Problemas – Tema 4

Problemas resueltos - 8 - sistemas con parámetro parte 2 de 4

1. Sea $\begin{Bmatrix} x+y+z=1 \\ x-a\cdot y+z=1 \\ a\cdot x+y+z=4 \end{Bmatrix}$ **. Discutir las soluciones en función del valor de** $a\in\mathbb{R}$ **.**

Planteamos la matriz ampliada del sistema y triangulamos por Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow F'_2=F_2-F_1 \ , \ F'_3=F_3-a\cdot F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a & 4-a \end{array}\right) \rightarrow$$

→ Intercambiamos C_2 con C_3 (**el cambio de columnas afecta al orden de las incógnitas**) →

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a & 4-a \end{array}\right) \rightarrow \text{Intercambiamos } F_2 \text{ con } F_3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 4-a \\ 0 & 0 & -a-1 & 0 \end{array}\right)$$

Discusión de casos:

- Si $-a-1=0 \rightarrow a=-1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ → Podemos obviar la tercera fila (al hacerse todos los términos nulos significa que es combinación lineal de las otras filas). Llegamos a un sistema equivalente de dos ecuaciones y tres incógnitas → Un parámetro libre → infinitas soluciones → Sistema Compatible Indeterminado al tener un sistema de rango 2 con 3 incógnitas.
- Si $1-a=0 \rightarrow a=1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$ → Absurdo en F_2 → No hay solución → Sistema incompatible, ya que $0\neq 3$.
- Si $a\neq -1$ y $a\neq 1$ → Solución única → Sistema Compatible Determinado, ya que **llegamos a tres ecuaciones no nulas tras triangular la matriz, que no son combinación lineal entre sí**. Sistema de rango 3 con 3 incógnitas.

2. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{Bmatrix} x+y=1 \\ k\,x+z=0 \\ x+(1+k)\,y+k\,z=k+1 \end{Bmatrix}$

a) Estudiar las posibles soluciones según el valor de k **.**

b) Halla la solución, si existe, para $k=1$ **.**

a) Resolvemos por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1+k & k & k+1 \end{array}\right) \rightarrow C_1 \Leftrightarrow C_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 1+k & 1 & k & k+1 \end{array}\right) \rightarrow F'_3=F_3-(1+k)F_1 \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & -k & k & 0 \end{array}\right) \rightarrow F'_3=F_3+F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 & 0 \end{array}\right)$$

Tras obtener la matriz triangular de Gauss, comprobar que no hay absurdos matemáticos y eliminar filas proporcionales, el rango del sistema coincide con el número de ecuaciones con al menos un coeficiente no nulo.

Para la discusión de casos consideramos los siguientes casos:

$k=0$, $k+1=0$

- Si $k=0 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ → Hay dos filas iguales → $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ → Rango 2 y 3 incógnitas → SCI con infinitas soluciones y 1 parámetro libre.
- Si $k=-1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ → Obviamos la tercera fila → $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ → Rango 2 y 3 incógnitas → SCI con infinitas soluciones y 1 parámetro libre.
- Caso complementario $k \neq \{-1,0\}$ → En la matriz final de Gauss resulta Rango 3 y 3 incógnitas → SCD con solución única.

b) Si $k=1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$ → ¡Ojo, que tras el cambio de columnas, la primera columna es la variable y mientras que la segunda columna es la variable x : $z=0$, $x=0$, $y=1$