Extremwertprobleme und Funktionsgraphen (Abstände)

H. Wuschke

Aufgabe A1.1.3 Abitur 2008

Gegeben sind zwei Funktionen durch die Gleichungen

$$f_1(x) = \frac{1}{18}x^3 - 2x \quad \text{und} \quad f_2(x) = -\frac{2}{9}x^3 + 0,5x \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

Gegeben sind die Punkte $Q\,(u|f_1(u))$ und $R\,(u|f_2(u))$ im Intervall $0 \leqq u \leqq 3, u \in \mathbb{R}$.
Berechnen Sie den Abstand der Punkte Q und R für $u = 1$

Ermitteln Sie rechnerisch den Wert für u so, dass der Abstand zwischen den Punkten Q und R maximal wird.

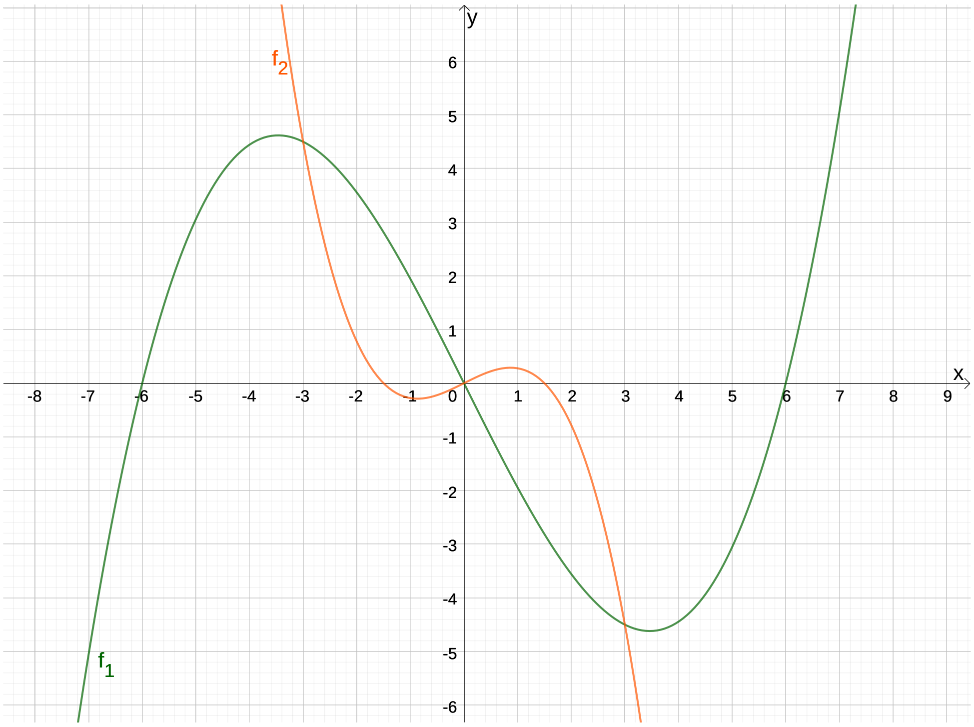

Abbildung 1: Darstellung der Funktionen

Für den Abstand d (engl. *distance*) zweier Punkte gilt: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

In der Aufgabe gilt für den Abstand vereinfacht:
$d(u) = \sqrt{(u-u)^2 + (f_2(u) - f_1(u))^2} = \sqrt{(f_2(u) - f_1(u))^2} = |f_2(u) - f_1(u)|$
Unter der Bedingung $0 \leqq u \leqq 3$ gilt sogar $|f_2(u) - f_1(u)| = f_2(u) - f_1(u)$.

Für $u = 1$ ist $Q\left(1| - \frac{35}{18}\right)$ und $R\left(1|\frac{5}{18}\right)$ und der Abstand: $f_2(1) - f_1(1) = \frac{20}{9} \approx 2,22$

Für den maximalen Abstand, nutzt man die Abstandsfunktion

$$d(u) = f_2(u) - f_1(u) = -\frac{5}{18}u^3 + 2,5u \;; \quad 0 \leqq u \leqq 3$$

Gesucht ist der Hochpunkt der Abstandsfunktion. In der Zeichnung der Funktion kann der Hochpunkt abgelesen werden: $H(1,73|2,89)$. Der Wert u ist also 1,73. Die Aufgabenstellung legt den Schwerpunkt allerdings auf rechnerisch, also muss der Hochpunkt auf übliche Weise ermittelt werden.

$$d'(u) = -\frac{5}{6}u^2 + 2,5 \qquad d''(u) = -\frac{5}{3}u$$

$d'(u) = 0 \quad \rightarrow \quad u_1 = -\sqrt{3}$ (entfällt, da es < 0 ist) $\quad$ und $\quad u_2 = \sqrt{3}$
$d''(\sqrt{3}) = -\frac{5}{3} \cdot \sqrt{3} < 0 \quad \rightarrow \quad$ bei $u = \sqrt{3} \approx 1,73$ liegt ein lokales Maximum vor.

Antwort: Für $u = \sqrt{3}$ wird der Abstand von Q und R maximal.