0,1,0) \quad , \quad \mathbf{k}(0,0,1)$$

que se denominan *versores fundamentales.* También se los suele representar con los símbolos $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$. Se comprueba fácilmente que

$$|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$$

Todo vector **A** de $\mathbf{R}^2$, de componentes (a_x , a_y) puede escribirse en la forma:

$$\mathbf{A} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j}$$

y todo vector **A** de $\mathbf{R}^3$, de componentes (a_x , a_y , a_z), en la forma:

$$\mathbf{A} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$$

La descomposición de un vector como suma de vectores en las direcciones de los ejes coordenados se denomina *descomposición canónica* y resulta sumamente útil, como se verá.

♣ Ejemplos: Efectuar la descomposición canónica de:

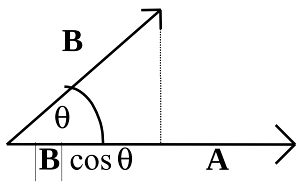
a. **A** =(4, -3): **A**= 4**i**-3**j**
b. **B** =(0, -1, 2): **B**=-**j**+2**k**

Todo vector de $\mathbf{R}^2$ puede escribirse como un vector de $\mathbf{R}^3$ con componente *z* igual a cero, es decir, como caso particular de vectores de $\mathbf{R}^3$.

Producto escalar

Se llama *producto escalar* o *interno* de dos vectores **A** y **B** al escalar que se obtiene como producto de los módulos de ambos vectores por el coseno del ángulo que ellos forman. En símbolos:

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta}$$



Como consecuencias inmediatas de la definición se tiene:

- El producto escalar es conmutativo: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$

- El producto escalar cumple con la propiedad distributiva: $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$

- Dado que $b\cos\theta$ representa la proyección de **B** en la dirección de **A**, como se ve en la figura, el producto escalar resulta igual al producto entre el módulo de **A** por la proyección de **B** en la dirección de **A**, o en general, igual al producto entre el módulo de uno de los vectores por la proyección del segundo en la dirección del primero.

- La condición necesaria y suficiente para que dos vectores sean perpendiculares es que su producto escalar sea nulo.

- Los versores fundamentales, tanto en $\mathbf{R}^2$ como en $\mathbf{R}^3$, cumplen que:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1 \quad ; \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0$$

- Dados los vectores $\mathbf{A} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = b_x\,\mathbf{i} + b_y\,\mathbf{j} + b_z\,\mathbf{k}$ (en su forma canónica), su producto escalar (aplicando la propiedad distributiva y las propiedades de los versores fundamentales) resulta:

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}$$

Con esta expresión se puede calcular el producto escalar de dos vectores cuando se conocen sus componentes.

- El ángulo entre dos vectores se calcula a partir de

$$\boxed{\cos\theta=\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}}$$

♣ Ejemplos: Efectuar el producto escalar y encontrar el ángulo entre los vectores:

a) **A**=(-1, -1) y **B**=(-2, -1)

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=a_xb_x+a_yb_y=(-1)(-2)+(-1)(-1)=3\,;$$

$$|\mathbf{A}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{2}\,;|\mathbf{B}|=\sqrt{b_x^2+b_y^2}=\sqrt{5}\,;\ \cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}\,;\ \theta=\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\cong 18.4°$$

b) **A**=(-1, -1, 3) y **B**=(-2, -1, -3)

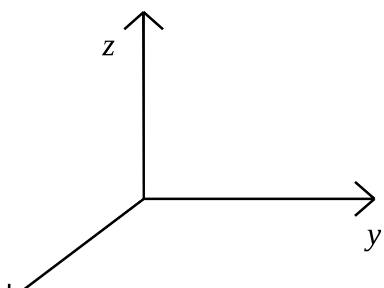
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=(-1)(-2)+(-1)(-1)+3(-3)=-6\,;$$

$$|\mathbf{A}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{11}\,;\ |\mathbf{B}|=\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}=\sqrt{14}\,;$$

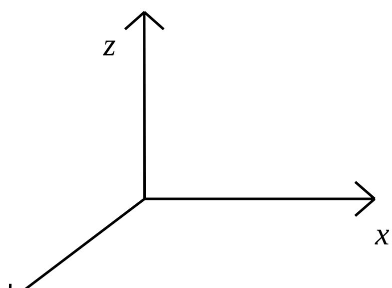
$$\cos\theta=\frac{-6}{\sqrt{11\cdot 14}}\,;\theta=\arccos\frac{-6}{\sqrt{11\cdot 14}}\cong 119.0°$$

Producto vectorial

Consideremos los dos triedros de la figura:



(a)



(b)

Se puede ver fácilmente que no existe ninguna rotación de uno de ellos que permita hacer coincidir todos los ejes del mismo nombre de ambos triedros, inclusive con su orientación. En efecto, si se hacen coincidir los orígenes y los ejes x e y, de modo que se superpongan las partes positivas con las positivas, los sentidos de los ejes z resultan opuestos. Se dice que los dos triedros tienen distinta *orientación*. Introduciremos un criterio para distinguirlas:

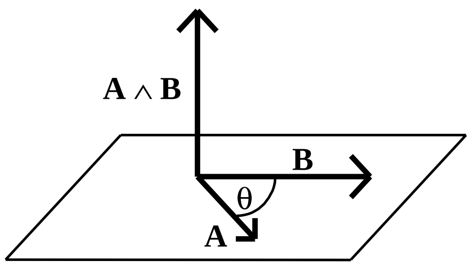
Consideremos un triedro (O, x, y, z) como el de la figura (a) e imaginemos que la parte positiva del eje x gira hacia la parte positiva del eje y. Un tornillo colocado perpendicularmente al plano x, y que gira de igual modo, avanza hacia la parte positiva del eje z. Se dice que este triedro es *positivo* o *directo*. En caso contrario, como ocurre en el caso de la figura (b), el triedro se dice *negativo* o *inverso.*

Existen vectores en cuya definición interviene la orientación del espacio, de manera que cambiando ésta, cambia el sentido del vector. Dichos vectores, por lo tanto, no quedan definidos de manera independiente del sistema de coordenadas al que está referido el espacio. Por este motivo se los denomina *pseudovectores.* Tal es el caso del producto vectorial.

Supongamos ahora que el espacio tiene orientación positiva, es decir, el triedro de referencia tiene sus ejes como en la figura (a). Se llama *producto vectorial* o *externo* de dos vectores **A** y **B**, y lo indicaremos $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$, al pseudovector que tiene:

∗ *módulo* igual al producto de los módulos de **A** y de **B** por el seno del ángulo comprendido entre **A** y **B** : $|\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \operatorname{sen} \theta$

∗ *dirección* perpendicular al plano determinado por las direcciones de **A** y **B**, y
∗ *sentido* tal que los vectores **A**, **B** y $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ formen un triedro directo, como el de referencia.



Esta última condición es la que confiere a $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ su carácter de pseudovector, es decir, su sentido no puede determinarse si no se conoce de antemano la orientación del espacio y cambia si cambia la orientación del mismo.

• Si en vez de $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ se considera $\mathbf{B} \wedge \mathbf{A}$, el módulo y dirección no cambian pero el sentido será opuesto al anterior, es decir, $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = -\mathbf{B} \wedge \mathbf{A}$. Esta propiedad se expresa diciendo que el producto vectorial es *anticonmutativo*.

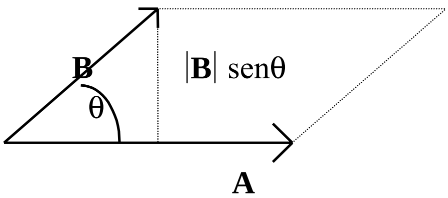
• Dado un escalar λ, se verifica que $\lambda(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = (\lambda\mathbf{A}) \wedge \mathbf{B} = \mathbf{A} \wedge (\lambda\mathbf{B})$.
En efecto, si $\lambda>0$, esta relación es una consecuencia directa de la definición e producto vectorial, puesto que los sentidos de los vectores no cambian al multiplicarlos por un escalar

positivo. Si λ<0, el vector del primer miembro cambia de sentido, pero también los productos del segundo y tercer miembro. Por lo tanto, la relación anterior vale para cualquier λ.

- Se puede demostrar que el producto vectorial cumple la propiedad distributiva, es decir: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\wedge\mathbf{C} = \mathbf{A}\wedge\mathbf{C}+\mathbf{B}\wedge\mathbf{C}$

- La condición necesaria y suficiente para que dos vectores tengan la misma dirección (con sentidos iguales u opuestos) es que su producto vectorial sea nulo. En efecto, suponiendo que los dos vectores tienen módulo no nulo, su producto vectorial se anula solamente si θ=0 ó θ=π.

- El módulo del producto vectorial de dos vectores es igual al área del paralelogramo trazado sobre ellos. En efecto, como se ve en la figura, si consideramos que la base del paralelogramo es $|\mathbf{A}|$ la altura es $|\mathbf{B}|$ senθ y la superficie resulta $|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|$ senθ, que coincide con $|\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}|$.



De la definición de producto vectorial y suponiendo positivo el triedro fundamental formado por los versores **i** , **j** , **k** , se deducen las relaciones:

$$\mathbf{i}\wedge\mathbf{i} = \mathbf{j}\wedge\mathbf{j} = \mathbf{k}\wedge\mathbf{k} = 0$$
$$\mathbf{i}\wedge\mathbf{j} = \mathbf{k} \quad ; \quad \mathbf{j}\wedge\mathbf{k} = \mathbf{i} \quad ; \quad \mathbf{k}\wedge\mathbf{i} = \mathbf{j}$$
$$\mathbf{j}\wedge\mathbf{i} = -\mathbf{k} \quad ; \quad \mathbf{k}\wedge\mathbf{j} = -\mathbf{i} \quad ; \quad \mathbf{i}\wedge\mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

Consideremos ahora dos vectores descompuestos en su forma canónica: $\mathbf{A} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = b_x\,\mathbf{i} + b_y\,\mathbf{j} + b_z\,\mathbf{k}$. Aplicando la propiedad distributiva y las propiedades de los versores fundamentales, se tiene:

$$\mathbf{A}\wedge\mathbf{B} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}$$

Recordando las reglas para desarrollar determinantes de tercer orden, se observa que esta relación también se puede escribir:

$$\boxed{\mathbf{A}\wedge\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}}$$

♣ Ejemplos: Efectuar el producto vectorial entre los vectores

a) **A** (1, -2, 0) y **B** (-3, 1, 4)

$$\mathbf{A}\wedge\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -8\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

b) **A** (2, -1) y **B** (-3, 5)

Si bien estos vectores pertenecen a $\mathbf{R}^2$, para efectuar el producto vectorial debemos escribirlos como vectores de $\mathbf{R}^3$. La componente *z* es nula.

$$\mathbf{A}\wedge\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 7\mathbf{k} = (0,0,7)$$

El vector resultado tiene sólo componente *z*, como era de esperar, puesto que los vectores componentes pertenecen al plano *xy* y el producto vectorial da un vector perpendicular a ambos.

Producto mixto de tres vectores

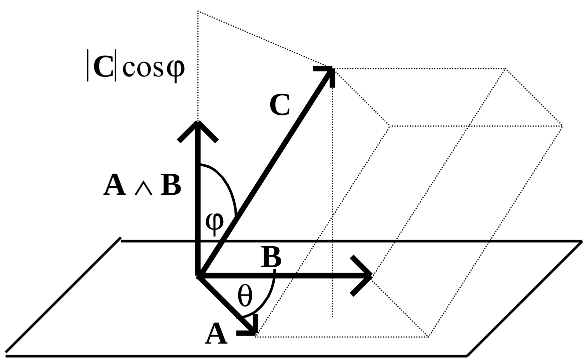
Dados tres vectores **A** , **B** y **C**, se llama producto mixto al producto escalar de $\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}$ por **C**. Destaquemos que el producto mixto de tres vectores da por resultado un escalar. Si las componentes de los tres vectores se indican con las minúsculas correspondientes, las propiedades antes mencionadas de los productos escalar y vectorial conducen a:

$$(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = (a_y b_z - a_z b_y)c_x + (a_z b_x - a_x b_z)c_y + (a_x b_y - a_y b_x)c_z$$

Utilizando un determinante de tercer orden, esta relación también se puede escribir como:

$$\boxed{(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}}$$

- El producto mixto es igual al volumen del paralelepípedo construido sobre los tres vectores, una vez llevados a partir de un origen común.



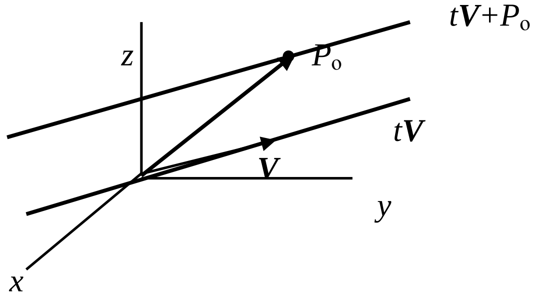
En efecto, el área de la base es, como vimos, igual al módulo de $\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}$. Si indicamos con φ al ángulo que forma **C** con la normal al plano determinado por **A** y **B**, la altura del paralelepípedo vale $|\mathbf{C}|\cos\varphi$. Por lo tanto, el volumen es igual a $|\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}||\mathbf{C}|\cos\varphi$, que es precisamente el valor de $(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$

- La condición necesaria y suficiente para que tres vectores sean paralelos a un mismo plano es que su producto mixto sea cero. Esto es una consecuencia inmediata de la definición.

Ecuación paramétrica de la recta

Al escribir la ecuación de la recta en el plano *xy* empleamos los conceptos de pendiente y ordenada al origen para escribirla en la forma $y=mx+b$, que se conoce como ecuación explícita de la recta. También es habitual encontrarla escrita en la forma implícita $Ax+By=C$ o en la forma segmentaria $x/a+y/b=1$, donde los coeficientes indican las intersecciones de la recta con los ejes coordenados. No resulta difícil pasar de una a otra forma de escritura de la ecuación de la recta en $\mathbf{R}^2$.

Estos conceptos geométricos no pueden aplicarse al problema de escribir la ecuación de la recta en $\mathbf{R}^3$. El concepto de pendiente carece de sentido ya que para especificar una dirección en el espacio no basta con fijar un ángulo (recordar los cosenos directores). Para esto, resulta más simple emplear un vector que pase por el origen de coordenadas y que tenga esa dirección. Sabemos que, al multiplicar a un vector por un escalar, obtenemos otro vector de igual dirección y de módulo diferente; el sentido coincidirá con el del vector dado si el escalar es positivo, y tiene sentido opuesto si el escalar es negativo. Si designamos con $\boldsymbol{V}$ al vector dirección y con t al escalar, y si ahora permitimos que t tome cualquier valor real, la expresión $P=t.\boldsymbol{V}$ representa a todos los puntos P del espacio que pertenecen a la recta **que pasa por el origen** y tiene la dirección del vector $\boldsymbol{V}$. Mediante P indicamos a un punto genérico de la recta, pero también podemos interpretarlo como el extremo de un vector cuyo origen es el origen de coordenadas y su extremo es P.



Si el propósito es escribir la ecuación general de una recta en $\mathbf{R}^3$ (que no necesariamente pase por el origen de coordenadas), tendremos que fijar de antemano, además de la dirección, las coordenadas de algún punto particular, P_o, por donde pasa la recta. Si a cada vector $\overrightarrow{OP}$ de la recta por el origen le sumamos el vector fijo $\overrightarrow{OP_0}$, construiremos uno a uno los infinitos puntos de una recta que tiene la dirección $\boldsymbol{V}$ y pasa por P_o. Así, le ecuación general de la recta en $\mathbf{R}^3$ se escribe

$$\boxed{P=t.\boldsymbol{V}+P_o,}$$

donde al variar el parámetro t, se van generando los puntos de la recta. Si P_o es el punto de coordenadas (x_o,y_o,z_o), $\boldsymbol{V}$ es el vector de componentes (v_x,v_y,v_z) y P es el punto genérico de coordenadas (x,y,z), la anterior se escribe también como

$$\boxed{(x,y,z) = t(v_x, v_y, v_z) + (x_o, y_o, z_o)}$$

Esta igualdad vectorial puede desglosarse componente a componente en la forma

$$\boxed{\begin{cases} x = t \cdot v_x + x_o \\ y = t \cdot v_y + y_o \\ z = t \cdot v_z + z_o \end{cases}}$$

donde debe interpretarse que el parámetro t toma el mismo valor en las tres ecuaciones. A cada valor de t le corresponde una terna de valores x,y,z, es decir un punto del espacio. Las tres formas de escritura expresan lo que se conoce como ***ecuación paramétrica de la recta***. Las expresiones anteriores se reducen a las conocidas para la recta en $\mathbf{R}^2$ con sólo considerar $v_z=0$ y $z_o=0$.

Despejando t en las tres ecuaciones e igualando, se obtiene

$$\boxed{\frac{x - x_o}{v_x} = \frac{y - y_o}{v_y} = \frac{z - z_o}{v_z}}$$

De lo anterior surge que el ángulo entre dos rectas es el ángulo entre sus vectores dirección. En particular, dos rectas son paralelas si sus vectores dirección lo son, o en otras palabras, si uno de ellos puede escribirse como un múltiplo del otro. Para caracterizar la perpendicularidad entre dos rectas, empleamos también sus vectores dirección, sabiendo que ellos son perpendiculares si y sólo si su producto escalar es nulo.

♣ Ejemplo: Encontrar la ecuación paramétrica de la recta que pasa por (1,-1,3) y tiene la dirección del vector (1,-2,-1).
La ecuación es $(x,y,z) = t(v_x, v_y, v_z) + (x_o, y_o, z_o) = t(1,-2,-1) + (1,-1,3)$, que también puede escribirse como $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t - 1 \\ z = -t + 3 \end{cases}$ o como $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-3}{-1}$

Intersección entre rectas

Sabemos que dadas dos rectas en $\mathbf{R}^2$ caben sólo dos posibilidades: se cortan en un punto o son paralelas. En $\mathbf{R}^3$ éstas no son todas las posibilidades. En la habitación en la que nos encontramos, miremos hacia arriba a la derecha y busquemos la línea de encuentro entre el cielo raso y la pared. Ahora miremos hacia delante y abajo e identifiquemos la línea que determinan el piso y esta otra pared. Ambas rectas no se cortan ni son tampoco paralelas. Este ejemplo nos revela que para decidir si dos rectas se cortan, no basta con ver si sus vectores dirección son o no paralelos ya que pueden no serlo y, sin embargo, las rectas no cortarse. Esto es lo que ocurre cuando no existe un plano que contenga a ambas rectas.

Consideremos dos rectas L y M de ecuaciones paramétricas

$L : (x, y, z) = p(a,b,c) + (x_0, y_0, z_0)$
$M : (x, y, z) = t(d,e, f) + (x_1, y_1, z_1)$

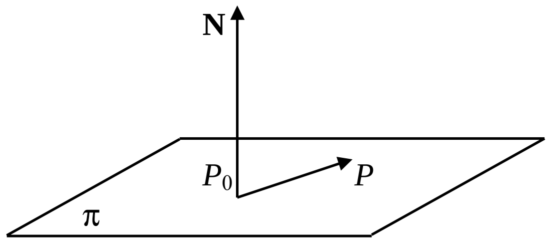
Para que ambas rectas se corten en un punto, deben cumplirse simultáneamente las ecuaciones

$$\begin{cases} pa + x_0 = td + x_1 \\ pb + y_0 = te + y_1 \\ pc + z_0 = tf + z_1 \end{cases}$$

Esto constituye un sistema de tres ecuaciones en las dos incógnitas *p* y *t*. Por lo tanto, puede suceder que no exista un par de valores *p* y *t* que satisfaga las tres ecuaciones. En ese caso, las rectas no tienen ningún punto en común. Pero, si una de las ecuaciones puede obtenerse como combinación lineal de las otras dos, entonces el sistema tendrá solución única pues equivale a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. En ese caso, obtenemos un valor para *p* y un valor para *t*. Al reemplazar *p* en la ecuación de la recta *L*, obtenemos un punto. El mismo punto resulta al reemplazar *t* en la ecuación de *M*.

Ecuación del plano

Dado un vector en $\mathbf{R}^3$, existe una familia de infinitos planos que son perpendiculares a él. Pero, si además seleccionamos un punto en el espacio por donde debe pasar, el conjunto se reduce a un solo plano. Dicho vector se denomina ***normal al plano*** y lo indicaremos con **N**. Indiquemos con π al plano, con (*a*,*b*,*c*) a las componentes de **N**, con $P_o=(x_o,y_o,z_o)$ al punto particular por donde pasa el plano y con $P=(x,y,z)$ a un punto genérico de π.



El vector $\overrightarrow{P_oP} = P - P_o$ está contenido en el plano y es perpendicular a **N**, es decir, el producto escalar $\overrightarrow{P_oP}$.**N**=0 o sea $(P\text{-}P_o)$.**N**=0. Al escribir en forma explícita sus componentes, resulta $(x - x_o, y - y_o, z - z_o) \cdot (a,b,c) = 0$ y al efectuar el producto escalar, se obtiene

$$(x - x_o)a + (y - y_o)b + (z - z_o)c = 0,$$

que puede reescribirse en la forma $ax + by + cz = ax_o + by_o + cz_o$. Dado que tanto las componentes del vector **N** como las coordenadas de P_o son constantes, el resultado de $ax_o + by_o + cz_o$ es una constante que indicaremos con *q*. Luego, la ecuación del plano se escribe

$$\boxed{ax + by + cz = q}$$

♣ Ejemplo: Escribir la ecuación del plano de normal **N**=(1,3,-2) que contiene al punto (1,-2,3).
La ecuación es $1x + 3y - 2z = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3$ o sea, $x + 3y - 2z = 1$.

Intersección entre una recta y un plano

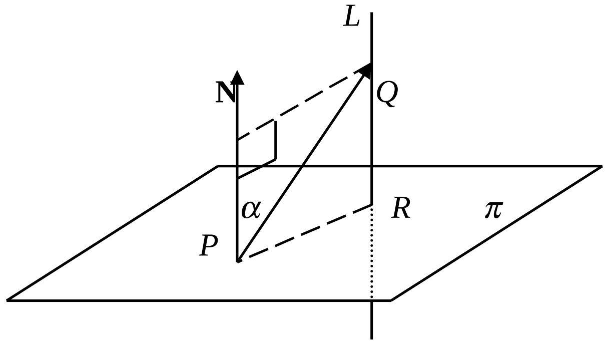
Queremos encontrar la intersección entre una recta *L* de ecuación paramétrica $(x, y, z) = t(u, v, w) + (x_0, y_0, z_0)$ y un plano π de ecuación $ax + by + cz = q$. Resulta geométricamente evidente que esta intersección puede resultar vacía. Esto ocurrirá cuando la recta sea paralela al plano. Como la recta viene caracterizada por su vector dirección ***V***$=(u, v, w)$ y el plano por su vector normal ***N***$=(a, b, c)$, habrá que comparar las direcciones de los vectores ***V*** y ***N***. Que la recta sea paralela al plano significa que ambos vectores son perpendiculares. Por lo tanto, calculamos el producto escalar ***V.N***. Si resulta nulo, dichos vectores son perpendiculares. Pero esta condición no basta para asegurar que la intersección sea vacía pues podría suceder que la recta estuviera contenida en el plano, en cuyo caso tendrían en común los infinitos puntos de la recta. Para ver si es éste el caso, tomamos un punto cualquiera de la recta y vemos si verifica la ecuación del plano. Concluimos que, si la recta y el plano son paralelos y tienen un punto en común, entonces tienen todos los puntos de la recta en común.

Supongamos ahora que la recta *L* y el plano π no son paralelos. Entonces se cortarán en un único punto. Para determinarlo, escribimos la ecuación de la recta por componentes: $x = t \cdot u + x_0$; $y = t \cdot v + y_0$; $z = t \cdot w + z_0$ y las reemplazamos en la ecuación del plano: $a(t \cdot u + x_0) + b(t \cdot v + y_0) + c(t \cdot w + z_0) = q$. De esta expresión se obtiene un valor del parámetro t en la forma $atu + btv + ctw = q - ax_0 - by_0 - cz_0$, de donde $t = \dfrac{q - ax_0 - by_0 - cz_0}{au + bv + cw}$. Al reemplazarlo en la ecuación de la recta, se obtiene un valor para *x*, un valor para *y* y un valor para *z*. Estas son las tres coordenadas del punto de intersección buscado.

♣ Ejemplo: Encontrar la intersección entre la recta $L : (x, y, z) = t(1,2,-1) + (1,0,3)$ y el plano $\pi : 2x - y + 3z = -1$.
Efectuamos el producto escalar entre los vectores ***V***=(1,2,-1) y ***N***$=(2,-1,3)$: $(1,2,-1) \cdot (2,-1,3) = 2 - 2 - 3 = -3 \neq 0$. Concluimos que la recta y el plano no son paralelos pues los vectores ***V*** y ***N*** no son perpendiculares. Por lo tanto, existe un punto de intersección. Para hallarlo, escribimos a partir de la ecuación de la recta: $x = t + 1$; $y = 2t$; $z = -t + 3$ y sustituimos en la ecuación del plano: $2(t + 1) - 2t + 3(-t + 3) = -1$ de donde $2t + 2 - 2t - 3t + 9 = -1$ o sea $-3t = -1 - 2 - 9$ y finalmente *t*=4. Las coordenadas del punto de intersección son *x*=4+1; $y = 2 \cdot 4$; $z = -4 + 3$. El punto es (5,8,-1). Se puede comprobar que este punto cumple también con la ecuación del plano: $2 \cdot 5 - 8 + 3 \cdot (-1) = -1$.

Distancia entre un punto y un plano

Queremos calcular la distancia entre un punto *Q* y un plano π que no contiene al punto. Para esto, tendríamos que trazar una recta *L* perpendicular al plano (paralela al vector **N**) que pase por *Q*, determinar el punto *R* de intersección de esta recta con el plano y luego calcular la distancia entre *R* y *Q*. La distancia *d* entre *Q* y el plano está dada por la longitud del segmento RQ.



Otro procedimiento más simple consiste en elegir un punto cualquiera *P* del plano y trazar el vector $\overrightarrow{PQ}$. Su proyección en la dirección de **N** tiene la misma longitud que el segmento *RQ*.

El valor de esta proyección está relacionado con el producto escalar entre los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y **N** ya que $\mathbf{N}\cdot\overrightarrow{PQ} = |\mathbf{N}|\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cos\alpha = |\mathbf{N}|\cdot$ proyección de $\overrightarrow{PQ}$ en la dirección de $\mathbf{N}$. Pero esta proyección puede resultar negativa si el ángulo α toma un valor entre π/2 y π. La distancia *d* que estamos buscando (que es una cantidad positiva) viene dada por el valor absoluto de dicha proyección. Luego,

$$\boxed{d = \frac{\left|\mathbf{N}\cdot\overrightarrow{PQ}\right|}{|\mathbf{N}|}}$$

♣ Ejemplo: Calcular la distancia entre el punto (2,-1,3) y el plano $2x+3y-4z=2$.
En primer lugar, comprobemos que el punto dado no pertenece al plano. En efecto, al reemplazar las coordenadas del punto en la ecuación del plano obtenemos $2\cdot 2+3\cdot(-1)-4\cdot 3=-11\neq 2$. Elegimos ahora algún punto del plano, por ejemplo el (1,4,3) y construimos el vector $\overrightarrow{PQ} = Q-P = (2,-1,3)-(1,4,3) = (1,-5,0)$. Su producto escalar con la normal al plano, $\mathbf{N}=(2,3,\text{-}4)$ es $(1,-5,0)\cdot(2,3,-4)=-13$. Además, $|\mathbf{N}|=\sqrt{4+9+16}=\sqrt{29}$. Luego, la distancia es $d=\dfrac{13}{29}$.

Cónicas y cuádricas

Cónicas

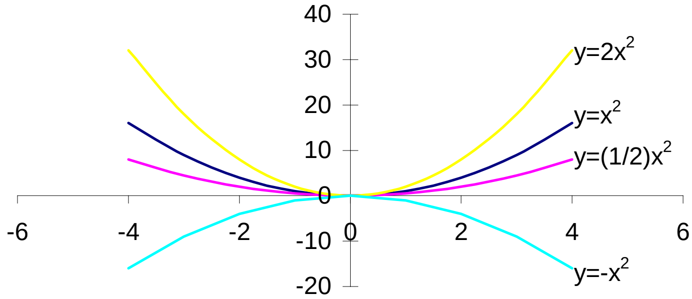
Reciben este nombre las curvas planas definidas mediante expresiones de segundo grado en las coordenadas cartesianas *x* e *y*, de la forma general

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

Pero esta ecuación general no es adecuada para el estudio de la forma de la curva. Por esto, comenzaremos partiendo de expresiones más sencillas, que corresponden a casos particulares de interés.

Parábola

Las funciones de segundo grado de la forma $y = ax^2$, con $a \neq 0$ se representan mediante parábolas. En la figura se muestran algunos ejemplos para diferentes valores de *a*. Son curvas con un eje de simetría vertical, que presentan un máximo o un mínimo en el origen. Este punto se denomina genéricamente *vértice*. La condición de máximo o mínimo depende del signo de *a*: si *a*>0, el vértice es un mínimo; si *a*<0, el vértice es un máximo.

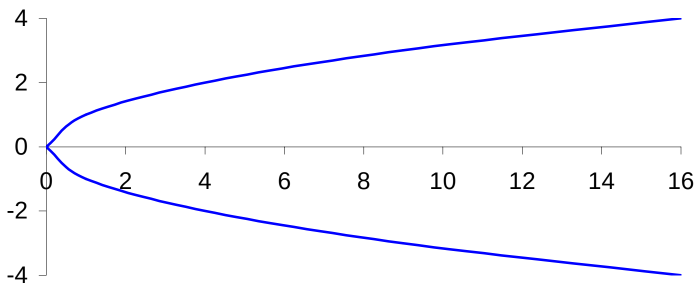


Una expresión de la forma $y = a(x-\alpha)^2$ corresponde a una parábola con su vértice en $(\alpha,0)$, en tanto que para $y - \beta = a(x-\alpha)^2$, el vértice se encuentra en (α,β). El eje de simetría en todos estos casos es vertical y contiene al vértice, es decir es una recta de ecuación $x = \alpha$.

Consideremos el ejemplo $y = x^2 + 4x + 3$. Para representar fácilmente la curva, nos conviene determinar antes que nada la posición del vértice y para esto, la llevamos a la forma $y - \beta =$ $= a(x-\alpha)^2$. Observamos en el ejemplo que los términos cuadrático y lineal en *x* pueden pensarse como dos de los términos de un trinomio cuadrado perfecto: $x^2 + 2 \cdot x \cdot 2$. Para que el trinomio esté completo, debemos agregar 2^2 pero, para que la función no se altere, la escribimos como $y = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 + 3$. Agrupamos los primeros tres términos y los escribimos como el cuadrado de un binomio, y agrupamos los otros dos términos entre sí. Así resulta $y = (x+2)^2 - 1$ que es una parábola con su vértice en el punto (-2,-1) y su eje de simetría dado por x=-2.

El procedimiento que acabamos de realizar se denomina *completar el cuadrado*.

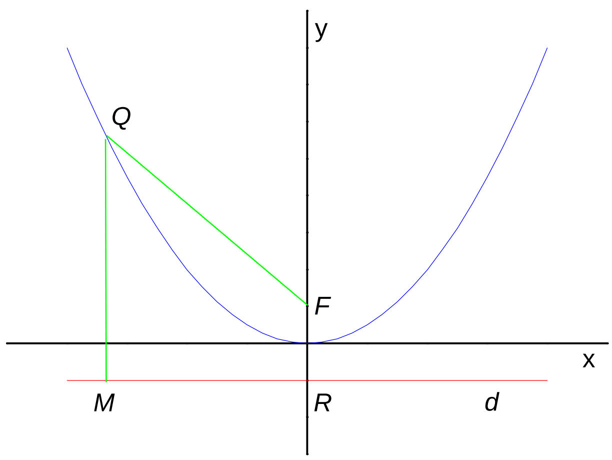
Consideremos ahora la expresión $x = y^2$ que equivale a $y = \pm\sqrt{x}$. Dado que a cada valor de x le corresponden dos valores de y, esta expresión no es una función. No obstante, podemos dibujar la curva que la representa.



Comparada con la función $y = x^2$, están intercambiados los roles de las variables x e y. La parábola $x = y^2$ tiene también su vértice en (0,0) pero su eje de simetría es horizontal y está dado por la ecuación y=0.

Una parábola general de eje de simetría horizontal se escribe en la forma $x - \alpha = a(y - \beta)^2$, donde el vértice es nuevamente el punto (α, β) y el eje de simetría es la recta $y = \beta$.

La característica general de las parábolas es que vienen dadas por ecuaciones donde una de las variables tiene grado 1 y la otra, interviene en un polinomio de grado 2. El eje de simetría es vertical cuando intervienen x^2 e y; es horizontal cuando aparecen a la inversa.



Los puntos del plano que constituyen una parábola verifican una relación geométrica que se define mediante una recta, *d*, llamada *directriz* y un punto, *F*, llamado *foco*: ***la parábola es el conjunto de los puntos del plano que equidistan de la directriz y del foco.*** En símbolos: $\overline{QF} = \overline{QM}$. La distancia entre el foco y la directriz suele indicarse con *p*, es decir, $p = \overline{FR}$; el vértice de la parábola es el punto medio entre *F* y *R*, de modo que el foco es el punto $F = (0, p/2)$. El parámetro *p* está relacionado con el coeficiente principal (*a*) de la parábola en la forma $p = \frac{1}{2a}$.

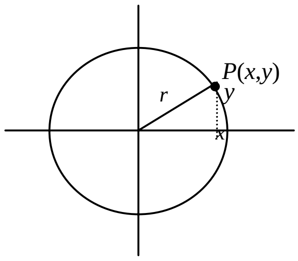
Circunferencia

Dados un punto C y un segmento r, la circunferencia de centro C y radio r es el conjunto de los puntos del plano que están a la distancia r de C.

Consideremos, para comenzar, que el punto *C* coincide con el origen de coordenadas. Un punto genérico *P*=(*x*,*y*) de la circunferencia cumple que sus coordenadas forman junto con el radio un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es *r*. El teorema de Pitágoras asegura que

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

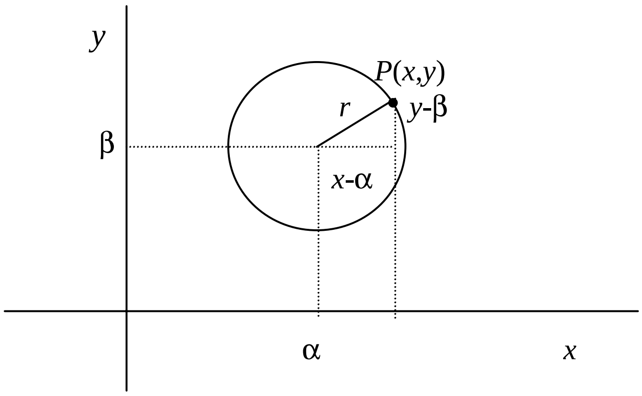
Esta es la ecuación de la circunferencia con centro en (0,0) pues es la condición que deben cumplir todos los puntos de la curva.



Si la circunferencia tiene su centro en un punto $C = (\alpha, \beta)$, la relación pitagórica se cumple en la forma

$$\boxed{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2}$$

que se conoce como *ecuación normal de la circunferencia*.



♣ Ejemplo: La ecuación $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ representa a una circunferencia de centro (2,-1) y radio 2. La misma ecuación podría presentarse en la forma $x^2-4x+4+y^2+2y+1=4$, o en forma equivalente, $x^2-4x+y^2+2y=1$, que es una expresión cuadrática en *x* e *y*.

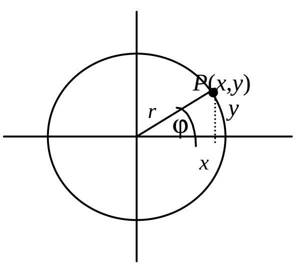
Consideremos ahora una ecuación de la forma $Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0$, con $A\neq 0$, que es de la forma general de la ecuación de las cónicas pero donde los coeficientes de x^2 y de y^2 son iguales y donde el término cruzado está ausente (*B*=0). Veremos que, bajo ciertas condiciones de los restantes coeficientes, se trata también de la ecuación de una circunferencia. En efecto, dividiendo ambos miembros por *a*, y completando los cuadrados, podremos llevarla a la forma normal e identificar las coordenadas de su centro y su radio.

♣ Ejemplo: Veamos si la ecuación $2x^2+6x+2y^2-10y=8$ representa una circunferencia y, en caso afirmativo, hallemos su centro y su radio.
Dividimos ambos miembros por 2: $x^2+3x+y^2-5y=4$, completamos los cuadrados: $x^2+2\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+y^2-2\frac{5}{2}y+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}=4$, agrupamos los términos para formar cuadrados de binomios: $(x+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}+(y-\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}=4$, agrupamos los términos independientes: $(x+\frac{3}{2})^2+(y-\frac{5}{2})^2=\frac{50}{4}$ y llegamos a la forma normal. El centro es, por lo tanto $(-\frac{3}{2},\frac{5}{2})$ y el radio es $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Hagamos lo mismo con la ecuación $x^2+y^2-4x-2y+9=0$. Al completar los cuadrados, tenemos: $x^2-4x+4-4+y^2-2y+1-1+9=0$, y agrupando: $(x-2)^2+(y-1)^2=-4$. Dado que el primer miembro es siempre positivo, esta igualdad no se cumple para ningún punto del plano real. Concluimos que, además de las condiciones ya mencionadas, los coeficientes restantes deben cumplir que, al agrupar los términos independientes, obtengamos en el segundo miembro un número positivo, pues debe representar al cuadrado del radio.

Volvamos a la circunferencia centrada en (0,0) y veamos cómo se describe mediante coordenadas polares. Al variar el ángulo φ entre 0 y 2π, el punto *P* recorre toda la circunferencia de radio *r*. Valen las relaciones

$x=r\cos\varphi$; $y=r\,\mathrm{sen}\,\varphi$



y se comprueba que $x^2+y^2=r^2$

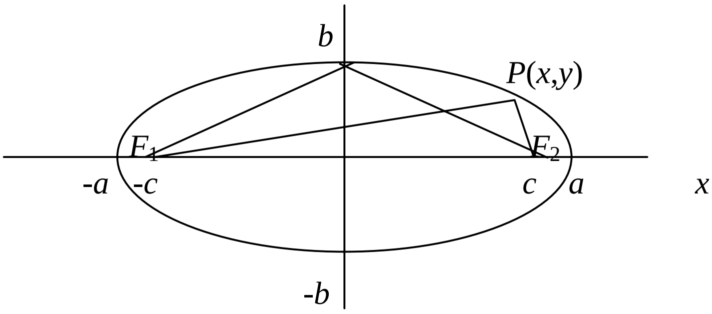
Elipse

Consideremos dos puntos, que llamaremos *focos*, ubicados sobre el eje *x*, en (*c*,0) y (-*c*,0), respectivamente, y una longitud $2a > 2c$. ***La elipse se define como el conjunto de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a los dos focos es igual a*** $2a$.

A partir de esta definición, que se traduce en $\overline{F_1P} + \overline{PF_2} = 2a$, y luego de un procedimiento algebraico se llega a

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

que es la *ecuación normal de la elipse* centrada en (0,0), con *semiejes a* y *b*. Ellos están relacionados con la distancia focal en la forma $a^2 = b^2 + c^2$, si $a>b$. Esto corresponde a los focos colocados sobre el eje *x*, como en la figura. Si los mismos están sobre el eje *y*, la elipse queda alargada verticalmente y la relación entre los parámetros es $b^2 = a^2 + c^2$ para $a<b$.



A partir de la ecuación de una elipse, si queremos representarla gráficamente, buscamos ante todo sus intersecciones con los ejes coordenados. Si hacemos *y*=0, resulta $x^2/a^2 = 1$, de donde $x = \pm a$. Esto indica que la elipse corta al eje *x* en los puntos (*a*,0) y (-*a*,0). En forma análoga, haciendo *y*=0, resulta $y = \pm b$, es decir, los puntos de intersección con el eje *y* son (0,*b*) y (0,-*b*). Estos cuatro puntos son los vértices de la elipse.

Si en la ecuación de la elipse despejamos *y*, tenemos $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Esta expresión indica, por un lado, que sólo se puede asignar a *x* valores tales que $a^2 - x^2 \geq 0$, o sea $x^2 \leq a^2$, o sea $|x| \leq a$, es decir, $-a \leq x \leq a$. La curva sólo está definida para valores de *x* dentro de este rango. Por otra parte, para cada valor de *x* que cumpla esa condición, existen dos valores de *y*, de signos contrarios. Por este motivo, la elipse no puede considerarse una función. Pero si tomamos sólo la determinación positiva, $y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, tenemos una función cuyo dominio es el intervalo $-a \leq x \leq a$, que describe la mitad superior de la elipse. Análogamente, $y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ describe la mitad inferior en el mismo dominio.

Observamos que, en particular, si *a*=*b*, la elipse se convierte en una circunferencia. En efecto, la ecuación queda $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, es decir, $x^2 + y^2 = a^2$ que es la ecuación de una circunferencia con centro (0,0) y radio *a*. En este caso, debe ser *c*=0, es decir, los dos focos se juntan en el origen de coordenadas.

Se define como *excentricidad* de una elipse a la relación $e=\frac{c}{a}$ si *a* es el semieje mayor o $e=\frac{c}{b}$ si el semieje mayor es *b* y da una medida de cuánto se aparta la elipse de una circunferencia. En general, es $0 \le e < 1$. Cuanto más cercano a 0 sea *e*, tanto más "parecida" a una circunferencia es la elipse.

Si el centro de la elipse se encuentra en (α,β), la ecuación se escribe:

$$\boxed{\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1}$$

que se denomina *forma normal de la ecuación de la elipse*.

♣ Ejemplo: Llevar la ecuación $9x^2+16y^2+90x+192y+657=0$ a la forma normal.
Observamos, en primer lugar, que esta expresión responde a la forma general de la ecuación de las cónicas. Es similar a los ejemplos que mostramos para la ecuación de la circunferencia, pero con una diferencia evidente: los coeficientes de x^2 y de y^2 son diferentes. Para pasar a la forma normal, debemos agrupar los términos: $9(x^2+10x)+16(y^2+12y)+657=0$, completar los cuadrados: $9(x^2+2\cdot 5x+25-25)+16(y^2+2\cdot 6y+36-36)+657=0$, formar los binomios al cuadrado: $9[(x+5)^2-25]+16(y+6)^2-36]+657=0$, agrupar los términos independientes: $9(x+5)^2+16(y+6)^2+(-225-576+657)=0$, o sea $9(x+5)^2+$ $+16(y+6)^2=144$, dividir por el número en el segundo miembro para que la ecuación quede igualada a 1: $\frac{9(x+5)^2}{144}+\frac{16(y+6)^2}{144}=1$, o sea $\frac{(x+5)^2}{16}+\frac{(y+6)^2}{9}=1$. Llegamos así a la ecuación en su forma normal. Corresponde a una elipse de semiejes *a*=4, *b*=3 centrada en $(-5,-6)$.

Cabe, respecto de una ecuación de la forma $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$, un comentario similar al realizado para el caso de la circunferencia. Esto es, esta ecuación puede no representar a una elipse si los coeficientes son tales que el término independiente que resulta una vez completados los cuadrados, no tiene el signo apropiado. (Si resulta positivo cuando se lo escribe en el segundo miembro, entonces sí se trata de una elipse).

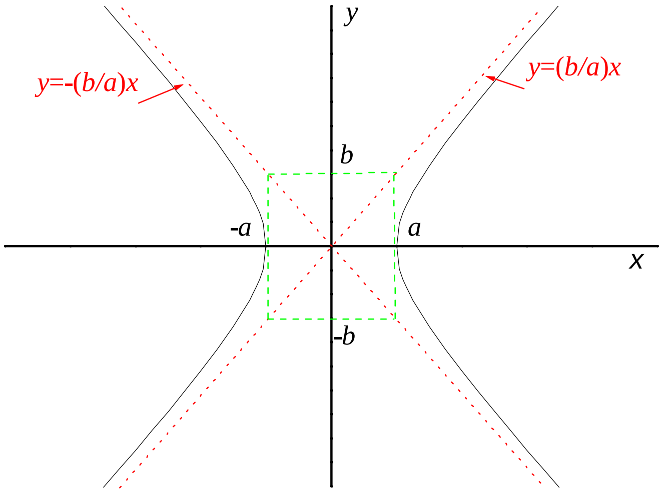
Para representar a una elipse centrada en el origen, mediante coordenadas polares debemos elegir $x=a\cos\varphi$; $y=b\,\mathrm{sen}\,\varphi$, con $0\le\varphi\le 2\pi$ Se comprueba fácilmente que, con esta elección, se cumple que $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$.

Hipérbola

En la definición de la hipérbola intervienen dos puntos fijos F_1 y F_2 llamados *focos*, situados en (-*c*,0) y (*c*,0) y una longitud 2*a*, tal que $0 < 2a < 2c$. La hipérbola se define como el conjunto de los puntos del plano tales que la diferencia de sus distancias a F_1 y F_2 es 2*a*: $\overline{PF}_1 - \overline{PF}_2 = 2a$. Después de un poco de aritmética, se llega a la *ecuación normal de la hipérbola*:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

donde *b* queda definido mediante la relación $b^2 = c^2 - a^2$.



La hipérbola corta al eje *x* en $\pm a$, lo que se comprueba haciendo *y*=0 en la ecuación. En cambio, no corta al eje *y* pues si imponemos *x*=0, la ecuación que resulta ($-\frac{y^2}{b^2} = 1$) no tiene solución real. Por lo tanto, la hipérbola tiene dos vértices en (-*a*,0) y (*a*,0). Si despejamos *y*, tenemos $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, que da valores reales para *y* si $x^2 - a^2 \geq 0$, o sea $x^2 \geq a^2$, que se cumple para $x \geq a$ ó $x \leq -a$. La curva sólo está definida para valores de *x* fuera del rango comprendido entre –*a* y *a*. La curva presenta dos asíntotas oblicuas ($y = mx + p$) que indican su comportamiento para grandes valores de $|x|$. La pendiente y la ordenada al origen de cada asíntota se calculan, respectivamente, mediante $m = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \pm \frac{b}{a}\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \pm \frac{b}{a} x$ y $p = \lim_{x\to\infty} (y - mx) = \lim_{x\to\infty} \pm \frac{b}{a}(\sqrt{x^2 - a^2} - x) = 0$. Las asíntotas son las rectas $y = b/a$ e $y = -b/a$. Las dos ramas de la hipérbola quedan “encajadas” entre las dos asíntotas. Para representar la hipérbola, conviene dibujar primero las asíntotas, lo que puede hacerse partiendo del rectángulo que se muestra en la figura, de lados 2*a* y 2*b* y trazando sus diagonales.

Si la ecuación está planteada en la forma $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, la curva corta al eje *y* pero no al eje *x*, los dos vértices se encuentran en (0,*b*) y (0,-*b*), *y* no puede adoptar valores entre –*b* y *b*, las asíntotas son, como en el otro caso, las rectas $y=b/a$ e $y=-b/a$, pero las dos ramas de la hipérbola ocupan los sectores inferior y superior.

Si el centro de la hipérbola se encuentra en un punto (α,β), la ecuación se escribe:

$$\boxed{\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1}$$

♣ Ejemplo: Comprobar que la ecuación $4x^2-9y^2-8x-32=0$ corresponde a una hipérbola y representarla.
El procedimiento es similar al empleado para la elipse: $4(x^2-2x+1-1)-9y^2-32=0$; $4(x-1)^2-4-9y^2-32=0$; $4(x-1)^2-9y^2=36$; $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$. Se trata de una hipérbola centrada en (1,0), con *a*=3 y *b*=2. Si definimos una nueva variable *x´*=*x*-1, la gráfica en los ejes *x´*-*y* tiene asíntotas $y=\pm\frac{2}{3}x'$, no corta al eje *y*, corta al eje *x´* en 3 y –3, es decir, tiene vértices (3,0) y (-3,0) de modo que las dos ramas están a la derecha de (3,0) y a la izquierda de (-3,0). El gráfico en los ejes *x*-*y* está desplazado según *x* en una unidad respecto del que acabamos de describir, de manera que las asíntotas son $y=\pm\frac{2}{3}(x-1)$ y los vértices están en (4,0) y (-2,0).

Para representar a una hipérbola centrada en el origen, en forma paramétrica debemos elegir $x=a\cosh t$; $y=b\,\mathrm{senh}\,t$. Se comprueba que, con esta elección, se cumple que

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=\cosh^2 t-\mathrm{senh}^2\,t=\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2=$$
$$=\frac{e^{2t}+2+e^{-2t}-(e^{2t}-2+e^{-2t})}{4}=1.$$

Cuádricas

Esta es la denominación general de superficies en el espacio tridimensional definidas mediante expresiones de segundo grado en las coordenadas cartesianas *x*, *y*, *z* de la forma

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fxz+Gx+Hy+Iz+J=0$$

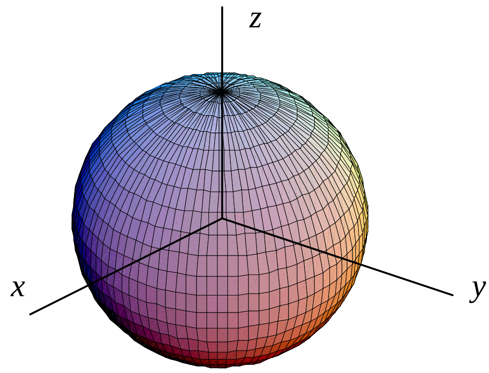
Tal como hicimos con las cónicas, estudiaremos ciertas superficies de interés particular por sus aplicaciones geométricas, que además tienen una forma más simple que la expresión general por tener algunos de los términos nulos.

La representación gráfica de las superficies requiere que trabajemos en el espacio tridimensional. Esto sólo puede hacerse en forma cualitativa y mediante dibujos en perspectiva pues estamos forzados a dibujar en el plano del papel. Un recurso con frecuencia de utilidad para imaginar la forma de la superficie y representarla es obtener sus intersecciones con los planos coordenados y con planos paralelos a ellos. Recordemos que, por ejemplo, el plano *xy* es el lugar geométrico de los puntos cuya coordenada *z* es cero. La ecuación del plano *xy* es *z*=0. Análogamente, la ecuación del plano *yz* es *x*=0 y la del plano *xz* es *y*=0. Mediante una ecuación como *z*=3, estamos indicando a todos aquellos puntos de $\mathbf{R}^3$ cuya coordenada *z* es 3. Ellos forman un plano paralelo al *xy* separado en 3 unidades de él. En forma similar, una expresión del tipo *x*=*constante*, indica a un plano paralelo al *yz* que corta al eje *x* en el valor de esa constante.

Esfera

La superficie más fácil de identificar es la esfera que se define como ***el conjunto de los puntos del espacio que equidistan de un punto llamado centro. Esa distancia se denomina radio de la esfera***. Dado un punto genérico $P = (x, y, z,) \in \mathbf{R}^3$, su distancia al origen se calcula como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de su tres coordenadas (tal como hicimos para medir el módulo de un vector en $\mathbf{R}^3$ con origen (0,0,0)). La ecuación cartesiana de la esfera es

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = r^2}$$



Busquemos la interseción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, de radio 4, con el plano coordenado *xy*, es decir, busquemos los puntos que satisfacen a la vez la ecuación de la esfera y la del plano *z*=0. Al reunir ambas ecuaciones, resulta $x^2 + y^2 = 16$. Esta es la ecuación de una circunferencia de radio 4. Si ahora buscamos la intersección de la misma esfera con el plano horizontal *z*=1 o con el plano *z*=-1, obtenemos $x^2 + y^2 = 15$, o sea, sobre cada uno de esos planos queda dibujada una circunferencia de radio $\sqrt{15} \cong 3.873$.
Para $z = \pm 2$, resulta sobre cada uno de esos planos una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 12$, donde el radio es $\sqrt{12} \cong 3.464$. Para $z = \pm 3$, es $x^2 + y^2 = 7$, donde el radio es $\sqrt{7} \cong 2.646$. Vemos que a medida que los planos horizontales se alejan del plano *xy*, las

circunferencias van disminuyendo su radio. Si ahora consideramos los planos $z = \pm 4$, obtenemos $x^2 + y^2 = 0$. Esta igualdad sólo puede satisfacerse si x=y=0. Por lo tanto, la intersección de la esfera de radio 4 con cada uno de estos dos planos es un punto: (0,0,4) y (0,0,-4), respectivamente. Para planos más alejados del *xy*, no se produce intersección pues la ecuación que resulta contiene $x^2 + y^2$ igualado a un número negativo, que no tiene solución real. Algo muy similar se cumple para las intersecciones con los planos coordenados *yz* y *xz*, y los planos paralelos a ellos, de la forma $x = x_0$ e $y = y_0$, respectivamente.

Si en la ecuación de la esfera escribimos *z* explícitamente en términos de *x* e *y*, obtenemos: $z = \pm\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$. En primer lugar observamos que, para cada par de valores (x, y), se obtienen dos valores para *z*. Vemos, además, que para que *z* resulte real, se debe cumplir que $r^2 \geq x^2 + y^2$. Esto limita los valores permitidos para (x, y) a los puntos de una circunferencia de radio *r* y los puntos interiores a ella. Pensando a $z = +\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ como una función de dos variables independientes, dicha circunferencia constituye el dominio de la función; en forma análoga para la función $z = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$.

Si el centro de la esfera de radio *r* es el punto *C* de coordenadas (α, β, γ), la ecuación en su forma normal es

$$\boxed{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2}$$

En su forma desarrollada, la ecuación es del tipo $Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$, con les tres coeficientes de los términos cuadráticos iguales entre sí. Para que, escrita en esta forma la ecuación represente a una esfera, los restantes coeficientes deben ser tales que, al llevarla a su forma normal (una vez completados los cuadrados), se obtenga un término independiente positivo en el segundo miembro.

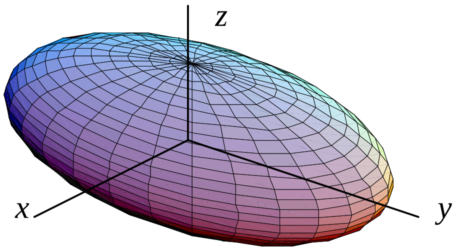
♣ Ejemplo: Verificar si la ecuación $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 12y + 3 = 0$ representa a una esfera y, en caso afirmativo, encontrar su centro y su radio.
Esta ecuación es de la forma de la ecuación general de las cuádricas con la particularidad de tener los coeficientes de los tres términos cuadráticos iguales. Esta condición debe cumplirse para que la ecuación pueda representar a una esfera. Además, no pueden aparecer términos cruzados. (Pensemos en la ecuación de la esfera con los binomios desarrollados como trinomios cuadrados). Si en el ejemplo dividimos ambos miembros por 3, tenemos: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 1 = 0$. Si en ésta completamos los cuadrados y agrupamos, obtenemos $(x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 9$ que es la ecuación de una esfera con centro (1,-3,0) y radio 3.

Elipsoide

Un elipsoide centrado en (0,0,0) es una superficie que se expresa mediante una ecuación de la forma

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.}$$

Las tres intersecciones con los planos coordenados son elipses. Los coeficientes *a, b* y *c* se denominan semiejes del elipsoide. Si *a=b=c*, la superficie es una esfera. Si sólo dos de los semiejes son iguales, el elipsoide tiene secciones circulares en los planos paralelos a uno de los planos coordenados, en cuyo caso se lo denomina *elipsoide de revolución* ya que la superficie puede obtenerse al hacer girar una elipse alrededor de uno de sus ejes (pelota de rugby)

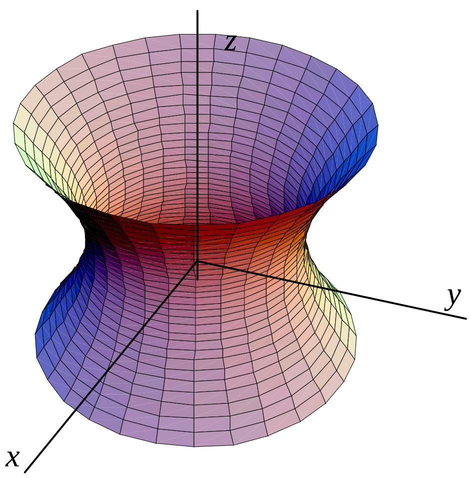


Si el centro se encuentra en un punto (α, β, γ) la ecuación adopta la forma normal

$$\boxed{\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}+\frac{(z-\gamma)^2}{c^2}=1}$$

En su forma desarrollada, la ecuación tiene la estructura $Ax^2+By^2+Cz^2+Gx+Hy+$ $+Iz+J=0$ con los tres coeficientes de los términos cuadráticos de igual signo. Para que la ecuación represente a un elipsoide, los restantes coeficientes deben ser tales que, al completar los cuadrados, se obtenga un término independiente positivo en el segundo miembro.

Hiperboloide de una hoja



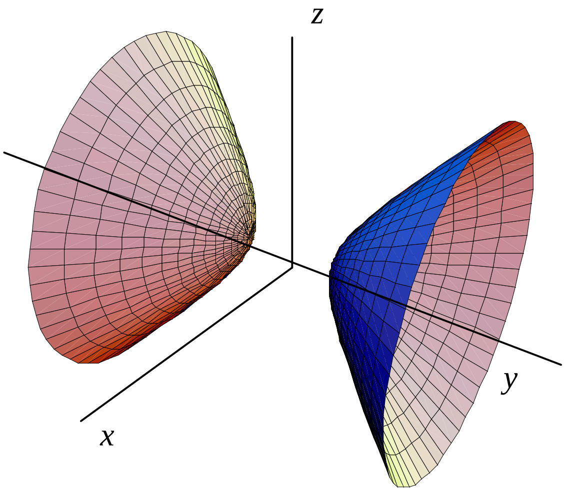
Se trata de una superficie que responde a una ecuación de la forma

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$$

(dos de los términos cuadráticos positivos y el otro, negativo). Las secciones paralelas al plano *xy* son elipses, en tanto que las paralelas a los planos *xz* e *yz* son hipérbolas. El ejemplo que se muestra en la figura (la superficie rodea al eje *z*) corresponde a la ecuación planteada en la que se eligió $a=b$ por lo cual la superficie es de revolución. (Una hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ ó $\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, al girar alrededor de z genera la superficie). Si el término negativo fuera el segundo, la superficie rodearía al eje *y* y si fuera el primero, rodearía al eje *x*.

En cuanto al desplazamiento del centro, caben las mismas consideraciones que para otros ejemplos. Las relaciones de signos de los términos de segundo grado se mantienen al pasar a la forma desarrollada.

Hiperboloide de dos hojas



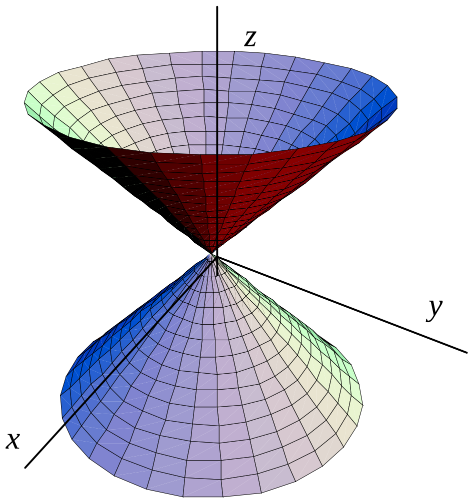
Es una superficie descrita por una ecuación de la forma

$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$$

(dos de los términos cuadráticos negativos y el otro, positivo). Las secciones paralelas al plano *xy* son hipérbolas de la forma $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, que no cortan al eje *x*,y cortan a *y* en +*b* y –*b*. Aquellas secciones paralelas al plano *yz* son también hipérbolas de la forma

$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, que no cortan al eje *z*,y cortan a *y* en +*b* y –*b*. En cambio, las secciones paralelas al plano *xz* (de ecuación $y = y_0$) dan lugar a expresiones del tipo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{y_0^2}{b^2} - 1$ que representan a elipses (de semiejes que aumentan al aumentar y_0) siempre que $|y_0| > b$. Si $y_0 = \pm b$, se obtienen los puntos (0,*b*,0) y (0,-*b*,0), que son los vértices de la superficie. Ella no existe para –*b*<*y*<*b*. En la figura se ha representado un caso donde *a*=*c*, razón por la cual es una superficie de revolución alrededor del eje *y*.

Cono



Esta superficie responde a una ecuación del tipo

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2}$$

Los planos horizontales $z = z_0$, dan lugar, al intersectarse con la superficie, a elipses de semiejes az_0 y bz_0. Si *a*=*b*, las curvas de intersección resultan ser circunferencias, como en la figura. Para $z_0 = 0$ (plano *xy*) la intersección se reduce al punto (0,0,0). La superficie es simétrica respecto de este plano pues sobre el plano $z = -z_0$ se obtiene una elipse igual a aquella que aparece sobre $z = z_0$.

La intersección con el plano *yz* (*x*=0) da lugar a $\frac{y^2}{b^2} = z^2$ que equivale a $z = \pm\frac{y}{b}$. Sobre este plano se obtienen dos rectas que pasan por el origen, de pendientes 1/*b* y –1/*b*, simétricas respecto del eje *z*. Algo similar sucede en el plano *xz*, con pendientes $\pm 1/a$. Al hacer girar una de estas rectas manteniendo al origen como punto fijo, de modo que en su rotación cada punto recorra una elipse horizontal, se generará el cono. Por esto, esta recta se denomina *generatriz del cono*.

Si tomamos planos paralelos al *yz*, $x = x_0$, la ecuación es $-\frac{y^2}{b^2} + z^2 = \frac{x_0^2}{a^2}$ que representa a una hipérbola que no corta al eje *y*. Se puede demostrar que si trazamos un plano paralelo a una generatriz, que no pase por el origen, al intercectar al cono dejará dibujada una parábola sobre el plano.

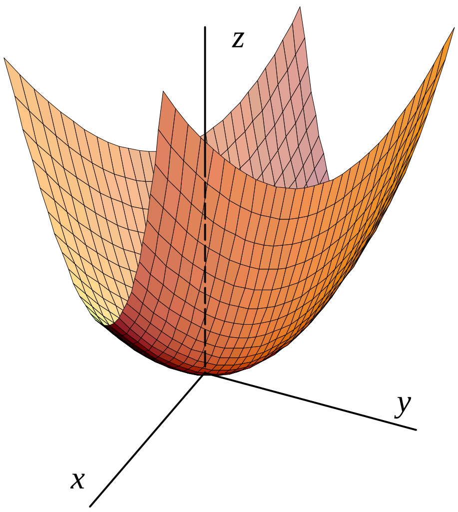
Las curvas que llamamos genéricamente *cónicas* reciben este nombre porque pueden obtenerse como intersecciones de planos con la superficie de un cono.

Paraboloide elíptico

Los paraboloides, tanto elíptico como hiperbólico, son superficies sin centro. En el primer caso, la expresión es

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z}$$

Su denominación proviene de que sus secciones paralelas al plano *xy* son elipses o circunferencias si *a*=*b*. En este último caso, se denomina *paraboloide de revolución*. La superficie sólo existe para $z \geq 0$ y presenta un vértice en (0,0,0). Las secciones paralelas a los planos *xz* e *yz* son parábolas.

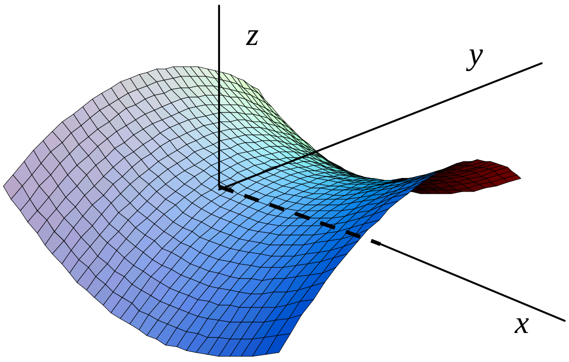


Paraboloide hiperbólico

Se describe mediante una ecuación de la forma

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z}$$

Las secciones con planos horizontales, $z = z_0 \neq 0$, son todas hipérbolas. Para *z*=0, la superficie se reduce al punto (0,0,0). Con $z = z_0 > 0$, las hipérbolas cortan al eje *x* y no al eje *y*, y presentan sus vértices en los puntos $(\pm a\sqrt{z_0}, 0, z_0)$.



En cambio, con planos $z = z_0 < 0$, las hipérbolas de intersección invierten su sentido y presentan sus vértices en los puntos $(0, \pm b\sqrt{|z_0|}, z_0)$. Las intersecciones según planos paralelos al *yz*, $x = x_0$ son parábolas con máximo mientras aquellas con planos paralelos al *xz*, $y = y_0$ son parábolas con mínimo.

Cilindro circular y elíptico

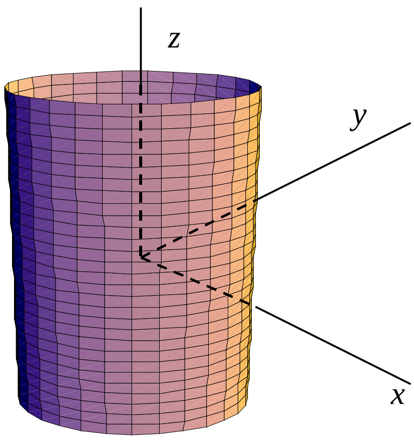
Una expresión de la forma

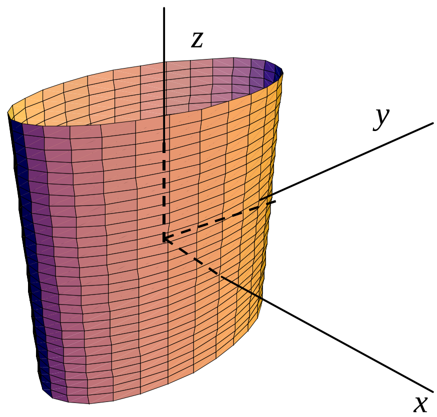
$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2,}$$

vista en el plano *xy*, representa una circunferencia de radio *r*. Vista en el espacio tridimensional, y dado que *z* no interviene en la ecuación, cualquier sección con planos horizontales, $z = z_0$, dará lugar a circunferencias del mismo radio. Por lo tanot, esta ecuación representa a un cilindro circular en $\mathbf{R}^3$.

En forma análoga, un cilindro elíptico viene dado por una expresión como

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$





Funciones de dos variables

Para definir una función de dos variables, consideremos en el plano *xy* una cierta región *D* y a cada par de valores $(x,y)\in D$ de variables independientes entre sí, hagámosle corresponder un valor de la variable dependiente *z* mediante una relación dada. Se dice que *z* es una función de dos variables independientes *x* e *y* definida en el dominio *D*, y se indica

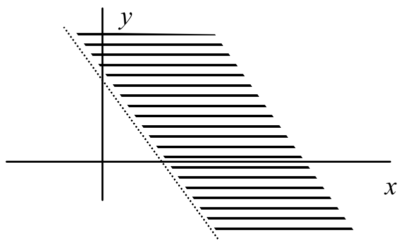
$f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R} \,/\, z = f(x,y)$

Analicemos el dominio de definición de algunos ejemplos de funciones de dos variables:

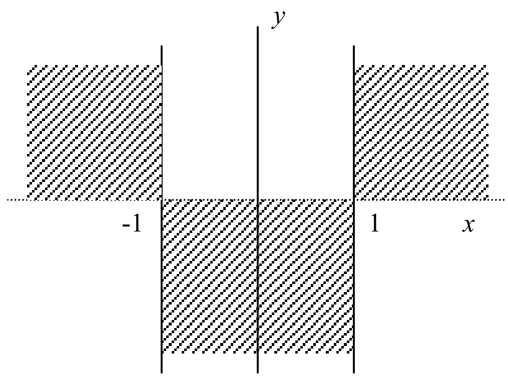
- $z = \dfrac{1}{(x^2-1)(y^2+2y)}$ Esta función existe en todos los pares (x,y) del plano $\mathbf{R}^2$ excepto

aquellos que anulan el denominador, es decir x=1, x=-1, y=0, y=-1/2. Luego
$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 / x \neq \pm 1, y \neq 0, y \neq -1/2\}$

- $z = \ln(2x + y - 1)$ está definida cuando el argumento del logaritmo es positivo, es decir, para $y>-2x+1$, que corresponde a la región sombreada



- $z = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{y}}$ está definida en aquellos puntos en que el denominador es no nulo y donde el radicando es positivo, es decir, $y \neq 0$ y $\dfrac{x^2-1}{y} \geq 0$. Si $y>0$, debe ser $x^2 - 1 \geq 0$, o sea $(x+1)(x-1) \geq 0$, que se cumple cuando $x \geq 1$ ó $x \leq -1$. Si $y<0$, debe ser $x^2 - 1 \leq 0$, o sea $x^2 \leq 1$, o bien $|x| \leq 1$ que se cumple cuando $-1 \leq x \leq 1$.

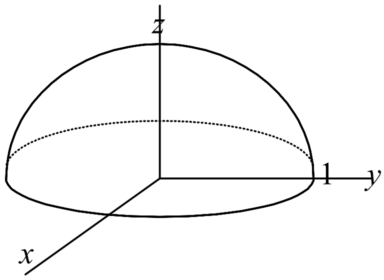


Representación gráfica de una función de dos variables

En cada punto del dominio *D*, que puede eventualmente ser todo el plano $\mathbf{R}^2$, levantamos una línea perpendicular al plano *xy*, y medimos sobre ésta un segmento *z* del valor de $f(x,y)$. Obtenemos así en $\mathbf{R}^3$ un punto $(x,y,z) = (x,y,f(x,y))$. El lugar geométrico de todos los puntos que satisfacen la condición anterior determina una superficie en $\mathbf{R}^3$ que es la gráfica de $f(x,y)$. La proyección de esta superficie sobre el plano *xy* es el dominio *D* de *f*.

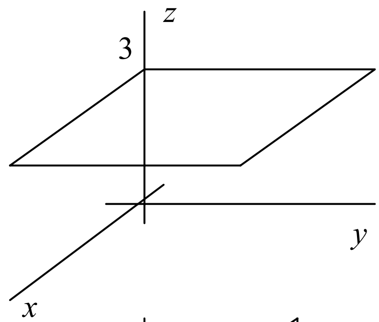
♣ Ejemplos:

▪ $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$



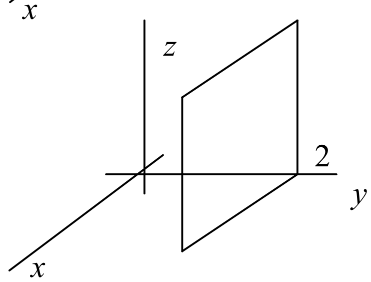
Dado que z toma sólo valores positivos, y dado que esta ecuación equivale a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, la función representa al casquete superior de una esfera de radio 1.

▪ z=3



El conjunto de los puntos de $\mathbf{R}^3$ para los cuales la coordenada z toma el valor 3, constituye un plano paralelo al plano coordenado xy, trazado a 3 unidades por encima de éste.

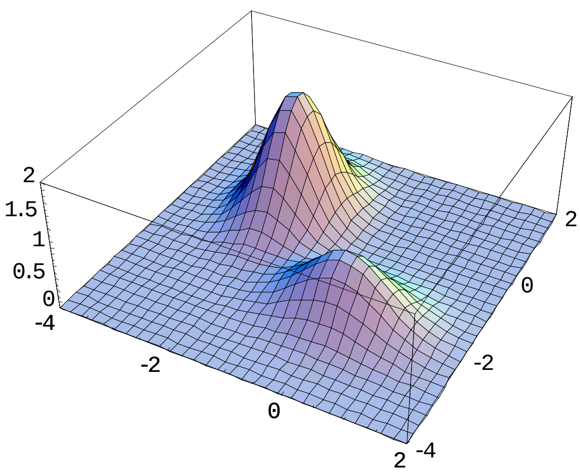
▪ y=2

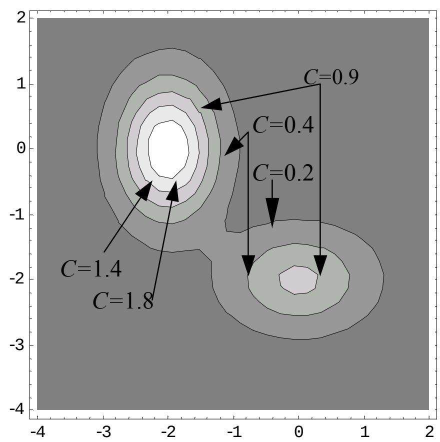


Análogamente, esta ecuación representa al plano paralelo al plano coordenado xz, que pasa por todos los puntos de $\mathbf{R}^3$ para los cuales la coordenada y toma el valor 2

Curvas de nivel

Consideremos una superficie de ecuación $z = f(x, y)$ y un plano paralelo al plano coordenado xy, de ecuación $z = c$. Al intersecarlos, se obtiene una curva plana cuya ecuación es $f(x, y) = c$. La misma operación repetida para distintos valores de c, deja trazado un conjunto de curvas planas sobre la superficie a distintas alturas que se denominan ***curvas de nivel***. Es habitual proyectar esas curvas sobre el plano xy, donde se obtiene un conjunto de curvas que convenientemente señaladas y con un poco de pericia, permiten tener una idea de la forma de la superficie en tres dimensiones. De este modo se presentan los planos de altitud de los terrenos.





En las figuras se muestran una superficie en $\mathbf{R}^3$ y sus correspondientes curvas de nivel en el plano *xy*. La superficie está dada por la ecuación $z = 2e^{-2(x+2)^2 - y^2} + e^{-x^2 - 2(y+2)^2}$ y su representación tridimensional está dada en la figura de la izquierda. La de la derecha, presenta las curvas de nivel para los valores de *c* que se señalan.

Derivada parcial

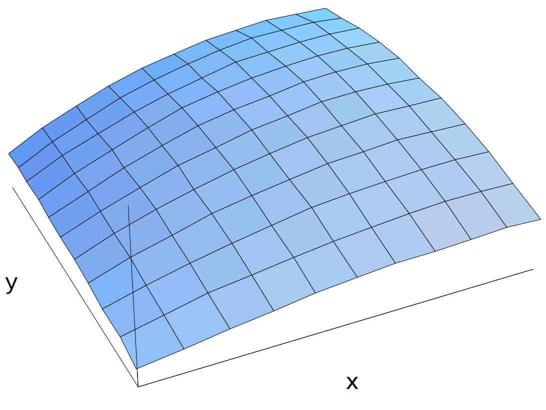
Conocemos las múltiples aplicaciones del concepto de derivada de las funciones de una variable. Nos permite conocer cuán rápido varía una función, determinar sus máximos y mínimos, etc. Sabemos que, para que una función de una variable real admita derivada, se deben cumplir ciertas condiciones, esto es, que la gráfica no se "corte" ni tenga "ángulos".

En forma similar, para que una función de dos variables reales se pueda derivar, su gráfica debe reunir condiciones parecidas. Intuitivamente, para que una función $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sea diferenciable, la superficie que la representa no debe estar "rota", ni debe tener "dobleces", ni "esquinas", ni "picos", es decir, debe poder trazarse el plano tangente en cualquier punto de la superficie.

Sin embargo, en lo que al concepto de derivada se refiere, hay una diferencia fundamental en comparación con las funciones de una variable, ya que una función de dos variables reales tiene en general diferentes tasas de crecimiento a partir de un punto dado, según en qué dirección lo analicemos.

Si a la superficie que representa a la función $z=f(x,y)$ la intersectamos con un plano $y=y_0$, queda determinada una curva sobre la superficie, cuya expresión es $z=f(x,y_o)$. Al fijar el valor de y en y_0, los valores de z sobre dicho plano dependen sólo de x. Análogamente, si la intersección se produce con un plano $x=x_0$, la curva que se determina sobre la superficie tiene una expresión de la forma $z=f(x_0,y)$.

Para fijar ideas, consideremos la función $z = f(x, y) = (-3x^2 + 6x + 1)(-2y^2 + 4y + 1)$, que se muestra en el gráfico, donde se han dibujado diversas curvas de intersección con planos x=constante e y=constante.



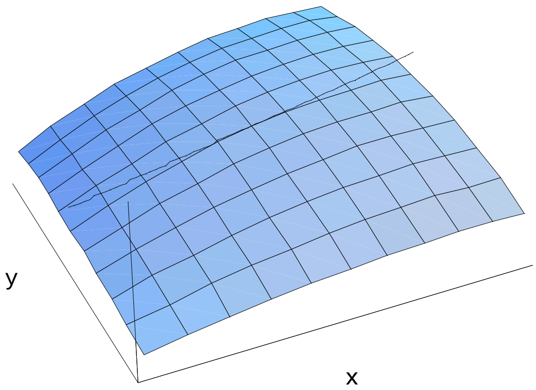
La superficie está trazada para valores de x e y que cumplen $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Esta región del dominio también puede indicarse mediante el producto cartesiano de los intervalos en la forma $[0,1] \times [0,1]$. Si elegimos como ejemplo el plano y=1/2, tenemos la función $z = f(x,1/2) = (-3x^2 + 6x + 1).5/2$ que, claramente, depende sólo de x. En otras palabras, al atravesar a la superficie con el plano y=1/2, veremos dibujada esta parábola. Si ahora elegimos como otro ejemplo el plano x=1, resulta $z = f(1, y) = 4(-2y^2 + 4y + 1)$ que también da lugar a una parábola pero sobre el plano x=1.

A la función de x que resulta al fijar el valor de y, podemos aplicarle lo que conocemos sobre la derivación de funciones de una variable. Si a partir del punto (x_o,y_o) aplicamos un incremento Δx, la variable z sufre también un incremento, que llamaremos parcial, e indicaremos $\Delta_x z$ y calcularemos como

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) .$$

Haciendo el cociente $\Delta_x z / \Delta x$ y tomando el límite para $\Delta x \to 0$, obtenemos la ***derivada parcial de f respecto de x en el punto*** (x_o,y_o), que se indica de varias maneras

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) = z'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$



Geométricamente, la derivada parcial es, como ya conocemos para las funciones de una variable, la pendiente de la recta tangente en el punto (x_0, y_0, z_0). En la figura se muestra la recta tangente a la superficie del ejemplo anterior trazada sobre el plano y=1/2, en el punto (1/2,1/2,f(1/2,1/2)). Para calcular su pendiente, hemos derivado respecto a x la función $z = f(x,1/2) = (-3x^2 + 6x + 1).5/2$ aplicando las reglas conocidas de derivación de una función de una variable independiente: $z'_x = (-6x + 6) \cdot 5/2$ que, para x=1/2 toma el valor 15/2.

Si hacemos lo mismo en cada punto del dominio, obtenemos la función ***derivada parcial respecto de x***

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x = z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

De manera similar se define ***la derivada parcial respecto de y en el punto*** (x_o,y_o). Al intersectar a la función $z=f(x,y)$ con un plano $x=x_o$, queda determinada una curva sobre la superficie, cuya expresión es $z=f(x_o,y)$. Esta función depende sólo de y. Si a partir del punto (x_o,y_o) aplicamos un incremento Δy, la variable z sufre un incremento parcial que indicamos $\Delta_y z$ y calculamos como

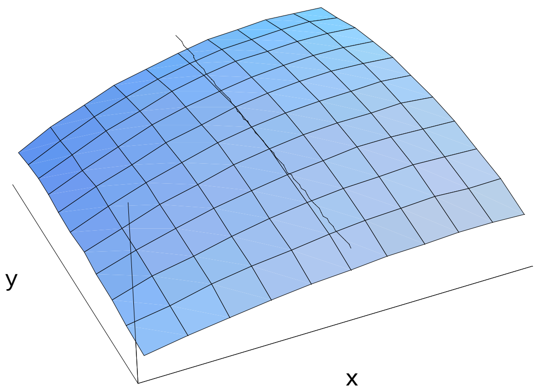
$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Al hacer el cociente $\Delta_y z / \Delta y$ y tomar el límite para $\Delta y \to 0$ se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = z'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} =$$
$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Haciendo lo mismo en cada punto del dominio, se obtiene la función ***derivada parcial respecto de y***

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y = z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$



En el gráfico se trazó, en el plano x=1/2, la recta tangente en el punto (1/2, 1/2,f(1/2,1/2)) obtenida a partir de la derivada parcial según y.

En general, para calcular la derivada parcial de una función cualquiera de dos variables respecto de x, debemos suponer que y se mantiene constante. Análogamente, para derivar parcialmente respecto de y, debemos considerar que es x la que se mantiene constante.

♣ Ejemplos:

- Calcular las derivadas parciales de $z = 2x^4 + 3x^3 y - 4xy^3 - 5y^4$ en el punto (1,-2).

Las funciones derivadas parciales son: $z'_x = 8x^3 + 9x^2 y - 4y^3$; $z'_y = 3x^3 - 12xy^2 - 20y^3$.

Calculadas en el punto (1,-2) dan: $z'_x(1,-2) = 8 + 9.(-2) - 4.(-8) = 22$;

$z'_y(1,-2) = 3 - 12.4 - 20.(-8) = 115$

- Calculemos las funciones derivadas parciales de $z = 3x^2 \ln y + \dfrac{e^x}{y} + x \operatorname{sen} y - y^3$.

$z'_x = 6 \ln y + \dfrac{e^x}{y} + \operatorname{sen} y$; $z'_y = \dfrac{3x^2}{y} - \dfrac{e^x}{y^2} + x \cos y - 3y^2$

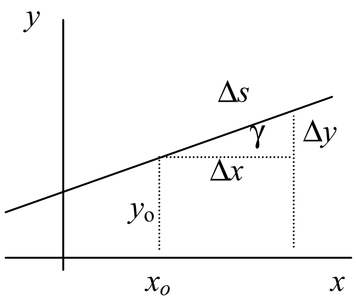
Derivada direccional

Así como calculamos las derivadas parciales según las direcciones x e y, también podemos derivar una dada función de dos variables según una dirección que forme un ángulo cualquiera con el eje x. Para esto, tracemos un plano vertical que pase por (x_o,y_o) y forme un ángulo γ con el eje x. La curva que queda trazada sobre la superficie muestra un crecimiento distinto según cuál sea la dirección considerada. Si, a partir de (x_o,y_o) producimos un incremento Δs en la dirección de γ, estaremos produciendo simultáneamente incrementos Δx y Δy. En la figura se muestra sólo el plano xy, sobreentendiéndose que el eje z está trazado apuntando hacia el lector y que la superficie está "flotando" sobre el papel.

$\Delta x = \Delta s \cdot \cos\gamma$ $\qquad \Delta y = \Delta s \cdot \operatorname{sen}\gamma$ $\qquad \Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ **(**1)

Al pasar de (x_0, y_0) a $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, la función se incrementa en

$\Delta_\gamma z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$



Hagamos el cociente incremental $\dfrac{\Delta_\gamma z}{\Delta s} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta s}$

$$= \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta s}$$

$$= \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta s}$$

$$= \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)}{\Delta x} \cdot \cos\gamma + \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \cdot \operatorname{sen}\gamma$$

Tomemos el límite para $\Delta s \to 0$. Para esto, en virtud de (1), debe ocurrir simultáneamente que $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$. Obtendremos así la ***derivada de f en la dirección de γ en el punto (x_o,y_o)***.

$$z'_\gamma = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta_\gamma z}{\Delta s}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0 y} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)}{\Delta x} \cdot \cos\gamma + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \cdot \sin\gamma$$

$$\boxed{z'_\gamma = f'_x(x_0, y_0) \cdot \cos\gamma + f'_y(x_0, y_0) \cdot \operatorname{sen}\gamma} \qquad (2)$$

♣ Ejemplo: Calcular la derivada de la función $z = x^2 \cos(xy)$ en el punto (1,π/2) según la dirección que forma un ángulo de 30° con el eje de las abscisas.

$z'_x = 2x\cos(xy) - x^2 y \operatorname{sen}(xy)$ $\qquad z'_y = -x^3 \operatorname{sen}(xy)$

$z'_x(1, \pi/2) = -\pi/2$ $\qquad z'_y(1, \pi/2) = 1$

$z'_{\pi/6} = (-\pi/2) \cdot \cos(\pi/6) + 1 \cdot \operatorname{sen}(\pi/6) = -\pi\sqrt{3}/4 + 1/2$

Gradiente

Definimos el gradiente de una función $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ en un punto (x_o,y_o) como aquél vector cuyas componentes son las derivadas parciales según x y según y de la función en dicho punto, y lo denotamos ∇f. Así,

$$\boxed{\nabla f(x_0, y_0) = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0))}$$

Subrayemos que el gradiente de una función de dos variables independientes es un vector de dos componentes, según x y según y.

♣ Ejemplo: Calcular el gradiente de la función $z = f(x, y) = x^2 + 4y^2$ en el punto (2,1).

Para situarnos en el problema, representamos la función en forma cualitativa: se trata de un paraboloide elíptico con vértice (0,0,0); la superficie sólo existe para valores positivos de z; las curvas de nivel son elipses cuyos semiejes aumentan a medida que ascendemos en z, pero de modo que el semieje según x es el doble de aquél según y. Calculamos $f(2,1) = 8$; el punto (2,1,8) se ubica sobre la curva de nivel z=8. Calculamos las derivadas parciales, $f'_x = 2x$, $f'_y = 8y$ y las evaluamos en (2,1): $f'_x(2,1) = 4$, $f'_y(2,1) = 8$. El gradiente en el punto considerado es $\nabla f(2,1) = (4,8) = 4\hat{\imath} + 8\hat{\jmath}$. Lo representamos sobre la superficie, marcando sobre la curva de nivel z=8 un vector horizontal a partir del punto (2,1,8). Insistimos en destacar que el vector gradiente se ubica sobre el plano paralelo al xy, ya que carece de componente z.

También podemos proyectar la curva de nivel mencionada sobre el plano xy, con lo que obtenemos una elipse de semiejes $2\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$ según x e y respectivamente, a la que pertence el punto (2,1). A partir de este punto trazamos el vector de componentes (4,8). Observemos que el vector gradiente resulta perpendicular a la elipse en dicho punto.

Volvamos a la derivada direccional. Si en la dirección γ trazamos un versor $\hat{e}_\gamma$ (vector de módulo 1), su componente según *x* es cos γ y su componente según *y* es sen γ, de modo que

$\hat{e}_\gamma = (\cos\gamma, \operatorname{sen}\gamma)$.

Vemos que la derivada direccional, definida en (2), puede escribirse como

$$z'_\gamma = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \hat{e}_\gamma \qquad (3)$$

Recordemos que el producto escalar de dos vectores se define como $A \cdot B = |A||B|\cos(\widehat{AB})$. Si tenemos un vector *A* fijo y un vector *B* de módulo dado, que puede girar alrededor del origen común de ambos vectores, entonces el producto escalar de ellos cambiará a medida que cambia el ángulo entre ambos. Dado que $-1 \le \cos(\widehat{AB}) \le 1$, el máximo valor del producto escalar se obtendrá cuando el ángulo sea 0, en cuyo caso vale $A \cdot B = |A||B|$. Apliquemos esta idea a la expresión (3) de la derivada direccional. El vector ∇f es fijo ya que sus componentes están dadas por la función y el punto elegido. Pensemos en la derivada direccional según distintas direcciones. Al variar γ, estamos haciendo rotar el versor $\hat{e}_\gamma$ alrededor de ∇f. El valor máximo del producto escalar, es decir, la máxima derivada direccional se obtendrá cuando $\hat{e}_\gamma$ tenga la misma dirección y sentido que ∇f. En este caso, la derivada direccional vale

$$z'_\gamma = |\nabla f(x_0, y_0)| \cdot |\hat{e}_\gamma| = |\nabla f(x_0, y_0)|$$

En otras palabras, ***el vector*** ∇f ***da la dirección de la máxima variación de la función*** o, en otras palabras, ***el vector*** ∇f ***es la máxima derivada direccional***.

Consideremos una superficie $z = f(x, y)$. En el punto (x_0, y_0) la función toma el valor $z_0 = f(x_0, y_0)$. Supongamos ahora que nos encontramos en el punto de $\mathbf{R}^3$ $(x_0, y_0, z_0) = = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Si queremos movernos en la dirección en que la función crece más rápido, tendremos que hacerlo en la dirección de $\nabla f(x_0, y_0)$ y si queremos movernos en la dirección en que *f* decrece más rápido, deberemos seguir $-\nabla f(x_0, y_0)$. Recordemos que las curvas de nivel se trazan para valores de *z* constantes. Esto significa que sobre una curva de nivel la función no varía. Necesariamente, el gradiente debe resultar perpendicular a la curva de nivel que pasa por el punto en cuestión. Esto puede demostrarse con rigor, considerando que una curva de nivel está dada por una expresión de la forma $f(x, y) = c$, de la que puede, en principio despejarse *y* en función de *x*. Obviando este paso y derivando la última como función implícita, obtenemos

$$f'_x + f'_y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{de donde} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}.$$

Es decir, la curva de nivel tiene en el punto (x_0, y_0) pendiente $-f'_x / f'_y$. Por otra parte, el vector $\nabla f = (f'_x, f'_y)$ forma con el eje *x* un ángulo cuya tangente es f'_y / f'_x. Vemos que el producto de ambas pendientes es -1, de modo que ***la curva de nivel y el gradiente en un punto dado son perpendiculares.***

Plano tangente y recta normal a una superficie en un punto

Dada una función $z = f(x, y)$, que supondremos que describe una superficie "suficientemente suave", queremos trazar en el punto $(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ el plano tangente, es decir el plano que "se apoya sobre la superficie" en ese punto de $\mathbf{R}^3$.

El plano responde a una ecuación general de la forma

$$ax + by + cz = d \quad \text{o bien,} \quad z = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y + \frac{d}{c} \tag{4}$$

Para que el plano tome en el punto (x_0, y_0) el mismo valor z_o que toma la función, esto es $z_0 = f(x_0, y_0)$, es necesario que $z_0 = -\frac{a}{c}x_0 - \frac{b}{c}y_0 + \frac{d}{c}$, es decir $\frac{d}{c} = z_0 + \frac{a}{c}x_0 + \frac{b}{c}y_0$.

Reemplazando en (4), tenemos

$$z = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y + z_0 + \frac{a}{c}x_0 + \frac{b}{c}y_0 = z_0 - \frac{a}{c}(x - x_0) - \frac{b}{c}(y - y_0) \tag{5}$$

Pero además, para que el plano resulte tangente, las derivadas parciales según x y según y evaluadas en la función y en el plano deben coincidir, de modo que

$$z'_x = -\frac{a}{c} = f'_x(x_0, y_0) \qquad z'_y = -\frac{b}{c} = f'_y(x_0, y_0).$$

Reemplazando en (5), tenemos

$$\boxed{z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)\cdot(y - y_0)} \tag{6}$$

que da la expresión del plano tangente en el punto requerido. Al reordenar los términos se obtiene una expresión de la forma

$$f'_x(x_0, y_0)\cdot x + f'_y(x_0, y_0)\cdot y - z = K$$

donde en la constante K se han reunido todos los términos constantes. De esta expresión surge fácilmente cuáles son las componentes del vector normal a la superficie en el punto dado.

$$N = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1)$$

Busquemos ahora la ecuación de la recta normal a la superficie en el mismo punto. Su vector dirección puede tomarse idéntico a N (o bien, proporcional a él). La recta debe pasar además por $(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, de modo que su ecuación tiene la forma $(x, y, z) = t \cdot N + (x_0, y_0, z_0)$

♣ Ejemplo: Encontrar la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie de ecuación $z = f(x, y) = x^2 \operatorname{sen} y + y^2 \cos x$ en el punto (π,π/2).

Calculamos el valor de la función en el punto: $z_0 = f(\pi, \pi/2) = -\pi^2/4$. Calculamos las funciones derivadas parciales: $f'_x = 2x \operatorname{sen} y - y^2 \operatorname{sen} x$, $f'_y = x^2 \cos y + 2y \cos x$, y las evaluamos en el punto: $f'_x(\pi, \pi/2) = 2\pi$, $f'_y(\pi, \pi/2) = -\pi$,. El plano tangente es $z - \pi^2/4 = 2\pi(x - \pi) - \pi(y - \pi/2)$ o reordenando, $2\pi x - \pi y - z = 9\pi^2/4$. El vector normal es $N = (2\pi, -\pi, -1)$ y la recta normal es $(x, y, z) = t \cdot (2\pi, -\pi, -1) + (\pi, \pi/2, -\pi^2/4)$

Diferencial

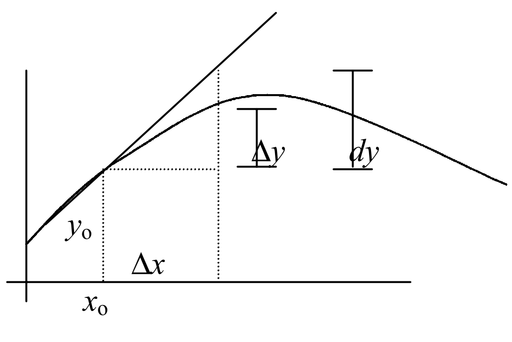
En la expresión (6) reemplacemos $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ y $\Delta z = z - z_0$

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y \qquad (7)$$

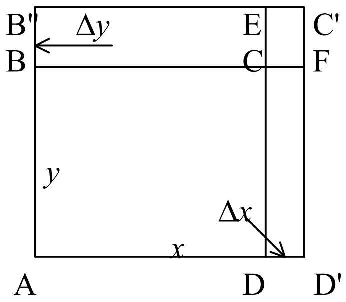
Δz representa el incremento de la variable *z*, **medido sobre el plano tangente**, cuando las variables *x* e *y* se incrementan en Δx y Δy. Destacamos que Δz no coincide con el incremento de la función frente a los mismos incrementos de las variables independientes, que es igual a

$$\Delta f = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Esto es similar a lo que sucede con las funciones de una variable independiente, para las que el diferencial representa el incremento medido sobre la recta tangente. Nótese que Δy y *dy* tienden ambas a 0 cuando $\Delta x \to 0$, pero la diferencia entre *dy* y Δy tiende a cero más rápido que ambas.



Consideremos como ejemplo una función de dos variables y comparemos ambos incrementos. Sea la función *z=x.y*, que representa el área de un rectángulo ABCD, de lados *x* e *y*. Sus derivadas parciales son $z'_x = y$ y $z'_y = x$. Al incrementar *x* e *y*, el área es la del rectángulo AB'C'D' de modo que el incremento de la función está representado por la franja BB'C'D'DCB.



Por otra parte, el incremento dado por la expresión (7) es $y \cdot \Delta x + x \cdot \Delta y$, representado geométricamente por la suma de las áreas de los dos rectángulos BB'EC y C'FD'D. La diferencia entre los dos incrementos de z está dada por el área $\Delta x.\Delta y$ del rectángulo CEC'F, de lados Δx y Δy, que es más pequeña que las áreas laterales. Decimos que (7) representa la parte principal del incremento de la función.

Si los incrementos Δx y Δy a partir del punto (x_0, y_0) son pequeños, (7) resulta una buena aproximación al incremento de la función. Si la función es continua, el incremento Δz también resulta pequeño. En tal caso, todos los incrementos pueden ser reemplazados por diferenciales, de modo que

$$dz = f_x'(x_0, y_0) \cdot dx + f_y'(x_0, y_0) \cdot dy \,.$$

Extendiendo esta expresión a todos los puntos del dominio, obtenemos el ***diferencial de la función de dos variables***

$$\boxed{dz = f_x' \cdot dx + f_y' \cdot dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy}$$

Cuando se requiere calcular el incremento de una función frente al incremento de sus variables independientes, esta expresión resulta con frecuencia más sencilla que el cálculo directo de la función con los nuevos valores de las variables, y representa una buena aproximación ya que la diferencia es un término de menor orden (del orden del producto $\Delta x.\Delta y$).

Cálculo de errores

Esta última expresión se emplea habitualmente para calcular el error Δz que se comete al determinar una magnitud, z, a partir de la medición de otras, x e y, que están afectadas de errores experimentales, Δx y Δy. Dado que la determinación del error se realiza mediante una expresión en la que se suman dos términos, podría ocurrir que los signos y valores absolutos conduzcan a un valor muy pequeño y aun nulo. Esto no es representativo de la realidad. Cuando obtenemos un resultado experimental, debemos darlo acompañado de una franja de error que abarque todos los casos posibles, es decir, debemos colocarnos en la situación más desfavorable y dar la cota de error más pesimista. Por esto, se emplea la expresión (7) con una modificación que tiene en cuenta esta idea.

$$|\Delta z| = \left| f_x'(x_0, y_0) \right| \cdot |\Delta x| + \left| f_y'(x_0, y_0) \right| \cdot |\Delta y|$$

La última expresión permita calcular el **error absoluto** en la determinación de z. Con frecuencia resulta de mayor utilidad conocer el **error relativo**, pues da una idea clara de la importancia del error cometido en relación con el valor de la magnitud evaluada. El error relativo se calcula a partir de

$$\varepsilon = \left|\frac{\Delta z}{z}\right|$$

Es habitual encontrar el error expresado como un porcentaje. El **error porcentual** se obtiene multiplicando por 100 al error relativo.

♣ Ejemplo: Determinar el valor de la aceleración de la gravedad midiendo el período de un péndulo y sabiendo que para oscilaciones de pequeña amplitud vale la relación $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, donde T es el período, L es la longitud del péndulo y g es la aceleración de la gravedad del lugar.

De la expresión para T obtenemos $g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}$, cuyo diferencial es $dg = \frac{4\pi^2}{T^2}dL - \frac{4\pi^2 \cdot 2L}{T^3}dT$. Para calcular el error absoluto en la determinación de g usamos $\Delta g = \left|\frac{4\pi^2}{T^2}\right||\Delta L| + \left|-\frac{4\pi^2 \cdot 2L}{T^3}\right||\Delta T|$. Para simplificar los cálculos resulta conveniente evaluar antes el error relativo: $\Delta g/g$

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{|\Delta L|}{L} + \frac{2|\Delta T|}{T}$$

Se ha medido un período de (6.021±0.001) *s* en un péndulo de 9 *m* de longitud medido con una regla que aprecia el milímetro. ¿Cuál es el error que se comete en la determinación de g?
En primer lugar, evaluamos g pero de este valor no sabemos en principio cuántas cifras decimales tiene sentido conservar. Obtenemos g=9.80088 m/s^2. Ahora evaluamos el error relativo: $\frac{\Delta g}{g} = \frac{0.001}{9} + \frac{2 \cdot 0.001}{6.021} \cong 0.00011 + 0.00033 = 0.00044$. Luego, el error absoluto es $\Delta g = \frac{\Delta g}{g} \cdot g$, $\Delta g = 0.00044 \cdot 9.80088 \cong 0.004$. El valor de g no puede contener cifras decimales más allá de la tercera pues ésta ya está afectada de error. Por esto, redondeamos el resultado anterior, dejando sólo tres cifras decimales: g=(9.801±0.004) m/s^2. Esto equivale a decir que el valor de g obtenido está en la franja comprendida entre 9.805 y 9.797. En resumen, el error absoluto es 0.004, el error relativo es 0.00044 y el error porcentual es 0.044%.

La comparación entre los términos que conducen a la determinación del error relativo nos indica cuál de las magnitudes medidas es la que más contribuye al error final. Esto es de gran importancia en los trabajos experimentales pues revela qué medida se debe refinar si se pretende mejorar la calidad (disminuir el error) del resultado.

Integración de funciones de dos variables

Cuando estudiamos la integración de las funciones de una variable independiente, aprendimos que la integral definida de una función continua $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ representa el área encerrada entre la gráfica de la función y el eje x, limitada por las líneas verticales $x=a$ y $x=b$.

Para llegar a esta conclusión, consideramos al intervalo $[a,b]$ dividido en n subintervalos $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, con $a=x_0$ y $b=x_n$. En la figura 1 se han señalado rectángulos de área $f(x_i)\cdot\Delta x_i$ para $i=1,...,n$. La suma de estas áreas, $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$, da el área bajo la poligonal escalonada.

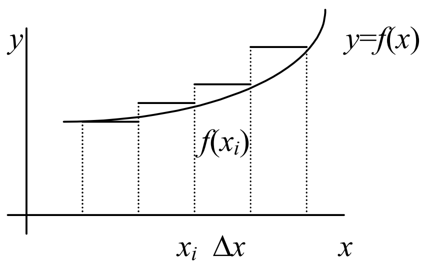


Figura 1

Si el número n de puntos x_i se hace tender a infinito y simultáneamente la longitud de todos los intervalos Δx_i se hace tender a cero, la poligonal tiende a parecerse a la gráfica de la función, y el área debajo de ella, a la encerrada entre la curva y el eje de las x, entre $x=a$ y $x=b$.

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

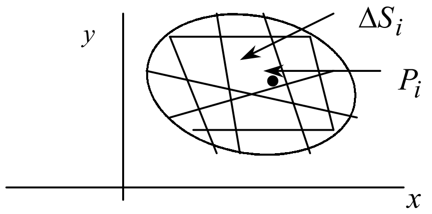


Figura 2

Veamos ahora cómo este concepto se extiende a las funciones continuas de dos variables. Consideremos una región del plano *xy*, que llamaremos *dominio D*, limitada por una curva cerrada. Dividamos el dominio en *n* partes arbitrarias en forma y tamaño, de áreas $\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n$, como en la figura 2, que se denominan *elementos de área*. En cada elemento ΔS_i elijamos un punto P_i.Sea $z = f(x, y)$ una función continua definida en ese dominio. Supongamos que $f(x, y) \geq 0 \ \forall \ (x, y) \in D$. Al calcular *f* en cada punto P_i tendremos *n* valores de la función: $f(P_1), f(P_2), \cdots f(P_n)$. Consideremos cada uno de los prismas de base ΔS_i y altura $f(P_i)$, como el que se señala en la figura 3; el prisma se apoya sobre el plano *xy* y sus aristas son paralelas al eje z. La figura muestra también los "techos" de otros prismas vecinos para dar una idea de la superficie escalonada que se forma cuando el procedimiento se repite en todos los elementos de área. Esa superficie escalonada, naturalmente, no coincide con la superficie $z = f(x, y)$, pero la "acompaña".

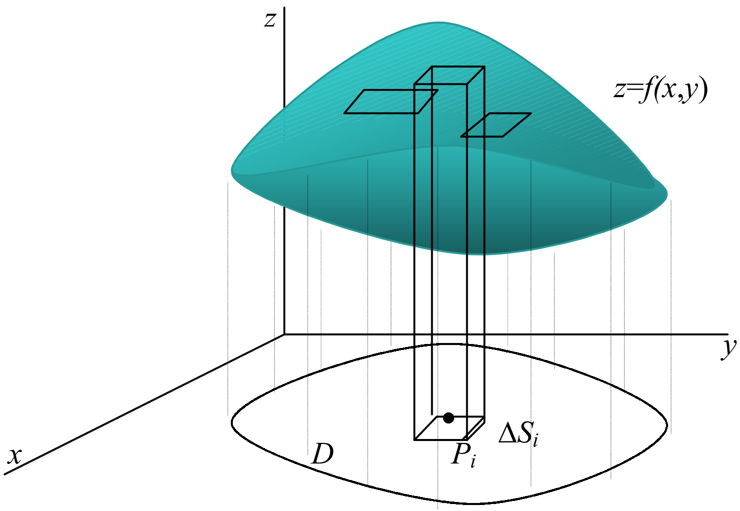
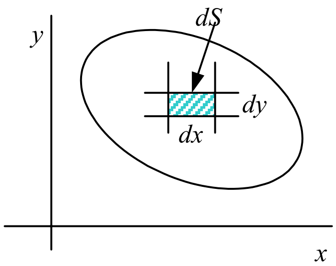


Figura 3

El producto $\Delta S_i \cdot f(P_i)$ mide el volumen de cada prisma. La suma $f(P_1) \cdot \Delta S_1 + f(P_2) \cdot \Delta S_2 + \cdots f(P_n) \cdot \Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta S_i$ da el volumen del cuerpo limitado por arriba, por la superficie escalonada y por debajo, por el dominio *D*. Si ahora aumentamos el número de subdivisiones de *D* haciendo simultáneamente que $n \to \infty$ y que todas las áreas elementales tiendan a cero, veremos que la superficie escalonada se aproxima más y más a la superficie $z = f(x, y)$. Ese límite se llama *integral doble de* $z = f(x, y)$ y representa al volumen encerrado entre la superficie *f* y el plano *xy*, limitado por el contorno *D*. Se indica

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dS = V}$$

El valor del límite es independiente del modo en que hacemos las subdivisiones de *D*. Si empleamos coordenadas cartesianas, el *diferencial de área*, *dS*, está dado por



$$dS = dx \cdot dy$$

de manera que la integral doble queda expresada como

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = V}$$

Se puede demostrar que la integral doble tiene, como la integral simple, la propiedad de linealidad, es decir, se cumple que:

$$\iint_D [af_1(x,y) + bf_2(x,y)]dS = a\iint_D f_1(x,y)dS + b\iint_D f_2(x,y)dS$$

También aceptaremos sin demostración que si el dominio *D* se divide en dos regiones D_1 y D_2 elegidas de manera que entre las dos completan el dominio *D* sin dejar zonas vacías y sin superponerse, esto es, tales que $D_1 \cup D_2 = D$ y $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, entonces la integral doble puede descomponerse en la forma:

$$\iint_D f(x,y)dS = \iint_{D_1} f(x,y)dS + \iint_{D_2} f(x,y)dS$$

Lo dicho hasta aquí no nos proporciona aún un método para calcular una integral doble. Pasemos a una descripción un poco diferente que nos permitirá convertir a la integral doble en dos integrales simples que resolveremos una a continuación de la otra.

Cálculo de la integral doble mediante integrales iteradas

Consideremos una función continua $z = f(x,y)$ definida en un dominio rectangular *D*, con lados paralelos a los ejes coordenados *x* e *y*, que indicamos $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ o bien, como producto cartesiano de los intervalos: $D = [a,b] \times [c,d]$ y veamos cómo calcular $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

Supongamos que $f(x,y) \geq 0$ en D y consideremos la región sólida debajo de la gráfica de la superficie $z = f(x,y)$.

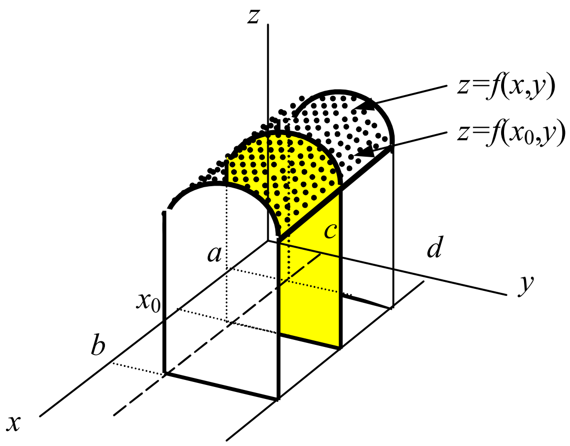


Figura 4

Para fijar ideas, consideremos la superficie que se indica moteada en la figura 4. Tracemos un plano $x = x_0$, con $x_0 \in [a,b]$, que en la figura 4 se marca en amarillo. La intersección de este plano con la superficie determina una curva dada por una función de la variable y solamente, $z = f(x_0, y)$, continua en el intervalo $[c,d]$. El área de la sección del plano $x = x_0$ entre la curva $z = f(x_0, y)$ y el plano xy dependerá de cuál sea el valor de x_0 elegido, pero cualquiera que él sea, se trata de un problema conocido de determinación del área debajo de una curva plana de una sola variable. Su valor vendrá dado por

$$S(x_0) = \int_c^d f(x_0, y)dy \qquad (1)$$

Consideremos ahora al intervalo $[a,b]$ partido en n subintervalos limitados por los puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, es decir, los subintervalos son $\Delta x_1 = x_1 - x_0$; $\Delta x_2 = x_2 - x_1$; ...; $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$. Tracemos planos paralelos al plano coordenado yz por cada uno de esos puntos de división: $x = x_0 = a$; $x = x_1$; ...; $x = x_n = b$. Al cortar a la superficie, cada plano determina una curva, que en la figura 5 se marcan con líneas azules y cuya expresión es $z = f(x_i, y)$, con i=1,...,n. En cada una de esas intersecciones podemos efectuar la operación indicada en (1) y obtener las áreas

$$S(x_i) = \int_c^d f(x_i, y)dy \qquad (2)$$

Si tomamos cada una de las curvas planas $f(x_i, y)$, comenzando en x=b, y las desplazamos hacia atrás en una distancia Δx_i, efectuando un movimiento paralelo al plano xy, generaremos en cada tramo una nueva superficie con forma de cinta de ancho Δx_i, cuyos contornos se indican con líneas anaranjadas en la figura 5. El conjunto de todas esas cintas forma una nueva superficie escalonada que acompaña a $f(x,y)$ y coincide con ella sólo sobre las curvas $f(x_i, y)$.

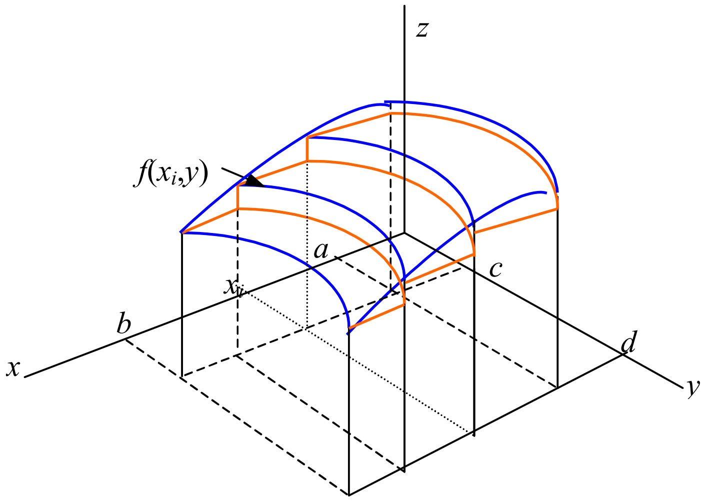


Figura 5

Entre cada cinta y el plano *xy* queda delimitada una lámina que tiene dos caras paralelas de igual área $S(x_i)$ y espesor Δx_i; por lo tanto, su volumen es $S(x_i)\Delta x_i$. Si ahora sumamos los volúmenes de todas las láminas, tenemos el volumen debajo de la superficie escalonada.

$$\sum_{i=1}^{n} S(x_i)\Delta x_i$$

Este volumen no tiene el mismo valor que el encerrado entre la superficie $f(x,y)$ y el plano *xy*, pero se parecerá a él tanto más cuanto más pequeños sean los intervalos Δx_i y mayor sea el número de ellos, *n*. Lo que estamos haciendo no es otra cosa que integrar la función $S(x)$ en el intervalo [*a*,*b*] y esta integral nos da el volumen debajo de la superficie $f(x,y)$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} S(x_i)\Delta x_i = \int_a^b S(x)dx = V \qquad (3)$$

Pero ahora recordemos que habíamos definido $S(x_i)$ mediante la ecuación (2), para cada valor particular de $x = x_i$. Para un valor cualquiera de *x* en el intervalo [*a*,*b*], la función $S(x)$ se define como

$$S(x)=\int_c^d f(x,y)dy \qquad (4)$$

Insertando (4) en (3), llegamos a una expresión que da por resultado el volumen que estamos buscando y es equivalente a la integral doble que definimos más arriba:

$$\boxed{\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=V} \qquad (5)$$

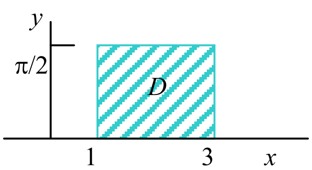
Esta expresión se conoce como ***integral iterada*** y permite resolver, tal como anunciamos al final de la sección anterior, una integración por vez. Es muy importante tener presente que la integral que figura entre paréntesis proviene de la ecuación (2), donde el área se calculaba para un valor constante de *x*. Por lo tanto, cuando tengamos que resolver una integral iterada, calcularemos primero la integral en la variable *y* entre *c* y *d* **considerando que *x* se mantiene constante** (de manera similar a lo que hacemos cuando calculamos derivadas parciales). Una vez hallada la primitiva en la variable *y*, y luego de reemplazarla por sus valores en los extremos de integración, obtendremos una función que depende sólo de *x*, que no es otra cosa que $S(x)$. Lo que sigue es reemplazar este resultado en la integral en *x*, que ha quedado reducida a una integración ya conocida de una función de una sola variable.

Todo el cálculo de la integral iterada podría haber comenzado trazando cortes con planos *y*=constante, definiendo superficies $S(y_i)$ y sumando luego los volúmenes $S(y_i)\Delta y_i$. El paso al límite nos llevaría a otra expresión equivalente de la integral iterada:

$$\boxed{\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy=V} \qquad (6)$$

Obsérvese la correspondencia entre los límites de integración y la variable en la que se efectúa la integración. En la expresión (6), la integral entre paréntesis es en *x*, lo que queda en evidencia porque aparece *dx* y sus límites de integración son *a* y *b*, que son los extremos de variación de *x*. La integral que va por fuera contiene *dy* y sus límites de integración son *c* y *d*, que son los extremos de variación de *y*. Algo similar puede decirse de la expresión (5), donde los pasos se realizan en el orden contrario pero se mantiene la misma correspondencia.

♣ Ejemplo: Calcular la integral doble de $f(x,y)=3x^2y-\frac{\text{sen}\, y}{x}$ en el dominio definido por $[1,3]\times[0,\pi/2]$.



El dominio puede ser expresado en forma equivalente como $1\le x\le 3$; $0\le y\le \pi/2$ y es el rectángulo que se ve en el esquema.

Empleando la expresión (6) de la integral iterada, calculamos primero la integral entre paréntesis:

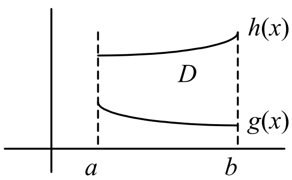
$\int_1^3 (3x^2 y - \frac{\text{sen } y}{x})dx$. Para el cálculo de esta integral hay que tener presente que y debe ser considerada como una constante. La integración en x nos da $\left. x^3 y - \text{sen } y \ln x \right|_{x=1}^{x=3} =$ $= (27y - \ln 3 \text{ sen } y) - (y - 0) = 26y - \ln 3 \text{ sen } y$. Pasamos ahora a la integración en y, reemplazando el resultado que acabamos de obtener: $\int_0^{\pi/2} (26y - \ln 3 \text{sen } y)dy =$

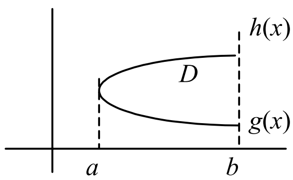
$$= 13y^2 - \ln 3 \cos y \Big|_0^{\pi/2} = (\frac{13\pi^2}{4} - 0) - (0 - \ln 3) = \frac{13\pi^2}{4} + \ln 3 .$$

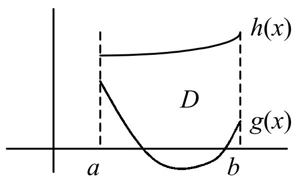
Si los extremos de integración son constantes, esto es, si el dominio de integración es un rectángulo con sus lados paralelos a los ejes coordenados x e y, el orden en que efectuemos la iteración de las integrales es indistinto. Por el contrario, si el dominio tiene contornos que dependen de las variables x ó y, se debe observar cuidadosamente en qué orden se efectúa la iteración.

Integrales sobre regiones generales

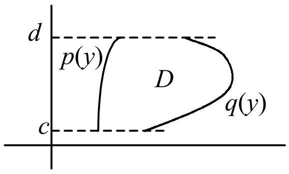
Clasificamos los dominios según sus formas, en tres tipos diferentes. Llamamos de **tipo 1** a aquellos que se expresan en la forma $a \le x \le b$; $g(x) \le y \le h(x)$. Los esquemas siguientes cubren todas las posibilidades:

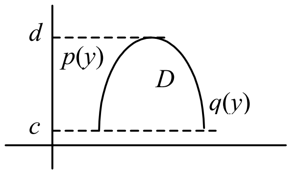


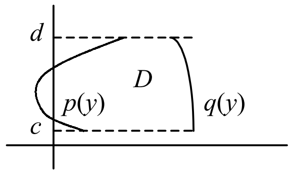




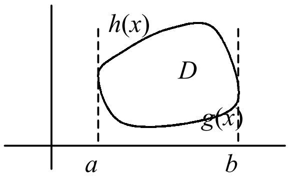
Suele denominarse de **tipo 2** a aquellos dominios que se expresan en la forma $p(y) \le x \le q(y)$; $c \le y \le d$ que se ven en los esquemas a continuación:

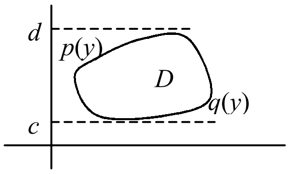






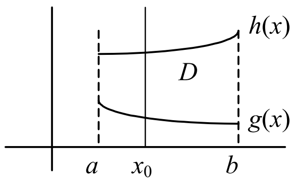
Por último, las regiones de **tipo 3** están delimitadas por curvas cerradas que deben fragmentarse adecuadamente, empleando sus puntos extremos, para convertirlas en tipo 1 ó 2, como se ve en los esquemas.





Queda claro que en todos estos esquemas se representa sólo el dominio de integración en el plano *xy*. El eje *z* apunta saliendo de la hoja y la función $z = f(x, y)$, supuesta no negativa, se encuentra por encima del plano *xy*.

Para integrar una función dada en un dominio del tipo 1, y repasando el camino que nos llevó a la integral iterada, debemos considerar primero que efectuamos cortes a *x* constante, que atraviesan a las funciones *g* y *h*. Para fijar ideas, hagamos un corte $x = x_0$, con $a \le x_0 \le b$, que en tres dimensiones corresponde a un plano paralelo al *yz* que atraviesa a la superficie, y sobre el plano *xy* da lugar a una recta paralela al eje *y*, señalada en el esquema.



Esta recta corta a las funciones que limitan al dominio en los puntos $(x_0, g(x_0))$ y $(x_0, h(x_0))$, de modo que para este valor de *x*, la variable *y* recorrerá el intervalo $g(x_0) \le y \le h(x_0)$. El área plana $S(x_0)$ encerrada por la función $z = f(x_0, y)$ y el plano *xy*, se obtendrá como resultado de la integral $S(x_0) = \int_{g(x_0)}^{h(x_0)} f(x_0, y)dy$. Al variar x_0 entre *a* y *b*, los límites de integración variarán, moviéndose a lo largo de las curvas $g(x)$ y $h(x)$. La integral iterada se calcula entonces como:

$$\boxed{\int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)dy \right) dx}$$

Obsérvese que al resolver la integral dentro del paréntesis, debemos considerar que *x* se mantiene constante, evaluar la primitiva en *y*, aplicar la regla de Barrow y reemplazar *y* por las expresiones de *g* y *h*. Hecho esto, se obtendrá una expresión que dependerá sólo de la variable *x*, con lo cual es paso siguiente será una integración ordinaria en esta variable, con extremos de integración constante.

Si el dominio es del tipo 2, el razonamiento es similar, con los roles de *x* e *y* intercambiados respecto del caso anterior. La integral iterada resulta de

$$\boxed{\int_c^d \left(\int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)dx \right) dy}$$

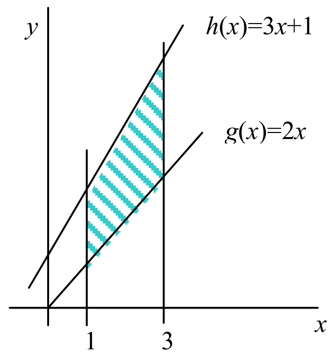
Como regla general, si el dominio no es rectangular, se debe integrar primero empleando los límites dados por funciones y terminar integrando con los límites constantes. Recordemos que la integral de una función de dos variables representa un volumen, de modo que el resultado final debe ser un número, no una función.

Si el dominio es del tipo 3, donde la frontera es una curva cerrada, se podrá elegir reducirla al tipo 1 o al tipo 2, en forma indistinta, según surge de los esquemas anteriores. La integral iterada adoptará cualquiera de las dos formas que acaban de darse; ambas conducirán al mismo resultado.

♣ Ejemplo: Trazar la región *D* determinada por los límites de integración y evaluar la integral en el caso siguiente: $\int_1^3 \left(\int_{2x}^{3x+1} 3xy^2 dy \right) dx$.

Las funciones de *x* que figuran dentro del paréntesis en los extremos de integración, $g(x) = 2x$ y $h(x) = 3x + 1$, representan los límites de variación de *y*. Los de la integral que va por afuera, son *x*=1 y *x*=3. La región de integración es la que se muestra en el esquema y es del tipo 1.

El cálculo comienza evaluando $\int_{2x}^{3x+1} 2xydy =$



$$= xy^2 \Big|_{y=2x}^{y=3x+1} = x(3x+1)^2 - x(2x)^2 =$$

$$= x[9x^2 + 6x + 1 - 4x^2] = 5x^3 + 6x^2 + x$$

Esta función de *x* solamente debe introducirse en la otra integral:

$$\int_1^3 (5x^3 + 6x^2 + x)dx = \frac{5}{4}x^4 + 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 \Big|_1^3 =$$

$$(\frac{5}{4}.81 + 2.27 + \frac{1}{2}.9) - (\frac{5}{4} + 2 + \frac{1}{2}) = 131$$

Si con los mismos límites planteamos $\int_1^2 \left(\int_{2x}^{3x+1} dy \right) dx$, tenemos como integrando la función $f(x,y) = 1$. El resultado dará el volumen de un cuerpo de altura 1 que tiene como base el dominio ya mostrado. Este volumen, por lo tanto, coincide numéricamente con el valor del área de la región sombreada. El cálculo es: $\int_{2x}^{3x+1} dy = y\Big|_{y=2x}^{y=3x+1} = (3x+1)-2x = x+1$ y luego $\int_1^3 (x+1)dx = \frac{1}{2}x^2 + x\Big|_1^3 = (\frac{9}{2}+3)-(\frac{1}{2}+1) = 6$. Naturalmente, el cálculo de áreas planas puede hacerse con los métodos ya conocidos para funciones de una variable: $\int_1^3 [(3x+1)-2x]dx$, de donde se obtiene, naturalmente, el mismo resultado.

♣ Ejemplo: Calculemos el volumen debajo de la superficie $z = x + y + 2$ en el dominio $x^2 + y^2 = 2$. El dominio es una circunferencia de radio $\sqrt{2}$, de modo que se trata de una región de tipo 3. Podemos transformarla en una de tipo 1 descomponiendo el contorno en las funciones $g(x) = -\sqrt{2-x^2}$, que representa a la mitad inferior de la circunferencia, y $h(x) = +\sqrt{2-x^2}$, que representa a la parte superior. En este caso la integral iterada se plantea como:

$$\int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{+\sqrt{2-x^2}} (x+y+2)dy \right) dx$$

También podemos llevarla a la forma de una región de tipo 2, definiendo $p(y) = -\sqrt{2-y^2}$, que representa a la mitad izquierda de la circunferencia, y $q(y) = +\sqrt{2-y^2}$, que representa a su mitad derecha, e integrando como:

$$\int_c^d \left(\int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)dx \right) dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{+\sqrt{2-y^2}} (x+y+2)dx \right) dy$$

En ambos casos, para el segundo paso de integración, se obtienen funciones que requieren sustituciones bastante complicadas para poder resolver la integral. Esto es así por la geometría rectangular asociada a las coordenadas cartesianas *x* e *y*, en contraste con la forma circular del dominio. En casos como estos, resulta más conveniente utilizar las coordenadas polares.

Cálculo de integrales dobles en coordenadas polares

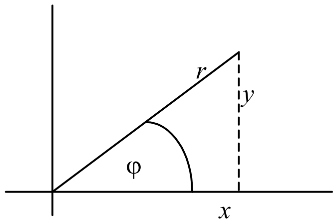
Recordemos que estas coordenadas nos dan la posición de un punto en el plano mediante su distancia al origen, *r*, y el ángulo, φ, respecto del eje *x*.

Las coordenadas polares y las cartesianas están relacionadas mediante

$x = r\cos\varphi$, $y = r\,\text{sen}\,\varphi$

de las que se desprende que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Para emplear las coordenadas polares para resolver una integral de una función de dos variables, es necesario realizar las siguientes modificaciones:

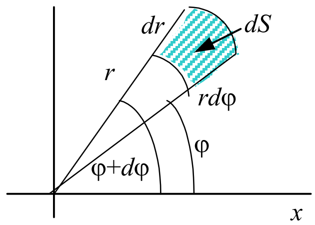


1. Escribir la función, inicialmente expresada como $f(x, y)$, en términos de las coordenadas polares, es decir como $f(r,\varphi)$. En el ejemplo que propusimos más arriba esto es $f(r,\phi) = r\cos\varphi + r\,\text{sen}\,\varphi + 2$.

2. Describir el dominio D en términos de las coordenadas r y φ. En el mismo ejemplo, esto se logra considerando que los puntos del contorno son aquellos que se encuentran a distancia $r = \sqrt{2}$ del origen, en tanto que los puntos del interior de la circunferencia se encuentran a una distancia menor que $\sqrt{2}$, o sea el conjunto de los puntos del contorno y de su interior cumplen que $0 \le r \le \sqrt{2}$. El segmento que une cualquiera de esos puntos con el origen forma un ángulo que puede tomar cualquier valor entre 0 y 2π, o sea $0 \le \varphi \le 2\pi$. En las nuevas variables, los límites de integración resultan constantes, lo que hará que el cálculo sea considerablemente más simple.

3. Por último, resta aprender a escribir el diferencial de área en términos de las coordenadas polares. Para esto, a partir de un punto del plano de coordenadas (r,φ), producimos un incremento en r y un incremento en φ.

El diferencial de área es el trapecio circular sombreado, en el que uno de los "lados" es un arco de longitud $rd\varphi$ y el otro es un segmento de longitud dr. Afirmamos, sin demostración, que el diferencial de área se obtiene como el producto de ambos (como si se tratara del área de un rectángulo). Luego



$dS = rd\varphi dr$

Así como antes pasamos de la integral doble $\iint\limits_D f(x, y)dS$ a la integral iterada en coordenadas cartesianas, ahora haremos lo equivalente para escribirla como integral iterada en coordenadas polares. La conversión de la función y del diferencial de área nos da $\iint\limits_D f(r,\varphi)rdrd\varphi$. En cuanto al dominio, si sucede, como en el ejemplo que veníamos describiendo, que los límites de variación de r y de φ son constantes: $r_0 \le r \le r_1$, $\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1$, el orden en que se efectúa la iteración es indistinto y la integral se escribe de cualquiera de las dos formas siguientes:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\left(\int_{r_0}^{r_1} f(r,\varphi)rdr\right)d\varphi=\int_{r_0}^{r_1}\left(\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} f(r,\varphi)d\varphi\right)rdr$$

Si, en cambio, al llevar al dominio a la forma polar resulta que los extremos de *r* son funciones de φ, es decir, si $r_0(\varphi)\le r\le r_1(\varphi)$ y $\varphi_0\le\varphi\le\varphi_1$, entonces la integral se expresa como

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\left(\int_{r_0(\varphi)}^{r_1(\varphi)} f(r,\varphi)rdr\right)d\varphi$$

Si, a la inversa, resulta $\varphi_0(r)\le\varphi\le\varphi_1(r)$ y $r_0\le r\le r_1$, la integral está dada por

$$\int_{r_0}^{r_1}\left(\int_{\varphi_0(r)}^{\varphi_1(r)} f(r,\varphi)d\varphi\right)rdr$$

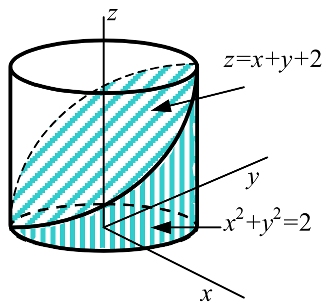
Retomando el ejemplo planteado al comienzo, donde la función es $f(r,\varphi)=r\cos\varphi+r\,\mathrm{sen}\,\varphi+2$ y el dominio está limitado por $0\le r\le\sqrt{2}$ y $0\le\varphi\le 2\pi$, la integral se expresa en la forma: $\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{2}}(r\cos\varphi+r\,\mathrm{sen}\,\varphi+2)rdr\right)d\varphi$. Resolvemos primero la integral entre paréntesis:

$$\int_0^{\sqrt{2}}\left[r^2(\cos\varphi+\mathrm{sen}\,\varphi)+2r\right]dr=(\cos\varphi+\mathrm{sen}\,\varphi)\int_0^{\sqrt{2}}r^2dr+2\int_0^{\sqrt{2}}rdr=(\cos\varphi+\mathrm{sen}\,\varphi)\frac{r^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{2}}+r^2\Big|_0^{\sqrt{2}}=$$

$=\dfrac{\cos\varphi+\mathrm{sen}\,\varphi}{3}(\sqrt{2})^3+2$, donde se ha supuesto que φ se mantiene constante en este procedimiento. Insertamos este resultado en la otra integral:

$$\int_0^{2\pi}\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}(\cos\varphi+\mathrm{sen}\,\varphi)+2\right]d\varphi=\frac{2\sqrt{2}}{3}(-\mathrm{sen}\,\varphi+\cos\varphi)+2\varphi\Big|_0^{2\pi}=4\pi\,.$$

Pensemos ahora en el significado geométrico de esta integral, es decir, identifiquemos a través de la función en el integrando y el dominio cuál es el volumen que acabamos de determinar. Volvamos a la expresión cartesiana de la función: $z=x+y+2$. Vemos que representa a un plano de normal (-1,1,1) pues podemos escribirla como $-x-y+z=2$. Para visualizarlo, tengamos en cuenta que corta al plano *xz* según la recta $z=x+2$ y al plano *yz* según la recta $z=y+2$. El dominio, como ya dijimos, es un círculo de radio $\sqrt{2}$.



Imaginemos que por cada punto del contorno levantamos líneas verticales hasta encontrar a la superficie (el plano). Se genera de este modo un cuerpo para el cual el "piso" es el círculo y el "techo" es el plano inclinado. La figura muestra el cuerpo cuyo volumen acabamos de calcular. Las líneas verticales trazadas por el contorno del dominio generan ua superficie cilíndrica que, al cortarse con el plano dan lugar a una elipse inclinada. El punto más bajo de la elipse es el (-1,-1,0) y el más alto es el (1,1,4). La parte sombreada representa la mitad de un cilindro de altura 4 y radio $\sqrt{2}$. Efectuando un cálculo de geometría elemental, obtenemos que su volumen es $\frac{1}{2}\pi\sqrt{2}^2 4 = 4\pi$