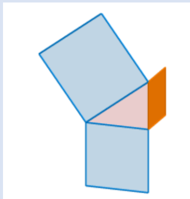
Von der Ebene in den Raum

Die Sätze von Thales und Pythagoras

Hans-Jürgen Elschenbroich, Saarbrücken 16.9.2023

Wilfried Koch: Pythagoras. Rietberg



Erster Schritt in den Raum.

Agenda

1. **Pythagoras & Thales 2D über AB**
2. **Pythagoras & Thales 3D über AB**
3. **Pythagoras 3D über ABC**
4. **Thales 3D über ABC**
5. **Epilog**

GeoGebra Book

www.geogebra.org/m/zmaswq68

1. Pythagoras & Thales 2D über AB

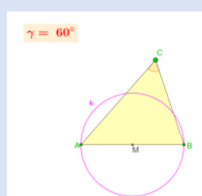
1.1 Statische vs. dynamische Sicht

Der Satz des Thales und der Satz des Pythagoras sind wohl die beiden bedeutenden Sätze der ebenen Geometrie, die in jedem Unterricht in der Sekundarstufe vorkommen. Sie hängen auch eng zusammen.

Traditionelle Sicht: Beschränkung auf *rechtwinklige* Dreiecke.

Dynamische Sicht: Untersuchung *beliebiger* Dreiecke.
Typisch seit dem Aufkommen von DGS (Elschenbroich & Seebach, 1999).
Ermöglicht auch die Verbindung der beiden Sätze und ihre Verallgemeinerungen.

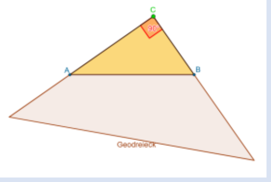
1.2 Satz des Thales 2D über AB



Drei Fallunterscheidungen. Satz des Thales als Spezialfall.

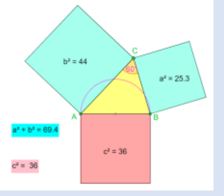
1.3 Kehrsatz des Thales 2D über AB

Rechtwinkelhaken (orthogonales Zweibein). A und B fixiert.



Thaleskreis als Spur/ Ortslinie von C.

1.4 Satz des Pythagoras 2D über AB



Drei Fallunterscheidungen. Satz des Pythagoras als Spezialfall.

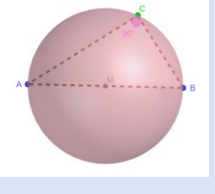
1.4 Spiralcurriculum

- Verallgemeinerung Thales: Umfangswinkelsatz.
- Verallgemeinerung Pythagoras: Cosinussatz.

Dies ist schon alles *qualitativ* direkt mit angelegt!

2. Pythagoras & Thales 3D über AB

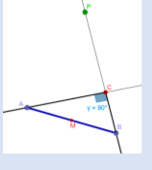
2.1 Satz des Thales 3D über AB



Wenn C *auf* der Thaleskugel über AB liegt, ist das Dreieck ABC rechtwinklig.

2.2 Kehrsatz des Thales 3D über AB

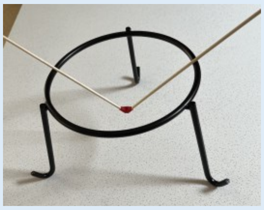
Rechtwinkelhaken im Raum.



Thaleskugel als Ortsfläche.
Werkzeug-Problem bei Cabri 3D und GeoGebra.

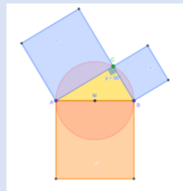
2.4 Rechtwinkelpyramide im Kreisring

Wie bewegt sich ein Rechtwinkelhaken im Kreisring?



2.3 Satz des Pythagoras 3D über AB

AB ist der **Durchmesser** einer Kugel k und C ein weiterer Punkt auf der Kugel (Sphäre).
Dann ist der Winkel γ = Winkel(ACB) immer ein rechter Winkel (Thales-Satz).
In der Ebene e = Ebene(A,B,C) ist eine Pythagorasfigur gezeichnet.



Perspektivische Verzerrung.

3. Pythagoras über ABC

3.1 Entdeckung Faulhaber

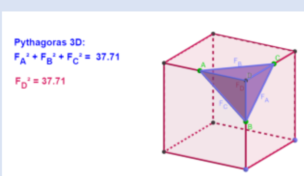
Johannes Faulhaber (1580 - 1635) entdeckte, dass es zum Satz des Pythagoras eine räumliche Version gibt (Schmidt 2016, Baptist 1997).

Räumliche Entsprechung zum Rechtwinkelhaken: Rechtwinkelpyramide (orthogonales Dreibein, Quaderecke).

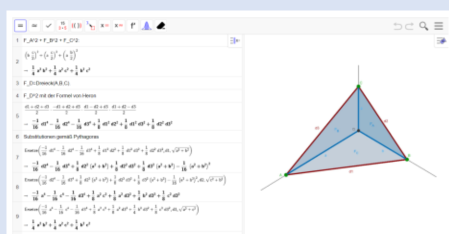
Satz: Die Quadrate der drei rechtwinkligen Seitenflächen sind zusammen so groß wie das Quadrat der ‚Grundfläche'.

3.2 Interaktive Entdeckung

Bei einem Würfel (oder Quader) wird an einem Eckpunkt D eine dreiseitige Pyramide ABCD abgeschnitten. In D stoßen somit drei rechtwinklige Dreiecke zusammen: F_A, F_B, F_C.
F_D = ABC ist dann die Grundfläche dieser Pyramide.
Sie kann durch Ziehen an den grünen Punkten A, B, C verändert werden.



3.3 Beweis



Flächenberechnungen: Dreimal rechtwinkliges Dreieck, einmal Heron-Flächenformel.

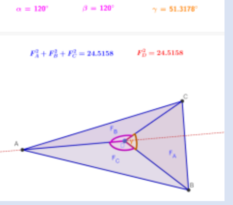
3.4 Flächen-Quadrate?

Wenn wir mit Maßeinheiten arbeiten, kommen wir durch das Quadrieren von Quadraten von cm^2 auf cm^4 als Einheit.

„Das Wort ‚Quadrat' ist also nicht im geometrischen Sinne eines Vierecks mit vier gleich langen Seiten und vier rechten Winkeln zu verstehen, sondern *algebraisch* als Multiplikation einer Größe mit sich selbst. Das Quadrat eines Flächeninhalts spielt im vierdimensionalen Raum und kann nicht mehr gezeichnet werden. Es handelt sich um eine Abstraktion." (Walser 2019)

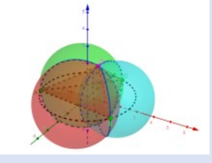
3.5 Umkehrung Pythagoras 3D?

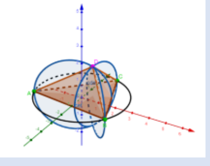
In 3D gilt die Umkehrung nicht allgemein!
Es gibt dreiseitige Pyramiden, die die Flächenbedingung erfüllen, aber keine rechten Winkel bei D haben (Brawer 1994; Walser 2014).



3.6 Konstruktion einer Rechtwinkelpyramide?

Idee: Thaleskugeln über die Seiten des Dreiecks ABC.

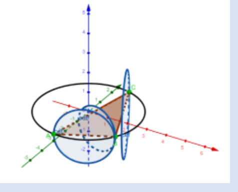




Gemeinsamer Schnittpunkt der Thaleskugeln: D. Drei rechte Winkel bei D.

3.7 Konstruktion einer Rechtwinkelpyramide

Problem: Schneiden sich alle drei Thaleskugeln *immer* in einem Punkt D?

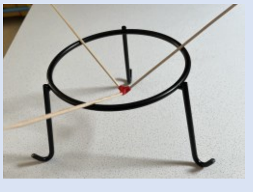


Nein! Aber wann und warum nicht?
Wir müssen den Thales-3D genauer untersuchen.

4. Thales 3D über ABC

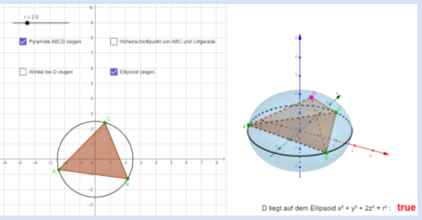
4.1 Rechtwinkelpyramide im Kreisring

Wie bewegt sich eine Rechtwinkel*pyramide* im Kreisring?
Unterschied zum Rechtwinkel*haken*?



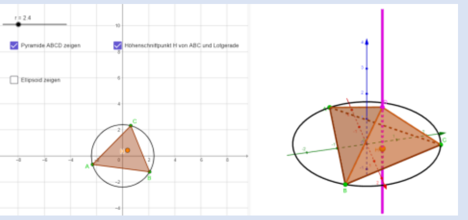
4.2 Ellipsoid als Ortsfläche

Wie bewegt sich eine Rechtwinkelpyramide im Kreisring? Ortsfläche von D?
(Bubeck 1994; Seebach 1992; Schumann 2014)



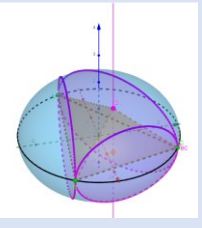
4.3 Höhenschnittpunkt & Lotgerade

Auf den Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABC kommt es an!

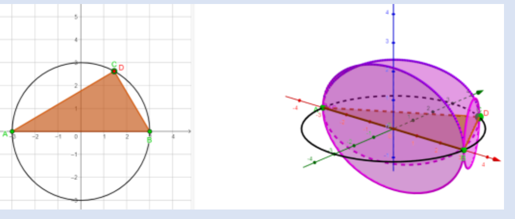


4.4 Ellipsoid und Begrenzungsflächen

D liegt auf einem ‚abgeschnittenen' Ellipsoid.



4.5 Zurück in die zweite Dimension



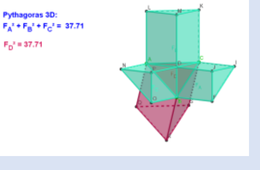
Satz des Thales als 2D-Spezialfall.

5. Pythagoras 3D über ABC

5.1 Visualisierung Pythagoras 3D (1)

Höherdimensionale Objekte niederdimensional darstellen?!

Idee 1: Über den Seitenflächen der Pyramide ABCD Prismen mit dem passenden Volumen aufsetzen.

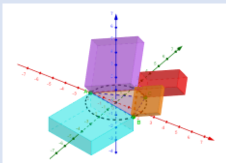


Problem: Eignet sich nicht, den 2D Pythagoras als Spezialfall zu enthalten.

5.2 Visualisierung Pythagoras 3D (2)

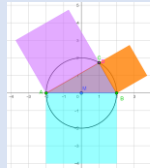
Idee 2: An Kanten der Seitenflächen der Pyramide ABCD **Quadrate ansetzen**.

Und diese dann mit passender Höhe so Prisman **extrudieren**, dass die Volumina den Quadraten der Flächen entsprechen.



5.3 Pythagoras 2D als Spezialfall

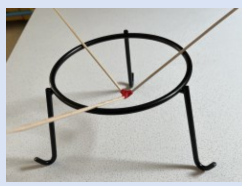
B auf die x-Achse ziehen: Ergibt in der 2D Ansicht bzw. xy-Projektion 3D die übliche Pythagoras-Figur!
Die Pyramide ABCD wird zum Dreieck, C und D fallen zusammen.
Das rote Prisma verschwindet, das orangene entartet zum Quadrat.



6. Epilog und Rückblick

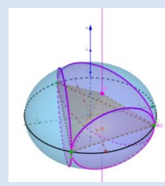
6.1 Raumgeometrie …

… be-greifen



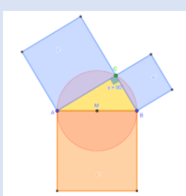
Modell

… ein-sehen



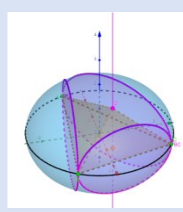
Zeichnung, dyn. Visualisierung

6.2 I live on the second floor … (Suzanne Vega)



Klare Verhältnisse im Flächenland

6.3 Space Oddity (David Bowie)



(scheinbare) Sonderbarkeiten in der dritten Dimension

6.4 Up up and away (Fith Dimension)

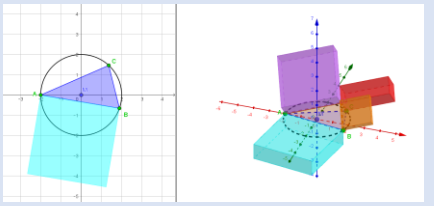
Vierdimensionale Erweiterung (Walser):
Wir arbeiten im R^4 mit der konvexen Hülle von fünf Punkten, einem 4-Simplex.

Nachteil: Fehlende Veranschaulichung.

Vorteil: „Für den n-dimensionalen Fall ist das jetzt nur noch eine langweilige Schreibübung."

walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/V/Verallg_Pythagoras2/Verallg_Pythagoras2.htm

6.5 Back to the Earth (Jason Mraz)



Ausgehend von 3D: 2D wird zum trivialen Spezialfall (Thales)!
Manchmal ist es aber auch nicht so einfach … (Pythagoras, cm^4).

6.6 Und die Moral von der Geschicht'

Es ist oft nicht einfach, vom Zweidimensionalen ins Dreidimensionale durchzusteigen …
Umgekehrt auch nicht …
Vorschnelle Verallgemeinerungen können leicht in die Irre führen.

Kontakt

Hans-Jürgen Elschenbroich
elschenbroich@t-online.de

www.geogebra.org/m/zmaswq68

Literatur

- Baptist, Peter (1997): Pythagoras und kein Ende. Klett.
- Brawer, Robert (1994): Ein Analogon im Raum zum Cosinussatz. In: Praxis der Mathematik Heft 5/1992. Aulis Verlag. S. 212 - 213.
- Bubeck, Heinrich (1994): Auf der Suche nach einer 'einfachen' räumlichen Entsprechung zum Satz des Thales. In: MNU Heft 5/1994. Verlag Klaus Seeberger. S. 264 - 268.
- Elschenbroich, Hans-Jürgen (2023): Thales & Pythagoras – Von der Ebene in den Raum. GeoGebra Book. https://www.geogebra.org/m/zmaswq68
- Elschenbroich, Hans-Jürgen & Seebach, Günter (1999): Dynamisch Geometrie entdecken. Elektronische Arbeitsblätter mit Euklid für die Klasse 7/8. Ferd. Dümmler's Verlag, Bonn (danach Stam Verlag)
- Schmidt, Reinhard (2016): Pythagoras 3D. https://www.geogebra.org/m/Nwhc3aRS
- Schumann, Heinz (2007): Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum. Franzbecker Verlag. S. 144 - 146.
- Seebach, Karl (1992): Verallgemeinerung des Satzes von Thales auf 3 Dimensionen. In: Praxis der Mathematik Heft 5/1992. Aulis Verlag. S. 209 - 212.
- Walser, Hans (2014, 2019): Verallgemeinerungen des Satzes von Pythagoras. https://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/V/Verallg_Pythagoras2/Verallg_Pythagoras2.htm
- Walser, Hans (2019): Satz des Pythagoras im Raum. In: mathematik lehren 216.