

「李白買酒」的教學經驗分享

劉慶章

二零零八年我修讀了香港教育學院舉辦的五星期數學複修課程。還記得其中一節課，關老師要求大家用不同的策略去解決一道難題。在解題的過程中，令我想到一些重要的教學要素：怎樣分析一道數學題呢？怎樣去引導學生去理解問題？把問題想得簡單一點呢？本文是作者的一點學習經驗和教學分享。

題目是這樣的：

李白提壺去買酒：
遇店加一倍，見花喝一斗。
三遇店和花，喝光壺中酒。
問李白壺中原有多少酒？

看到這道解難題目，我第一件理解到的便是李白最後遇見的是「花」，所以才會剛好把酒喝光，而且酒壺裏的酒剛好是 1 斗。

大多數人欣賞的事物都是較有規律的。我也有規律地想李白是梅花間竹地遇到「店」和「花」：店→花→店→花→店→花

解決了「店」和「花」的次序，我們可以用逆算的方法去找出李白壺中的酒到底有多少斗。我們知道李白最後遇到「花」時，酒壺裏的酒有 1 斗，所以剛好把酒喝得一滴不剩，從而推算出李白上次遇到「店」時，壺裏的酒未加倍前是 1 斗的一半，即 $\frac{1}{2}$ 斗。如是者我們也可計算出他對上一次遇到「花」時，壺裏的酒要比 $\frac{1}{2}$ 斗多 1 斗，即 $1\frac{1}{2}$ 斗。這樣一步一步推算下去，我們可以得出：

$$\text{店} \left(\frac{7}{8} \text{斗} \right) \leftarrow \text{花} \left(1\frac{3}{4} \text{斗} \right) \leftarrow \text{店} \left(\frac{3}{4} \text{斗} \right) \leftarrow \text{花} \left(1\frac{1}{2} \text{斗} \right) \leftarrow \text{店} \left(\frac{1}{2} \text{斗} \right) \leftarrow \text{花} (1 \text{斗})$$

李白壺裏原本有酒 $\frac{7}{8}$ 斗。

我滿以為已把問題圓滿解決了。誰料有同學提問：李白遇到「店」和「花」的次序可有其他排列的可能性呢？我不禁再細心一想，暗怪自己疏忽。除了最後一定是遇到「花」外，還有更多「店」和「花」的排列。只要找出這些排列，我們都可以用逆算的方法找到答案。到底這裏有多少個不同的組合呢？

假設有 6 個方格，我們要把 3 個「花」和 3 個「店」填入其中，到底可以變成多少個排列方法？因為「花」一定排在最後，所以我們可以把問題簡化為只有 5 個方格，而我們要把 2 個「花」和 3 個「店」填入其中。

					花
--	--	--	--	--	---

想到這裏，學過排列與組合的人就可以用數式很快地算出有 10 個不同的組合。

$$C_2^5 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times (3 \times 2 \times 1)} = 10$$

但是，對於沒有學過排列與組合這課題的小學生又如何去理解這道算式呢？就算知道有 10 個不同的排列，我們又怎樣去找出來所有的排列組合呢？這時，我一邊在列舉排列的次序，一邊在想如何深入淺出地引導學生去解這道難題、怎樣可以把問題再簡化，從而引導他們去思考和嘗試把所有的排列次序找出來。

既然只有「店」和「花」填入 5 個方格中，我們可以先把「店」或「花」其中一款填入，然後再填入另外一款。這時，問題進一步變成選「店」或「花」其中一款填入方格。現在剩下的有 2 個「花」和 3 個「店」，你會選先填 2 個「花」，還是 3 個「店」？聰明的你當然懂得先填 2 個「花」。

例：

花	花				花
花				花	花

填完了「花」，再把空格填上「店」便完成了其中的排列次序。哪到底有多少個排列方法呢？我們怎樣才知道所列舉的已窮盡所有可能性？到底有沒有一個有系統的方法去找出所有排列的方法，而這個方法又令學生易於理解的呢？

我再細心推想，2 個「花」要填入 5 個方格，不外乎出現兩種現象：連在一起排列或分開排列。

我們可以先列舉所有連在一起的排列（共 4 種）：

花	花				花
	花	花			花
		花	花		花
			花	花	花

再列舉分開的排列，其中一個佔第一格（共 3 種）：

花		花			花
花			花		花
花				花	花

又是分開的排列，其中一個佔第二格（共 2 種）：

	花		花		花
	花			花	花

再是分開的排列，其中一個佔第三格（共 1 種）：

		花		花	花
--	--	---	--	---	---

把這些組合中的空格填上「店」就窮盡所有的排列方法，再循逆算便可找到李白壺裏原有酒多少斗了。請參看附錄於后的學生工作紙。

引導學生有序地思想、從題目中抽取有用的成份、從另一角度去思考、把問題簡化、找出對應的策略去完成任務，是解這道題的精要所在！

參考資料

葛帆(2006)，《經典智力謎題》，哈爾濱出版社。

潘有發(2000)，《趣味歌詞古體算題選》，九章出版社。

F = 花 S = 店

4. 「店」和「花」的次序遵循着其他的组合：

1.	2.	3.	4.	5.	6.
F	F	S	S	S	花
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
F	S	F	S	S	花
$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
F	S	S	F	S	花
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
F	S	S	S	F	花
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	1
S	F	F	S	S	花
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
S	F	S	F	S	花
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

S	F	S	\$	F	花
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	1
S	S	F	F	S	花
$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
S	S	F	S	F	花
$\frac{1}{2}$	1	2	1	2	1
S	S	S	F	F	花
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	3	2	1
					花

