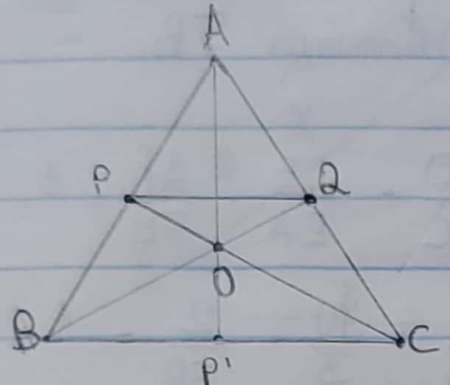
Actividad de aula 4

① Si P y Q son puntos en $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ del ΔABC de tal forma que $\overline{PQ}$ es paralelo a $\overline{BC}$, y si $\overline{BQ}$ y $\overline{CP}$ se intersectan en O, entonces $\overline{AO}$ es una mediana.



Por el teorema de tales:

① $$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$$

Luego, Por el teorema de Ceva:

$$\frac{BP'}{P'C} \cdot \frac{QC}{AQ} \cdot \frac{AP}{PB} = 1$$

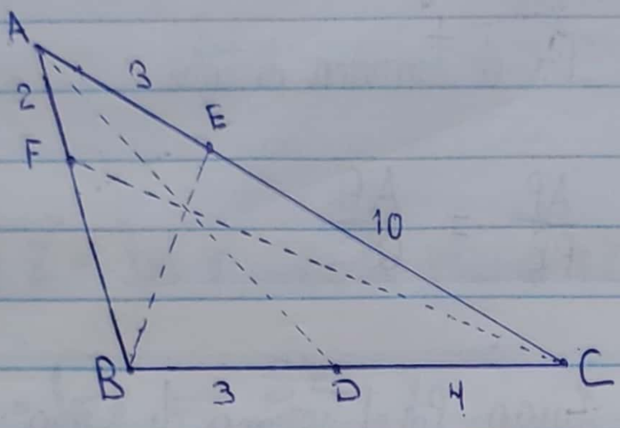
$$\frac{BP'}{P'C} \cdot \frac{\cancel{QC}}{\cancel{AQ}} \cdot \frac{\cancel{AQ}}{\cancel{QC}} = 1 \quad \text{(Por ①)}$$

$$\frac{BP'}{P'C} = 1$$

$$BP' = P'C$$

Entonces AO es una mediana

② En la figura se muestra un ΔABC y puntos D, E y F sobre sus lados de manera que la medida de los segmentos son los marcados. Muestra que los segmentos $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ concurren.



i) Determinar FB.

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

$$\frac{\cancel{3}}{4} \cdot \frac{10}{\cancel{3}} \cdot \frac{2}{FB} = 1$$

$$\frac{20}{4FB} = 1$$

$$\frac{5}{FB} = 1$$

$$5 = FB$$

$$FB = 5$$

ii) Determinar si $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ concurren

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

$$\frac{\cancel{3}}{4} \cdot \frac{10}{\cancel{3}} \cdot \frac{2}{5} = 1$$

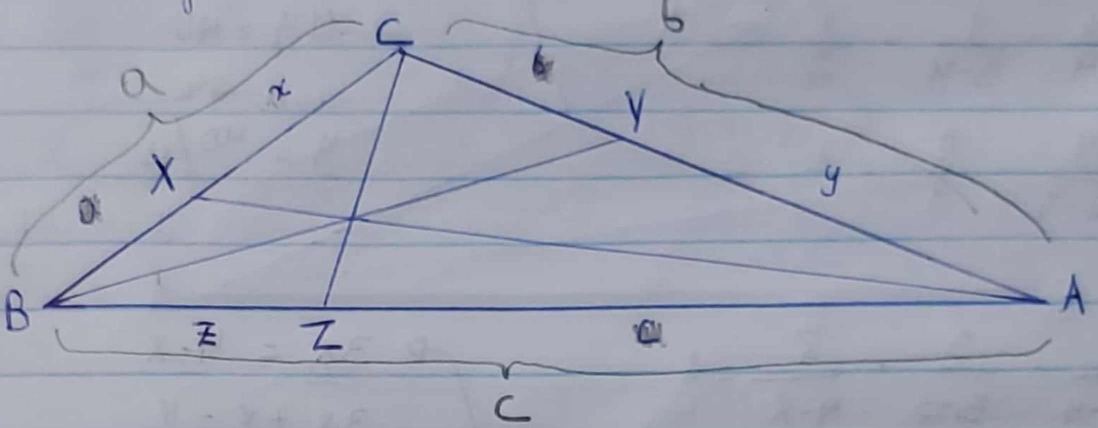
$$\frac{20}{20} = 1$$

$$1 = 1 \quad (V)$$

"Por el recíproco del teorema de Ceva los segmentos son concurrentes".

Escaneado con CamScanner

③ Dado el ΔABC y los puntos X en $\overline{BC}$, Y en $\overline{CA}$, Z en $\overline{AB}$ tales que las cevianas $\overline{AX}$, $\overline{BY}$, $\overline{CZ}$ son concurrentes. Si $CX = x$, $BZ = z$ y $AY = y$, y se dan dos de estas longitudes, calcule la restante.



(a, b, c)	x	y	z
(3, 4, 6)	1	2	4
① (3, 5, 6)	1	4	2
② (3, 5, 7)	1	40/11	3
③ (4, 5, 6)	1	3	4
④ (4, 5, 7)	1	4	3
⑤ (5, 6, 7)	3	2	4
⑥ (6, 7, 9)	2	5	4

Teorema de Ceva:

$$\frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YC} \cdot \frac{CX}{XB} = 1$$

$$\frac{z}{c-z} \cdot \frac{y}{b-y} \cdot \frac{x}{a-x} = 1$$

① $\frac{z}{c-z} \cdot \frac{y}{b-y} \cdot \frac{x}{a-x} = 1$

$$\frac{z}{6-z} \cdot \frac{4}{5-4} \cdot \frac{1}{3-1} = 1$$

$$\frac{z}{6-z} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{z}{6-z} \cdot (2) = 1$$

$$\frac{2z}{6-z} = 1$$

$$2z = 6 - z$$

$$2z + z = 6$$

$$3z = 6$$

$$z = 6/3$$

$$z = 2$$

Escaneado con CamScanner

(2) $\frac{z}{c-z} \cdot \frac{y}{b-y} \cdot \frac{x}{a-x} = 1$

$\frac{3}{7-3} \cdot \frac{y}{5-y} \cdot \frac{1}{3-1} = 1$

$\frac{3}{4} \cdot \frac{y}{5-y} \cdot \frac{1}{2} = 1$

$\frac{y}{5-y} \cdot \frac{3}{8} = 1$

$\frac{3y}{40-8y} = 1$

$3y = 40-8y$

$3y+8y = 40$

$11y = 40$

$y = 40/11$

(3) $\frac{4}{6-4} \cdot \frac{3}{5-3} \cdot \frac{x}{4-x} = 1$

$\frac{4}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{4-x} = 1$

$3 \cdot \frac{x}{4-x} = 1$

$\frac{3x}{4-x} = 1$

$3x = 4-x$

$3x + x = 4$

$4x = 4$

$x = 1$

(4) $\frac{z}{7-z} \cdot \frac{4}{5-4} \cdot \frac{1}{4-1} = 1$

$\frac{z}{7-z} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{1}{3} = 1$

$\frac{z}{7-z} \cdot \frac{4}{3} = 1$

$\frac{4z}{21-3z} = 1$

$4z = 21-3z$

$4z + 3z = 21$

$7z = 21$

$z = 3$

⑤ $\frac{4}{7-4} \cdot \frac{y}{6-y} \cdot \frac{3}{5-3} = 1$

$\frac{4}{3} \cdot \frac{y}{6-y} \cdot \frac{3}{2} = 1$

$\frac{y}{6-y} \cdot \frac{12}{6} = 1$

$\frac{y}{6-y} \cdot 2 = 1$

$\frac{2y}{6-y} = 1$

$2y = 6 - y$

$2y + y = 6$

$3y = 6$

$y = 2$

⑥ $\frac{4}{9-4} \cdot \frac{5}{7-5} \cdot \frac{x}{6-x} = 1$

$\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{x}{6-x} = 1$

$\frac{20}{10} \cdot \frac{x}{6-x} = 1$

$2 \cdot \frac{x}{6-x} = 1$

$\frac{2x}{6-x} = 1$

$2x = 6 - x$

$2x + x = 6$

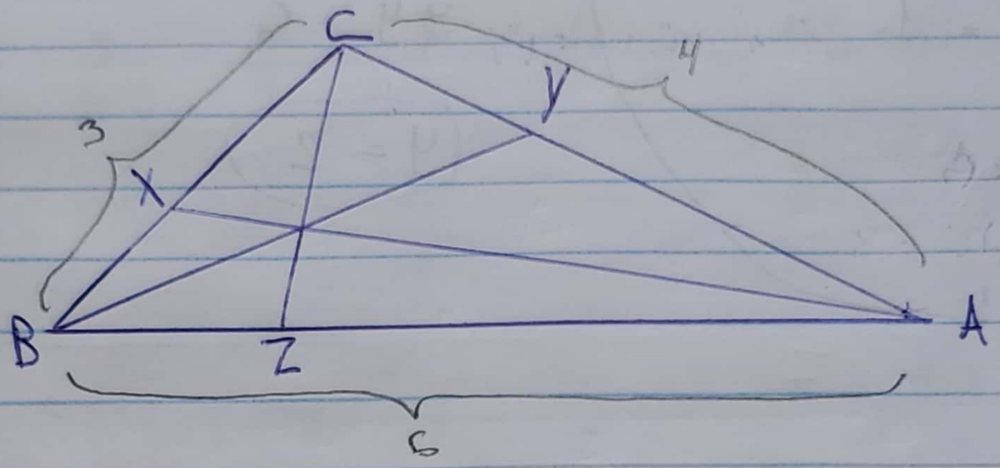
$3x = 6$

$x = 6/3$

$x = 2$

Escaneado con CamScanner

④ ABC es un triángulo con lados $a=3$, $b=4$, $c=6$. X, Y, Z son puntos en $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ respectivamente, tales que $BZ = AY = CX = \tau$. Si las cevianas $\overline{AX}$, $\overline{BY}$, $\overline{CZ}$ son concurrentes, calcular τ.



$$\frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YC} \cdot \frac{CX}{XB} = 1$$

$$\frac{\tau}{6-\tau} \cdot \frac{\tau}{4-\tau} \cdot \frac{\tau}{3-\tau} = 1$$

$$\tau^3 = (6-\tau)(4-\tau)(3-\tau)$$

$$\tau^3 = (24 - 4\tau - 6\tau + \tau^2)(3-\tau)$$

$$\tau^3 = (\tau^2 - 10\tau + 24)(3-\tau)$$

$$\tau^3 = 3\tau^2 - 30\tau + 72 - \tau^3 + 10\tau^2 - 24\tau$$

$$\tau^3 = -\tau^3 + 13\tau^2 - 54\tau + 72$$

$$\tau^3 + \tau^3 - 13\tau^2 + 54\tau - 72 = 0$$

$$2\tau^3 - 13\tau^2 + 54\tau - 72 = 0$$

$$2\tau^3 - 4\tau^2 - 9\tau^2 + 18\tau + 36\tau - 72 = 0$$

$$(2\tau^3 - 4t^2) - (9\tau^2 + 18t) + (36\tau - 72) = 0$$

$$2\tau^2(\tau - 2) - 9\tau(\tau - 2) + 36(\tau - 2) = 0$$

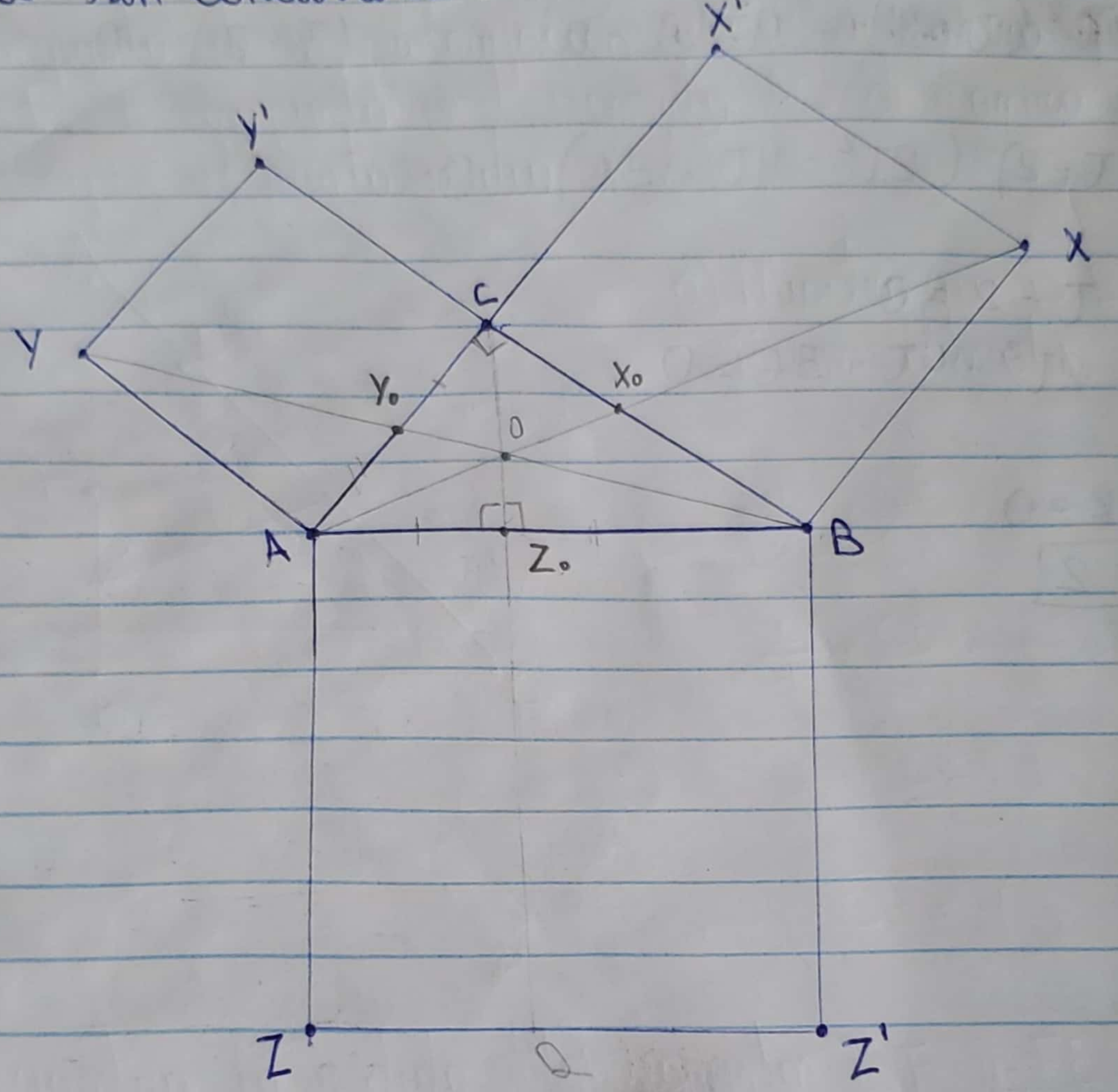
$$(\tau - 2)(2\tau^2 - 9\tau + 36) = 0$$

$$\begin{cases} \tau - 2 = 0 \\ 2\tau^2 - 9\tau + 36 = 0 \end{cases}$$

$$\tau - 2 = 0$$

$$\boxed{\tau = 2}$$

⑤ ΔABC es rectángulo. Muestre que las rectas $\overleftrightarrow{AX}$, $\overleftrightarrow{BY}$ y $\overleftrightarrow{CQ}$ son concurrentes.



Sol: Tenemos por Teorema de altura:

$\Delta ACZ_0 \sim \Delta ABC$

$\Rightarrow \dfrac{AZ_0}{AC} = \dfrac{AC}{AB}$

$\Delta CBZ_0 \sim \Delta ABC$

$\Rightarrow \dfrac{BZ_0}{CB} = \dfrac{CB}{AB}$

Luego: $\Delta ACZ_0 \sim \Delta CZ_0B \Rightarrow \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AZ_0}{BZ_0}$

También son semejantes, los triángulos siguientes:

$\Delta Y_0CB \sim \Delta Y_0AY$

$\Rightarrow \dfrac{CB}{CY_0} = \dfrac{AY}{Y_0A} \Rightarrow \dfrac{CB}{AY} = \dfrac{CY_0}{Y_0A}$

$\Delta X_0BX \sim \Delta X_0CA$

$\dfrac{BX}{CA} = \dfrac{BX_0}{CX_0}$

Para probar que $\overleftrightarrow{AX}$, $\overleftrightarrow{BY}$ y $\overleftrightarrow{CQ}$ son concurrentes, se debe cumplir:

$$\frac{AZ_0}{BZ_0} \cdot \frac{BX_0}{CX_0} \cdot \frac{CY_0}{AY_0} = 1$$

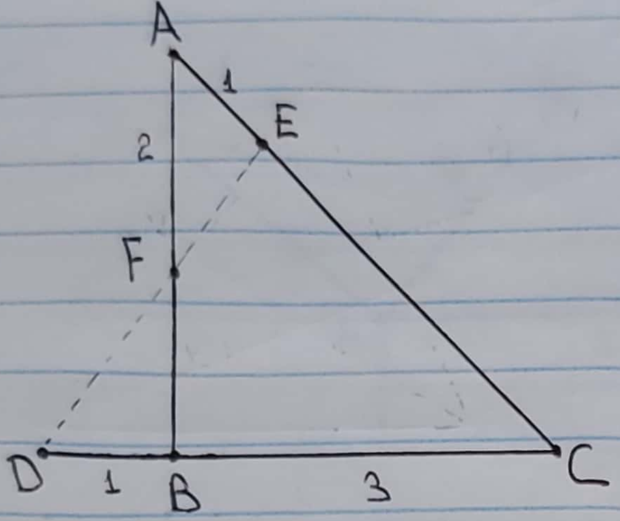
Sustituimos: $\dfrac{\cancel{AC}}{\cancel{BC}} \cdot \dfrac{BX}{\cancel{CA}} \cdot \dfrac{\cancel{CB}}{AY} = 1$

$$\frac{BX}{AY} = 1 \Rightarrow (BX = AY)$$

$$1 = 1 \text{ (V)}$$

Actividad de aula 5

① Sea ABC un triángulo con $AB = 4$ y $BC = 3$. Sean D un punto en la prolongación de CB de manera que $BD = 1$, E un punto en el segmento AC de manera que $AE = 1$ y F el punto medio de AB.



a) Muestra que D, E y F son colineales.

$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{CE}{1} \cdot \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{1}{4} \cdot CE \cdot 1 = 1$$

$$CE = 4$$

b) Encuentra la medida de los segmentos DF y FE.

- $DF = \sqrt{FB^2 + DB^2}$

  $DF = \sqrt{(2)^2 + (1)^2}$

  $DF = \sqrt{5}$

- $\frac{AE}{AC} \cdot \frac{CB}{BD} \cdot \frac{DF}{FE} = 1$

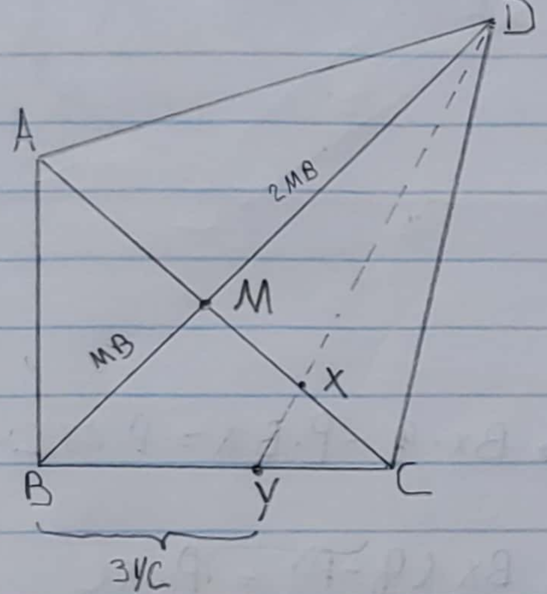
  $\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{\sqrt{5}}{FE} = 1$

  $\frac{3\sqrt{5}}{5} = FE$

  $FE = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

② En la figura se observa un cuadrilátero ABCD de manera que sus diagonales AC y BD se cortan en un punto M tal que $AM = MC$ y $DM = 2MB$. Supón que X y Y son puntos en MC y BC, respectivamente tales que

$\frac{AC}{MX} = \frac{BY}{YC} = 3$. Muestre que D, X y Y son colineales.



i) tomamos ΔBCM y aplicamos teorema de menelao:

$$\frac{MD}{BD} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CX}{MX} = 1$$

$$\frac{2\cancel{MB}}{3\cancel{MB}} \cdot \frac{\cancel{3YC}}{\cancel{YC}} \cdot \frac{CX}{\frac{AC}{3}} = 1$$

$$2 \cdot 1 \cdot \frac{3CX}{AC} = 1$$

$$6CX = AC$$

$$CX = AC/6$$

ii) Aplicamos el teorema de menelao para probar que D, X, Y son colineales

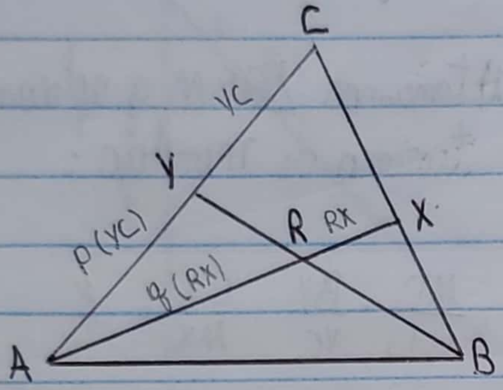
$$\frac{MD}{DB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CY}{MX} = 1$$

$$\frac{2\cancel{MB}}{3\cancel{MB}} \cdot \frac{\cancel{3YC}}{\cancel{YC}} \cdot \frac{\cancel{AC}/6}{\cancel{AC}/3} = 1$$

$$2 \cdot 3/6 = 1$$

$$1 = 1 \quad (V)$$

③ Sea ΔABC, X y Y puntos en BC y CA respectivamente, y R es el punto de intersección de AX y BY. Dado $\frac{AY}{YC} = P$ y $\frac{AR}{RX} = q$, donde $0 < P < q$, expresa $\frac{BX}{XC}$ en términos de P y q.



$$\frac{BX}{BC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AR}{RX} = 1$$

$$\frac{BX}{BX+XC} \cdot \frac{1}{P} \cdot q \cdot P$$

1

$$\frac{BX}{BX+XC} \cdot \frac{q}{P} = 1$$

$$\frac{BX \cdot q}{P \cdot BX + P \cdot XC} = 1$$

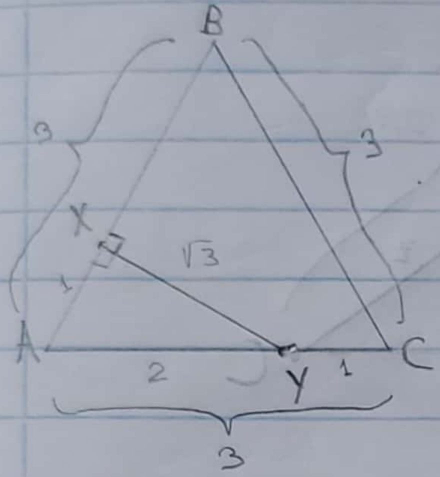
$$BX \cdot q = P \cdot BX + P \cdot XC$$

$$BX \cdot q - P \cdot BX = P \cdot XC$$

$$BX (q - P) = P \cdot XC$$

$$\boxed{\frac{BX}{XC} = \frac{P}{(q-P)}}$$

(7) Sea ΔABC equilátero con lados de longitud 3. Sea X sobre el segmento AB tal que $AX = 1$, y sea Y tal que B, C, Y son colineales en ese orden con $CY = 1$. Pruebe que $\overline{XY}$ es perpendicular a $\overline{AB}$.



- ΔAXY : es rectángulo :

$$(XY)^2 = (AY)^2 - (AX)^2$$
$$(XY)^2 = (2)^2 - (1)^2$$
$$(XY)^2 = 3$$
$$XY = \sqrt{3}$$

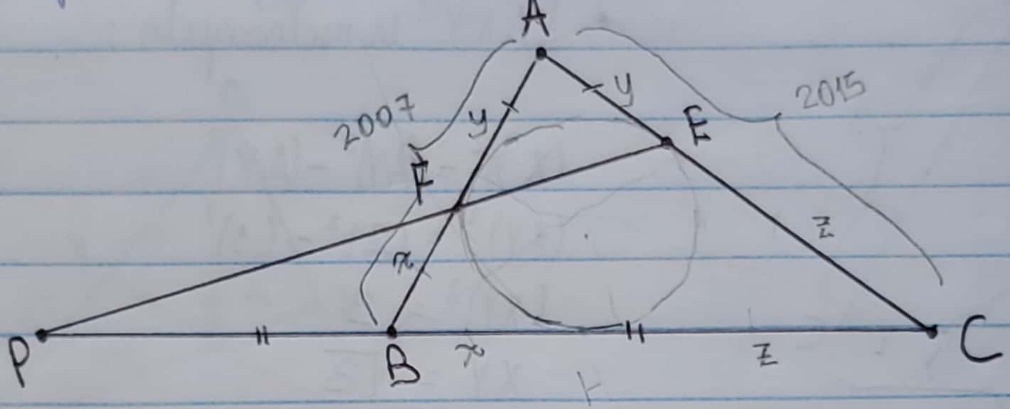
- $(AY)^2 = (AX)^2 + (XY)^2$

$$(2)^2 = (1)^2 + (\sqrt{3})^2$$
$$4 = 1 + 3$$
$$4 = 4 \quad (V)$$

Como se cumple el teorema de pitágoras en ΔAXY, entonces $\overline{XY}$ es perpendicular a $\overline{AB}$.

Escaneado con CamScanner

⑤ El ΔABC tiene $AB = 2007$ y $AC = 2015$. El incírculo ω del triángulo es tangente a $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ en E y F respectivamente, y P es el punto de intersección de $\overline{EF}$ y $\overline{BC}$. Suponiendo que B es el punto medio de $\overline{CP}$. Determine la longitud BC



$$2x + 2y + 2z = P$$

$$\begin{cases} BC = a \\ AC = b \\ BC = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + z = a \\ x + z = b \\ x + y = c \end{cases}$$

$$\frac{CB}{CP} \cdot \frac{BF}{\cancel{FA}} \cdot \frac{\cancel{AE}}{EC} = 1$$

$$2\,\frac{BF}{EC} = 1$$

$$\begin{array}{l} x+z=a \\ y+z=b \\ x+y=c \end{array} \quad \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \end{array}\right.$$

$$\sim \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & 1 & a-c \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 & b+a-c \end{array}\right.$$

- $2z = b+a-c$

$z = 1/2\,b + 1/2\,a - 1/2\,c$

$y + \underbrace{1/2\,b + 1/2\,a - 1/2\,c}_{z} = b$

$y = 1/2\,b + 1/2\,c - 1/2\,a$

$BF = c - y$

$= c - (1/2\,b + 1/2\,c - 1/2\,a)$

$BF = 1/2\,c - 1/2\,b + 1/2\,a \quad + \quad 1/2\,b - 1/2\,b = 1/2\,p - b$

$EC = b - y = b - (1/2\,b + 1/2\,c - 1/2\,a)$

$EC = 1/2\,b - 1/2\,c + 1/2\,a \quad + 1/2\,c - 1/2\,c$

$= 1/2\,p - c$

* $2\dfrac{BF}{EC} = 1 \implies 2\dfrac{y-b}{y-c} = 1$

$$2(y-b) = y-c$$

$$2y - 2b = y - c$$

$$y = 2b - c$$

$-1/2\,a + 1/2\,b + 1/2\,c = 2b - c$

$1/2\,a = 2b - c - 1/2\,b - 1/2\,c$

$\Downarrow$

$a = 3b - 3c$

$a = 3(b - c)$

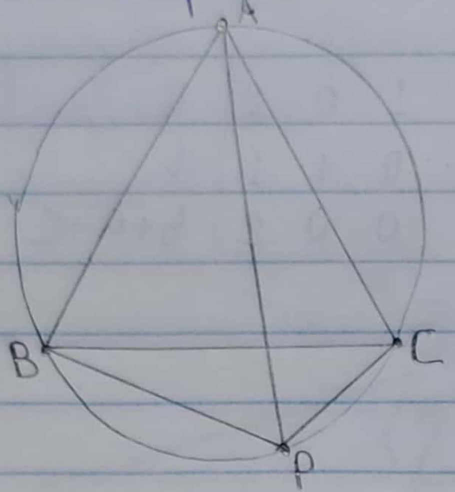
$a = 3(2015 - 2007)$

$\boxed{a = 24}$

$BC = 24$ ✓

Escaneado con CamScanner

⑥ Sea ΔABC un triángulo equilátero, y sea P un punto en el circuncírculo del ΔABC en el arco BC.
Demuestra que $PA = PB + PC$



$AB = BC = AC$

Aplicamos teorema de Ptolomeo:

$$AB \cdot PB + PC \cdot AC = BC \cdot PA$$

$$AB \cdot PB + PC \cdot AB = AB \cdot PA$$

$$AB(PB + PC) = AB \cdot PA$$

$$PB + PC = \frac{\cancel{AB} \cdot PA}{\cancel{AB}}$$

$$PB + PC = PA$$

$$PA = PB + PC$$

Escaneado con CamScanner

Comparación de la geometría plana y esférica

Complete la siguiente tabla para comparar y contrastar líneas en el sistema de geometría euclidiana plana y líneas (grandes círculos) en geometría esférica.

	En el plano	En la esfera
1. ¿La longitud de una recta es finita o infinita?	infinita	finita
2. Describe el camino más corto que conecta dos puntos.	una línea recta	El arco menor de una circunferencia máxima
3. ¿Puedes extender una recta para siempre?	Sí	No
4. ¿Cuántas partes (finitas o infinitas) dividirán dos puntos una recta?	Dos finitas (Rayos) Una infinita (segmento)	Dos partes finitas
5. ¿Cuántas rectas pasan por dos puntos diferentes?	Una recta	i) Por dos puntos, una única recta. ii) Por dos polos, infinitas rectas.
6. ¿Cuántas rectas son paralelas a una línea dada y pasan a través de un punto dado que no está en la línea dada?	Una recta	No hay
7. Si tres puntos son colineales, exactamente uno está entre los otros dos. (Verdadero o falso)	Verdadero	Falso

Para cada propiedad enumerada de la geometría euclidiana plana, escriba una instrucción correspondiente para la geometría esférica.

8. Dos rectas distintas sin punto de intersección son paralelas.
No hay rectas paralelas.
9. Dos rectas distintas que se intersecan, se intersecan exactamente en un punto.
Dos rectas distintas, se intersecan en dos puntos.
10. Un par de rectas perpendiculares divide el plano en cuatro regiones infinitas.
Un par de rectas perpendiculares dividen a la esfera en 4 regiones finitas.
11. Un par de rectas perpendiculares se cruzan una vez y crean cuatro ángulos rectos.
Un par de rectas perpendiculares se cortan dos veces y crean 8 ángulos rectos.
12. Las rectas paralelas tienen infinitas rectas perpendiculares comunes.
No hay rectas paralelas.
13. Solo hay una distancia que se puede medir entre dos puntos.
Hay dos distancias que se pueden medir entre dos puntos.
14. Hay exactamente una recta que pasa por dos puntos.
i) Por dos polos pasan infinitas rectas.
ii) Por dos puntos (donde no ocurra que ambos sean polos) solo pasa una recta.

Elija una de las siguientes respuestas para cada pregunta:
A) Verdadero en un plano
B) Verdadero en una esfera
C) Verdadero tanto en un plano como en una esfera
D) No es verdadero en el plano, ni es verdadero en la esfera.

C 15. Una recta es un conjunto infinito de puntos.

C 16. Una recta es continua (sin "agujeros" ni huecos).

A 17. A través de dos puntos cualesquiera, hay exactamente una recta.

B 18. Existe al menos un par de puntos a través de los cuales se puede dibujar más de una recta.

B 19. Un polígono puede tener dos lados.

A 20. Cada ángulo de un triángulo equilátero debe ser de 60°.

D 21. Cada ángulo de un triángulo equilátero puede ser de 45°.

B 22. Cada ángulo de un triángulo equilátero puede ser de 120°.

B 23. Una recta está acotada. (es decir, puede caber en una caja cerrada)

A 24. No hay mayor distancia entre dos puntos.

A 25. Dos rectas pueden no compartir puntos.

B 26. Dos rectas distintas pueden compartir dos puntos.

D 27. Dos rectas distintas pueden compartir más de dos puntos.

A 28. La suma de los ángulos de un triángulo es siempre el mismo número.

A 29. Un triángulo puede tener como máximo un ángulo recto.

B 30. Tres rectas pueden ser perpendiculares entre sí (es decir, la recta a $\perp$ recta b $\perp$ recta c $\perp$ recta a)

A 31. Tres rectas pueden ser paralelas entre sí.

A 32. Tres rectas pueden cruzarse en tres puntos. (cada una de las rectas se cruza con las otras dos rectas)

B 33. Tres rectas pueden cruzarse en dos puntos. (cada una de las rectas se cruza con las otras dos rectas)

D 34. Tres rectas pueden cruzarse en cuatro puntos.

C 35. Los ángulos verticales son congruentes.