Turbo-Gauß zum Erstellen der Dreiecksmatrix

Es gibt ein Verfahren, welches das Gauß-Verfahren wirklich beschleunigt, aber auch dieses Verfahren ist seeeehr anfällig dafür, dass an der ein oder anderen Stelle Vorzeichenfehler gemacht werden:

Für die Schreibweise ist es gut, wenn man sogenannte ***2x2-Determinanten*** kennen und lösen lernt:

Eine 2x2-Determinante ist ein Zahlenblock aus vier Zahlen zwischen zwei senkrechten Strichen: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. Man berechnet so eine Determinante mit *„Hauptdiagonale minus Nebendiagonale", also* $a \cdot d - b \cdot c$.

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c}$$

Ein Zahlenbeispiel: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$

Der Turbo-Weg zur Dreiecksmatrix:

A	Gegeben ist das Gleichungssystem: $\begin{array}{llll} 3a & +2b & +c & =7 \\ -a & +b & +2c & =9 \\ -4a & & +2c & =6 \end{array}$	
B	Das lässt sich als *erweiterte Koeffizientenmatrix* schreiben: $\left(\begin{array}{ccc\|c} 3 & 2 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 2 & 9 \\ -4 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$	Nun werden mit Hilfe der Matrix aus *B* Determinanten berechnet: m_{22} berechnet sich aus dem Zahlenblock links oben: $g(x) = x^3 g(x) = x^3$ Verwendet man in der rechten Spalte der Determinante nicht $\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$ sondern $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$ aus der dritten Spalte von *B*, dann folgt:
C	Die Zahl oben links nennt sich *Pivot*-Element. Unter dieser Zahl darf die Spalte schon mit Nullen gefüllt werden: $\left(\begin{array}{ccc\|c} \mathbf{3} & 2 & 1 & 7 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ 0 & m_{32} & m_{33} & m_{34} \end{array}\right)$ (*pivot* ist französisch und heißt „Dreh- oder Angelpunkt")	$m_{22} = \begin{vmatrix} \mathbf{3} & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = \mathbf{5}$ $m_{23} = \begin{vmatrix} \mathbf{3} & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) = \mathbf{7}$ und mit der vierten Spalte aus *B* erhält man $m_{24} = \begin{vmatrix} \mathbf{3} & 7 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot 9 - 7 \cdot (-1) = \mathbf{34}$
D	$\left(\begin{array}{ccc\|c} \mathbf{3} & 2 & 1 & 7 \\ 0 & \mathbf{5} & \mathbf{7} & \mathbf{34} \\ 0 & m_{32} & m_{33} & m_{34} \end{array}\right)$ das führt zu $\left(\begin{array}{ccc\|c} \mathbf{3} & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 7 & 34 \\ 0 & 8 & 10 & 46 \end{array}\right)$	Führt man die gleichen Rechenoperationen wie oben mit der dritten, statt mit der zweiten Zeile durch, dann erhält man m_{32}, m_{33} und m_{34}: $m_{32} = \begin{vmatrix} \mathbf{3} & 2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - 2 \cdot (-4) = 8$ $m_{33} = \begin{vmatrix} \mathbf{3} & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot (-4) = 10$ $m_{34} = \begin{vmatrix} \mathbf{3} & 7 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 7 \cdot (-4) = 46$
E	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 3 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & \mathbf{5} & 7 & 34 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \end{array}\right)$ das führt zur Dreiecksmatrix $\left(\begin{array}{ccc\|c} 3 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & \mathbf{5} & 7 & 34 \\ 0 & 0 & -6 & -42 \end{array}\right)$	Nun ist die 5 das neue „Pivot"-Element. Die Berechnungen der restlichen Matrixelemente geschehen mit der Matrix aus *D*: $m_{33} = \begin{vmatrix} \mathbf{5} & 7 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = 5 \cdot 10 - 7 \cdot 8 = -6$ und $m_{34} = \begin{vmatrix} \mathbf{5} & 34 \\ 8 & 46 \end{vmatrix} = 5 \cdot 46 - 34 \cdot 8 = -42$
F	Also: $-6c = -42 \Rightarrow \underline{\underline{c = 7}}$, $5b + 7 \cdot 7 = 34 \Rightarrow \underline{\underline{b = -3}}$ und $3a + 2 \cdot (-3) + 7 = 7 \Rightarrow \underline{\underline{a = 2}}$	