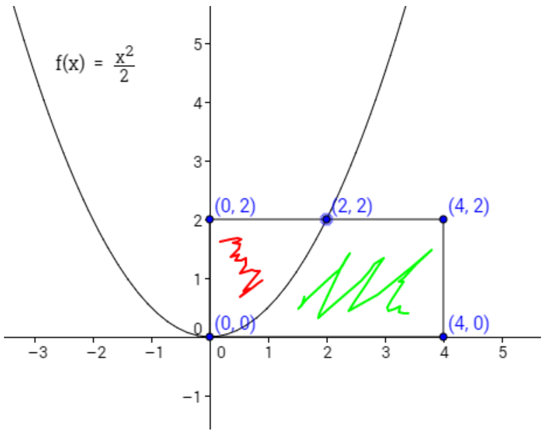
Problemas – Tema 5

Problemas resueltos - 25 - área encerrada por dos o más funciones parte 2 de 2

1. La parábola $f(x)=\frac{x^2}{2}$ divide al rectángulo de vértices $(0,0)$, $(4,0)$, $(4,2)$ y $(0,2)$ en dos recintos. Calcular el área de cada recinto.

Podemos realizar un boceto rápido de la curva y del rectángulo.



La curva corta al rectángulo en el punto $(2,2)$. Justo en ese punto, si trazamos una recta vertical para $x=2$, el rectángulo queda dividido en dos cuadrados iguales, de anchura $2\ u$ y altura $2\ u$. Es decir, cada cuadrado tiene $4\ u^2$ de área. Y el rectángulo de partida tiene un área total de $8\ u^2$.

La curva divide al rectángulo en dos áreas, que hemos representado en la gráfica con colores rojo y verde.

El área pintada de rojo será igual a:

$$A_{rojo}=4-\int_0^2 \frac{x^2}{2}dx=4-[\frac{x^3}{6}]_0^2=4-[\frac{8}{6}]=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}\ u^2$$

Donde hemos aplicado la regla de Barrow.

Y el área pintada de verde será:

$$A_{verde}=8-A_{rojo}=8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}\ u^2$$

2. Calcula el área encerrada por la función $g(x)=x^3-4x$ **y la recta** $y=-x-2$ **.**

Debemos obtener los puntos de corte de ambas funciones, para conocer los límites del área encerrada. Para ello, igualamos las funciones y resolvemos.

$$x^3-4x=-x-2 \;\rightarrow\; x^3-3x+2=0 \;\rightarrow\; (x-1)(x+2)^2=0$$

Los puntos de corte de ambas gráficas acontecen en $x=-2$ y $x=1$.

Debemos saber qué gráfica se encuentra por encima, en el intervalo $[-2,1]$, para estimar la forma de la integral definida. O bien realizar la integral definida de la resta de ambas funciones (sin considerar el orden), y aplicar valor absoluto para garantizar que obtenemos una cantidad positiva.

Por practicar un poco, no cuesta nada pintar ambas gráficas sobre unos mismos ejes.

La recta es sencilla de pintar. Para el polinomio podemos obtener los puntos de corte con los ejes y los extremos relativos, para hacernos una idea de cómo es su gráfica.

$g(x)=x^3-4x$ → Corte eje OX → $(-2,0),(0,0),(2,0)$

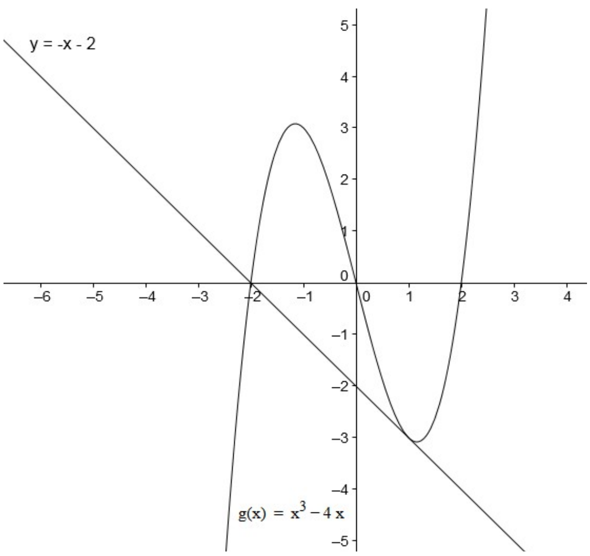
$g'(x)=3x^2-4$, $g'(x)=0 \rightarrow x=\frac{\pm 2\sqrt{3}}{3}$

$g''(x)=6x$

$g''(\frac{-2\sqrt{3}}{3})<0$, $g''(\frac{2\sqrt{3}}{3})>0$

$x=\frac{-2\sqrt{3}}{3}$ máximo relativo

$x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ mínimo relativo



El área se calcula con la integral definida entre los puntos de corte del polinomio de grado tres menos la recta, ya que la imagen del polinomio se encuentra siempre igual o por encima de la imagen de la recta en el intervalo $[-2,1]$.

$$A=\int_{-2}^{1}(x^3-4x-(-x-2))dx=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx=\left[\frac{x^4}{4}-3\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}$$

$$A=\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2-4+6+4=\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+8=\frac{1-6+32}{4}=\frac{27}{4}\;u^2$$

3. Sea $f(x)=-x^2+2x+3$ y la recta $2x+y-7=0$. Calcula el área encerrada por las gráficas de ambas funciones con el semieje positivo OX.

Debemos representar $f(x)=-x^2+2x+3$ y la recta $2x+y-7=0$. Primero obtenemos los puntos de corte de ambas gráficas.

$2x+y-7=0 \rightarrow y=-2x+7 \rightarrow$ Igualamos ambas gráficas.

$$-x^2+2x+3=-2x+7 \rightarrow -x^2+4x-4=0 \rightarrow x^2-4x+4=0 \rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=2$$

Encontramos un único punto de corte de ambas gráficas → $(2,3)$

Obtenemos punto de corte de la recta con los ejes.

$$y=-2x+7 \rightarrow x=0 \rightarrow (0,7)$$

$$y=-2x+7 \rightarrow y=0 \rightarrow \left(\frac{7}{2},0\right)$$

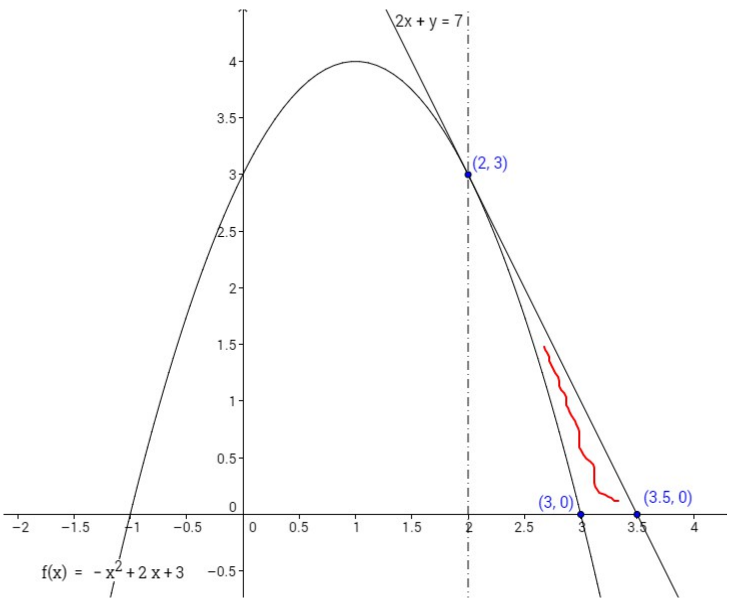
Obtenemos punto de corte de la parábola con los ejes.

$$f(x)=-x^2+2x+3 \quad , \quad y=0 \rightarrow -x^2+2x+3=0 \rightarrow (-1,0),(3,0)$$

$$f(x)=-x^2+2x+3 \quad , \quad x=0 \rightarrow (0,3)$$

El vértice es el máximo absoluto de la parábola, que será cóncava por ser negativo el coeficiente líder del polinomio de grado dos.

$f(x)=-x^2+2x+3 \rightarrow f'(x)=-2x+2 \quad , \quad f'(x)=0 \rightarrow x=1 \rightarrow (1,4)$ máximo



Por lo tanto, el área se rompe en dos tramos. El primero, la integral en el intervalo $[2,3]$ de la recta menos la parábola. El segundo, la integral en el intervalo $[3,7/2]$ de la recta sobre el eje horizontal (ya que en ese intervalo la parábola queda por debajo del eje de abscisas).

$$A=\int_{2}^{3}(-2x+7-(-x^2+2x+3))\,dx+\int_{3}^{7/2}(-2x+7)\,dx$$

Resolvemos por separado cada integral (aunque podríamos agrupar la integral de la recta en un intervalo unificado $[2,7/2]$).

$$\int_{2}^{3}(-2x+7-(-x^2+2x+3))\,dx=\int_{2}^{3}(x^2-4x+4)\,dx=[\frac{x^3}{3}-2x^2+4x]_{2}^{3}=\frac{1}{3}u^2$$

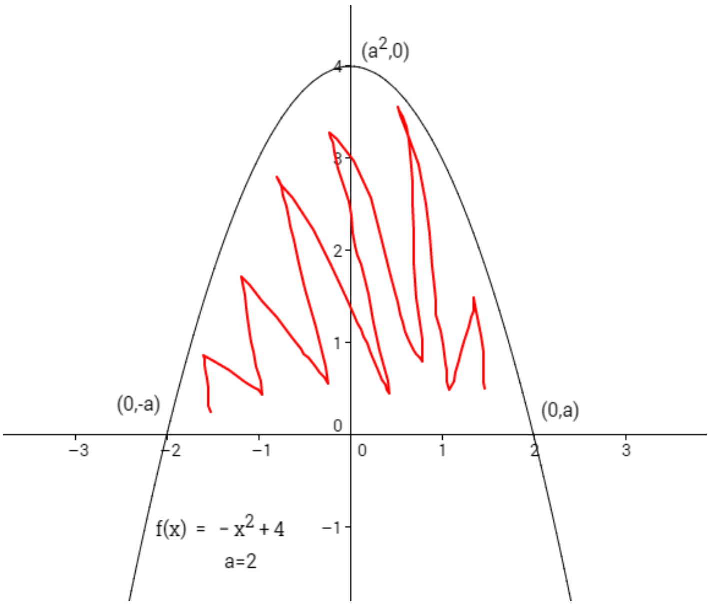
$$\int_{3}^{7/2}(-2x+7)\,dx=[-x^2+7x]_{2}^{7/2}=\frac{1}{4}u^2$$

$$A=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}u^2$$

4. Calcula el parámetro $a \in \mathbb{R}, a>0$ para que el valor del área de la región determinada por la parábola $f(x)=-x^2+a^2$ y el eje de abscisas coincida con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=-a$.

$f(x)=-x^2+a^2$ → Tenemos una parábola con máximo en $x=0$, punto de corte con el eje vertical en $(0,a^2)$ y puntos de corte con el eje horizontal en $(0,-a),(0,a)$.

La siguiente gráfica muestra un ejemplo de estos resultados, coloreando en rojo la sección encerrada por la función y el eje de abscisas.



Por simetría par de la función, el área encerrada queda:

$A=2\int_0^a(-x^2+a^2)\,dx=2\left[\frac{-x^3}{3}+a^2x\right]_0^a=2\left[\frac{-a^3}{3}+a^3-0-0\right]=2\left(\frac{-a^3+3a^3}{3}\right)=\frac{4a^3}{3}$ El enunciado el problema afirma que este área debe ser igual al valor de la pendiente de la recta tangente a la función en $x=-a$. Es decir, debemos derivar la función y evaluarla en $x=-a$ para obtener el valor de esa pendiente.

$$f(x)=-x^2+a^2 \quad\rightarrow\quad f'(x)=-2x \quad\rightarrow\quad f'(-a)=2a$$

Igualando con el área:

$\frac{4a^3}{3}=2a \quad\rightarrow\quad a=+\sqrt{\frac{3}{2}}$ → Donde tomamos valor positivo porque $a>0$.

5. La curva $y=x^2$ y la recta $y=k$, con $k>0$, determinan una región plana.

a) Calcula el valor del área de esta región en función de parámetro k .

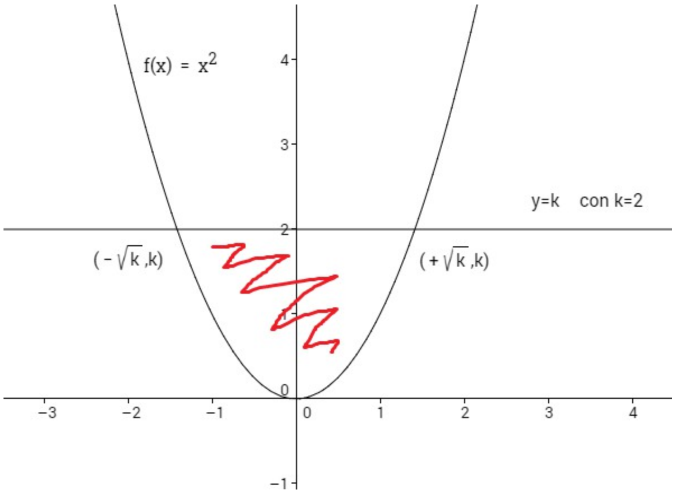
b) Encuentra el valor de k para que el área limitada sea $\sqrt{6}\ u^2$.

a) La curva $y=x^2$ es una parábola con mínimo absoluto en $(0,0)$.

La recta $y=k$ con $k>0$ es una recta horizontal, que corta a la parábola en los siguientes puntos.

$x^2=k \rightarrow x=\pm\sqrt{k}$ → Puntos de corte $(-\sqrt{k}\,,k),(+\sqrt{k}\,,k)$.

La siguiente gráfica muestra un ejemplo del área encerrada por la parábola y la recta horizontal (área resaltada en rojo).



Por simetría par de la parábola, el área total resulta:

$$A=2\int_0^{+\sqrt{k}}(k-x^2)\,dx=2\left[k\,x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{+\sqrt{k}}=2\left[k\sqrt{k}-\frac{k\sqrt{k}}{3}-0-0\right]=2\left(\frac{2k\sqrt{k}}{3}\right)=\frac{4}{3}k\sqrt{k}\quad u^2$$

b) Si el área total es igual a $\sqrt{6}\ u^2$, igualamos.

$$\frac{4}{3}k\sqrt{k}=\sqrt{6} \rightarrow \sqrt{k^3}=\frac{3\sqrt{6}}{4} \rightarrow k^3=\frac{9\cdot 6}{16}=\frac{54}{16}=\frac{27}{8} \rightarrow k=\frac{\sqrt[3]{27}}{8}=\sqrt[3]{\frac{3^3}{2^3}}=\frac{3}{2}$$

6. Considera las funciones $f(x)$ y $g(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dadas por $f(x)=6x-x^2$ y $g(x)=|x^2-2x|$.

a) Esboza el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y calcula los puntos de corte de dichas gráficas.

b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones.

a) La gráfica de $f(x)=6x-x^2$ es una parábola con máximo absoluto, donde el vértice aparece en $f'(x)=0$. Por lo tanto:

$6-2x=0 \;\rightarrow\; x=3$, $f(3)=9 \;\rightarrow$ Vértice en $(3,9)$

Los puntos de corte de $f(x)$ con el eje horizontal implican $f(x)=0$. Es decir:

$x=0$, $x=6$

En el estudio de $g(x)=|x^2-2x|$ primero rompemos el valor absoluto a trozos.

Para ello, sacamos raíces del argumento del valor absoluto y determinamos su signo en cada uno de los intervalos formados por estas raíces.

$$x^2-2x=0 \;\rightarrow\; x=0 \;,\; x=2 \;\rightarrow\; g(x)=\begin{cases} x^2-2x \;\; si \;\; x\le 0 \\ -x^2+2x \;\; si \;\; 0<x<2 \\ x^2-2x \;\; si \;\; 2\le x \end{cases}$$

Podemos dibujar la gráfica de la parábola x^2-2x y poner positivo lo que es negativo.

El vértice lo tendremos dentro del intervalo $0<x<2 \;\rightarrow\; g'(x)=0 \;\rightarrow\; -2x+2=0 \;\rightarrow\; x=1$, $g(1)=1 \;\rightarrow$ Vértice en $(1,1)$.

Los puntos de cortes de ambas funciones implica igualar sus ecuaciones, resolviendo para cada intervalo en que se ha roto la función a trozos.

Si $x\le 0$ o $2\le x \;\rightarrow\; f(x)=g(x)$

$6x-x^2=x^2-2x \;\rightarrow\; 8x-2x^2=0$

$x=0$, $x=4$

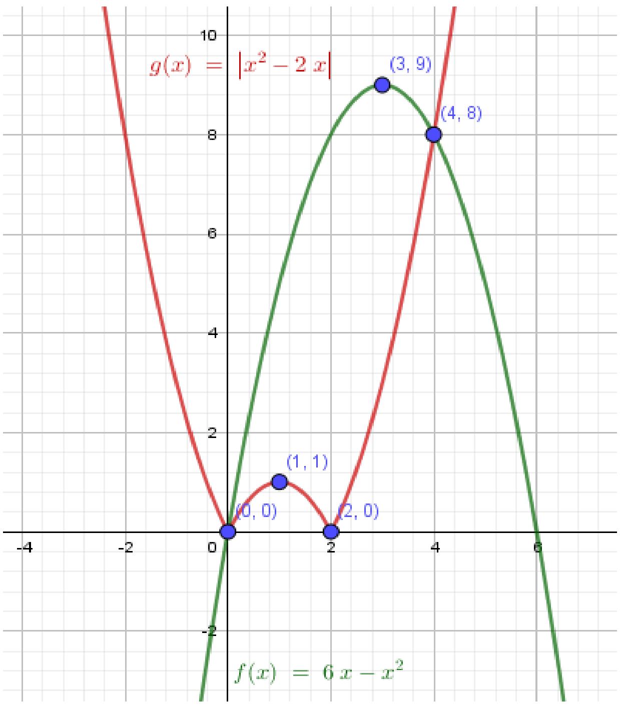
Los puntos de cortes aparecen en $(0,0)$ y $(4,8)$

Si $0<x<2 \;\rightarrow\; f(x)=g(x)$

$6x-x^2=-x^2+2x \;\rightarrow\; x=0$

No pertenece al intervalo $0<x<2$

Con los vértices, los puntos de corte con los ejes y los puntos de corte entre las gráficas ya tenemos todo lo necesario para dibujar el recinto limitado.



b) La función $f(x)$ siempre permanece por encima de la de la función $g(x)$ en el recinto cerrado por ambas curvas entre $x=0$ y $x=4$, por lo que el área es:

$$Área=\int_0^4 (f(x)-g(x))\,dx$$

Como la función $g(x)$ está definida a trozos, habrá que usar la ecuación adecuada a cada intervalo:

$$Área=\int_0^2 (6x-x^2-(-x^2+2x))\,dx+\int_2^4 (6x-x^2-(x^2-2x))\,dx$$

$$Área=\int_0^2 4x\,dx+\int_2^4 (8x-2x^2)\,dx=2[x^2]_0^2+4[x^2]_2^4-\frac{2}{3}[x^3]_2^4$$

Aplicamos la Regla de Barrow, recordando la relación entre la primitiva $F(x)$ de una función $f(x)$ a integrar en un intervalo:

$$F(x)=\int f(x)\,dx \quad \rightarrow \quad F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$$

$$Área=2[4-0]+4[16-4]-\frac{2}{3}[64-8]=8+48-\frac{112}{3}=\frac{168-112}{3}=\frac{56}{3}\,u^2$$

7. Considere las curvas $f(x)=3-x^2$ **y** $g(x)=\frac{-x^2}{4}$ **.**

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ **en el punto de abscisa** $x=1$ **y comprueba que también es tangente a la gráfica de** $g(x)$ **. Determina el punto de tangencia con la gráfica de** $g(x)$ **.**

b) Esboza el recinto limitado por la recta $y=4-2x$ **y las gráficas de** $f(x)$ **y** $g(x)$ **. Calcula todos los puntos de corte entre las gráficas (las dos curvas y la recta).**

c) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

a) Para obtener la recta tangente a una función en un punto x_0 necesitamos la imagen del punto $f(x_0)$ y la derivada de la función evaluada en el punto $f'(x_0)$ (que coincide con el valor de la pendiente de la recta tangente).

$x_0=1 \rightarrow f(1)=2$

$f'(x)=-2x \rightarrow f'(1)=-2$

De la ecuación punto-pendiente de la recta → $r:-2=\frac{y-2}{x-1} \rightarrow y=-2x+4$

Esta recta será, a su vez, tangente a la otra función $g(x)$ si solo la corta en un único punto (punto de tangencia) y la pendiente de la recta coincide con la derivada de la función $g(x)$ en ese punto de tangencia.

Igualamos recta y función → $-2x+4=\frac{-x^2}{4} \rightarrow 0=-x^2+8x-16 \rightarrow 0=(x-4)^2$ → El único punto de corte acontece para $x=4$.

Comprobamos, finalmente, que la derivada de $g(x)$ en $x=4$ coincide con -2 , valor de la pendiente de la recta.

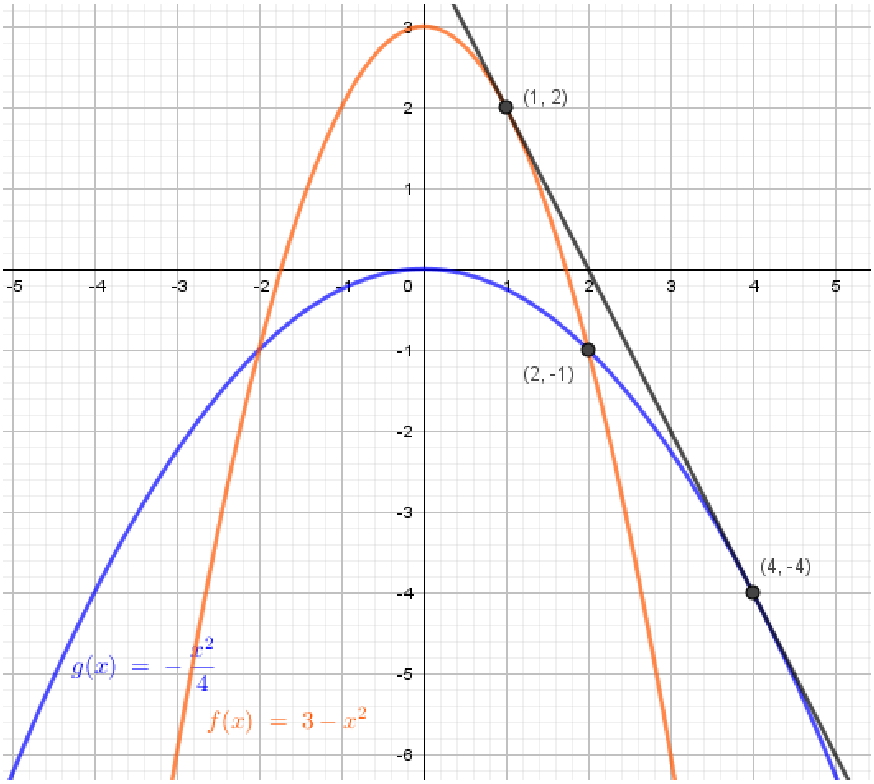
$g'(x)=\frac{-x}{2} \rightarrow g'(4)=-2$ → El punto de tangencia es $(4, g(4))=(4,-4)$

b) Para obtener el recinto limitado obtengo los vértices de cada parábola y los cortes entre las parábolas y de cada parábola con la recta (que coincide con la recta tangente del apartado anterior, por lo que ya sé que la recta y $f(x)$ solo se cortan en $x=1$, mientras que la recta y $g(x)$ se cortan solo en $x=4$).

Vértice de $f(x)=3-x^2 \rightarrow f'(x)=0 \rightarrow -2x=0$ → En $x=0$ hay un máximo absoluto.

Vértice de $g(x)=\frac{-x^2}{4} \rightarrow g'(x)=0 \rightarrow \frac{-x}{2}=0$ → En $x=0$ hay un máximo absoluto

Cortes entre las parábolas → $f(x)=g(x) \rightarrow 3-x^2=\frac{-x^2}{4} \rightarrow x=\pm 2$



c) El área encerrada simultáneamente por la recta y las dos parábolas ocurre en el intervalo $[1,4]$. Hay que darse cuenta que en $[1,2]$ la gráfica que queda por arriba es la recta y la que queda por debajo es $f(x)=3-x^2$, mientras que en $[2,4]$ la recta sigue quedando por arriba pero por debajo está la función $g(x)=\frac{-x^2}{4}$.

$$Área=\int_1^2 (4-2x-(3-x^2))\,dx+\int_2^4 (4-2x-(\frac{-x^2}{4}))\,dx$$

$$Área=\int_1^2 (1-2x+x^2)\,dx+\int_2^4 (4-2x+\frac{x^2}{4})\,dx$$

Aplicamos la Regla de Barrow, recordando la relación entre la primitiva $F(x)$ de una función $f(x)$ a integrar en un intervalo:

$$F(x)=\int f(x)\,dx \quad \rightarrow \quad F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$$

$$Área=[x]_1^2-[x^2]_1^2+\frac{1}{3}[x^3]_1^2+4[x]_2^4-[x^2]_2^4+\frac{1}{12}[x^3]_2^4$$

$$Área=(2-1)-(4-1)+\frac{1}{3}(8-1)+4(4-2)-(16-4)+\frac{1}{12}(64-8)=1\,u^2$$

8. Calcular el valor de $a>1$ sabiendo que el área encerrada por la parábola $y=-x^2+ax$ y la recta $y=x$ es igual a $\frac{4}{3}$.

Para obtener el área encerrada por ambas curvas debemos determinar.

- Los **puntos de corte** entre ambas gráficas.
- Decidir **qué función se encuentra por encima** de la otra.

Para obtener los puntos de corte igualamos ambas ecuaciones.

$$-x^2+ax=x \rightarrow -x^2+(a-1)x=0 \rightarrow x(-x+(a-1))=0 \rightarrow x=0 \quad , \quad x=a-1$$

Como $a>1 \rightarrow x=a-1>0 \rightarrow$ Este punto de corte se encontrará en el primer o cuarto cuadrante. Como la recta $y=x$ no pasa por el cuarto cuadrante, es obvio que $x=a-1>0$ indica un punto del primer cuadrante.

La parábola $y=-x^2+ax$ es cóncava, ya que el coeficiente que acompaña a x^2 es negativo. Por lo tanto, la parábola $y=-x^2+ax$ quedará por encima de la recta $y=x$ en el intervalo marcado por los puntos de corte $[0,a-1]$.

$$\acute{A}rea=\int_0^{a-1}(-x^2+ax-x)\,dx$$

Aplicamos la **regla de Barrow**.

$$\acute{A}rea=\left[\frac{-x^3}{3}+(a-1)\frac{x^2}{2}\right]_0^{a-1}=\frac{-(a-1)^3}{3}+(a-1)\frac{(a-1)^2}{2}=\frac{-2(a-1)^3+3(a-1)^3}{6}=\frac{(a-1)^3}{6}$$

Según el enunciado el área es igual a $\frac{4}{3}$.

$$\frac{(a-1)^3}{6}=\frac{4}{3} \rightarrow (a-1)^3=8 \rightarrow a-1=2 \rightarrow a=3$$

9. Sea $g(x)=\ln(x)$. Calcula el valor de $a>1$ para que el área limitada por su gráfica, el eje de abscisas y la recta $x=a$ sea igual a 1 .

La **función logaritmo es estrictamente creciente en su dominio de definición y corta al eje de abscisas en el** $x=1$. De tal forma que el área encerrada por su gráfica y el eje de abscisas en el intervalo $[1,a]$ será igual a:

$$Área=\int_1^a \ln(x)\,dx$$

Integramos por partes la integral indefinida.

$$u=\ln(x) \quad \rightarrow \quad u'=\frac{1}{x}$$

$$v'=1 \quad \rightarrow \quad v=x$$

$$\int \ln(x)\,dx=x\cdot\ln(x)-\int dx=x\cdot\ln(x)-x+C$$

Aplicamos la **regla de Barrow** en la integral definida.

$$Área=\int_1^a \ln(x)\,dx=[x\cdot\ln(x)-x]_1^a=a\cdot\ln(a)-a-0+1=a(\ln(a)-1)+1$$

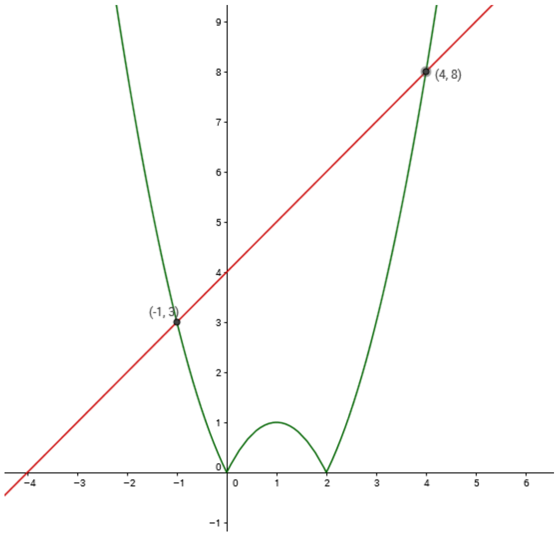
El enunciado afirma que el área debe ser igual a 1 .

$$a(\ln(a)-1)+1=1 \quad \rightarrow \quad a(\ln(a)-1)=0 \quad \rightarrow \quad a=0 \quad , \quad \ln(a)-1=0 \quad \rightarrow \quad a=e$$

De las dos soluciones nos quedamos con la positiva $a=e$.

10. Calcular el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x)=|x(x-2)|$ **y** $g(x)=x+4$ **.**

Necesitamos los puntos de corte de ambas gráficas. Podemos hacer un sencillo esbozo, para estimar los puntos de corte. Y podemos trazar la parábola contenida dentro del valor absoluto y colocar como positiva la zona donde sea negativa.



O bien de manera analítica, antes de trabajar con el valor absoluto, podemos romper la función a trozos. Las raíces del argumento del valor absoluto son $x=0$ y $x=2$, por lo que si evaluamos el signo del argumento del valor absoluto, resulta:

$$f(x)=\left\{\begin{matrix} x(x-2) & si & x<0 \\ -x(x-2) & si & 0\leq x\leq 2 \\ x(x-2) & si & x>2 \end{matrix}\right\}$$

Obtenemos los puntos de corte con la recta $g(x)=x+4$ en cada tramo.

Si $x<0 \rightarrow x(x-2)=x+4 \rightarrow x=-1$

Si $0\leq x\leq 2 \rightarrow -x(x-2)=x+4$ → No hay puntos de corte en el intervalo

Si $x>2 \rightarrow x(x-2)=x+4 \rightarrow x=4$

La recta queda por encima de la parábola, debiendo distinguir los siguientes tramos:

$$\acute{A}rea=\int_{-1}^{0}(x+4-x(x-2))\,dx+\int_{0}^{2}(x+4+x(x-2))\,dx+\int_{2}^{4}(x+4-x(x-2))\,dx$$

$$\acute{A}rea=\int_{-1}^{0}(-x^2+3x+4)\,dx+\int_{0}^{2}(x^2-x+4)\,dx+\int_{2}^{4}(-x^2+3x+4)\,dx$$

$$\acute{A}rea=\left[\frac{-x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+4x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+4x\right]_{0}^{2}+\left[\frac{-x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+4x\right]_{2}^{4}=\frac{109}{6}\quad u^2$$

11. Calcula el área limitada por la curva $y=(x+1)e^{2x}$ y las rectas $x=0$, $x=1$ e $y=0$.

Debemos determinar si la función $y=(x+1)e^{2x}$ corta al eje horizontal $y=0$ en algún punto del intervalo $[0,1]$. Para ello, igualamos ambas funciones.

$(x+1)e^{2x}=0 \rightarrow x+1=0$, $x=-1$ $\rightarrow$ o bien $e^{2x}=0$ que no posee solución

Por lo tanto, no hay puntos de corte entre ambas gráficas en el intervalo $[0,1]$.

La función $y=(x+1)e^{2x}$ es positiva tanto en $y(x=0)=1$ como en $y(x=1)=2\cdot e^2$, por lo tanto su gráfica siempre se mantiene por encima de la recta horizontal $y=0$. El área encerrada será:

$$A=\int_0^1 (x+1)e^{2x}\,dx=\int_0^1 x\cdot e^{2x}\,dx+\int_0^1 e^{2x}\,dx$$

Resolvemos cada una de las integrales indefinidas resultantes.

$\int x\cdot e^{2x}\,dx$ $\rightarrow$ aplicamos partes

$$u=x \rightarrow u'=1$$

$$v'=e^{2x} \rightarrow v'=\frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\int x\cdot e^{2x}\,dx=\frac{x\cdot e^{2x}}{2}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx=\frac{x\cdot e^{2x}}{2}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$$

$$\int e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}+D$$

Por lo que las integrales definidas que aparecen en el cálculo del área resultan.

$$A=\int_0^1 x\cdot e^{2x}\,dx+\int_0^1 e^{2x}\,dx=\left[\frac{x\cdot e^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{4}\right]_0^1+\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1$$

Aplicamos la **regla de Barrow**.

$$A=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}-0+\frac{1}{4}+\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{3e^2}{4}-\frac{1}{4}\quad u^2$$

12. Sea $g(x)=\ln(x)$. Calcula el valor de $a>1$ para que el área limitada por su gráfica, el eje de abscisas y la recta $x=a$ sea igual a 1 .

La función logaritmo es estrictamente creciente en su dominio de definición y corta al eje de abscisas en el $x=1$. De tal forma que el área encerrada por su gráfica y el eje de abscisas en el intervalo $[1,a]$ será igual a:

$$\acute{A}rea=\int_1^a \ln(x)\,dx$$

Ya que el logaritmo es una función positiva en $x>1$. Integramos por partes la integral indefinida.

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)\,dx$$

$$u(x)=\ln(x) \quad \rightarrow \quad u'(x)=\frac{1}{x}$$

$$v'(x)=1 \quad \rightarrow \quad v(x)=x$$

$$u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)\,dx=\int \ln(x)\,dx=x\cdot\ln(x)-\int dx=x\cdot\ln(x)-x+C$$

Aplicamos la **regla de Barrow** en la integral definida: $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$, siendo $F(x)$ una primitiva de $f(x)$.

$$\acute{A}rea=\int_1^a \ln(x)\,dx=[x\cdot\ln(x)-x]_1^a=a\cdot\ln(a)-a-0+1=a(\ln(a)-1)+1$$

El enunciado afirma que el área debe ser igual a 1 .

$$a(\ln(a)-1)+1=1 \quad \rightarrow \quad a(\ln(a)-1)=0 \quad \rightarrow \quad a=0 \quad , \quad \ln(a)-1=0 \quad \rightarrow \quad a=e$$

De las dos soluciones nos quedamos con la positiva $a=e$, ya que el enunciado afirma $a>1$.

13. Sean las funciones $f(x)=\frac{x^2}{4}$ y $g(x)=2\sqrt{x}$. Hallar los puntos de corte de ambas gráficas, esbozar el recinto limitado por las gráficas entre los puntos de corte y calcular su área.

La parábola $f(x)=\frac{x^2}{4}$ es convexa en todo su dominio, con un mínimo relativo y absoluto en $(0,0)$.

La raíz $g(x)=2\sqrt{x}$ es cóncava en todo su dominio.

Los puntos de corte entre ambas funciones se obtienen igualando sus expresiones matemáticas:

$$\frac{x^2}{4}=2\sqrt{x} \rightarrow x^2=8\sqrt{x} \rightarrow x^4=64x \rightarrow x^4-64x=0 \rightarrow x(x^3-64)=0$$

$$x=0 \quad , \quad x=4$$

Para saber qué función está por encima en el intervalo $[0,4]$, tomamos un punto del interior del intervalo y comparamos las imágenes.

$$f(2)=\frac{2^2}{4}=1 \quad , \quad g(2)=2\sqrt{2} \rightarrow f(2)<g(2)$$

La función $g(x)$ permanece por encima de $f(x)$ en el intervalo $[0,4]$. Por lo tanto, el área encerrada por ambas gráficas se calcula:

$$\acute{A}rea=\int_0^4 (g(x)-f(x))\,dx=\int_0^4 \left(2\sqrt{x}-\frac{x^2}{4}\right)dx=2\int_0^4 \sqrt{x}\,dx-\frac{1}{4}\int_0^4 x^2\,dx$$

$$\acute{A}rea=2\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^4-\frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4=\frac{4}{3}[x^{3/2}]_0^4-\frac{1}{12}[x^3]_0^4=\frac{4}{3}(8-0)-\frac{1}{12}(64-0)=\frac{32}{3}-\frac{64}{12}=\frac{64}{12}=\frac{16}{3}u^2$$