0.1. Planos en $\mathbb{R}^3$

Comencemos recordando la noción de combinación lineal.

Combinación lineal

Un vector v es *combinación* lineal de los vectores $v_1,\dots,v_n$ si existen escalares $c_1,\dots,c_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$v = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n.$$

Los escalares $c_1, c_2, \dots, c_n$ se llaman las coordenadas del vector v.

Por ejemplo, el vector $(-2,5)$ es combinación lineal de los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$ pues existen escalares $c_1 = -2$ y $c_2 = 5$ tales que

$$(-2,5) = -2\,(1,0) + 5\,(0,1).$$

Ejemplo 0.1

Estudiar si el vector $v = (-4,2)$ es combinación lineal de los vectores $v_1 = (-1,2)$ y $v_2 = (3,2)$.

Solución
De acuerdo a la definición de combinación lineal debemos determinar escalares α y β tales que

$$(-4,2) = \alpha\,(-1,2) + \beta\,(3,2).$$

Entonces debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} -\alpha + 3\beta & = & -4 \\ 2\alpha + 2\beta & = & 2 \end{cases}$$

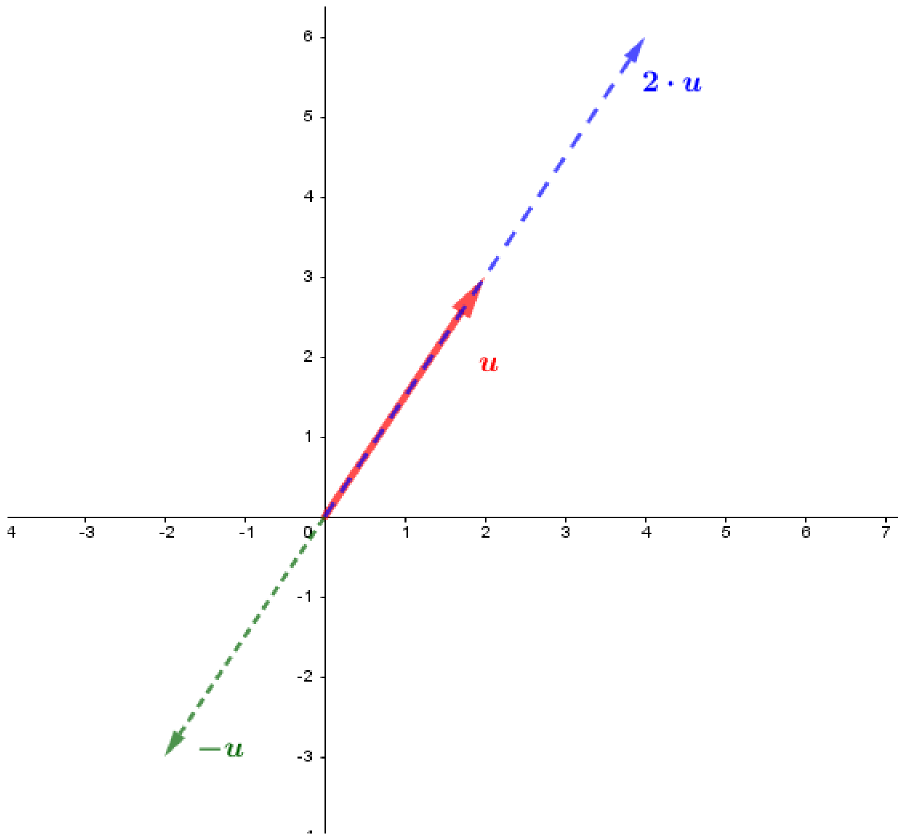
Resolvemos el sistema y nos queda $\alpha = \frac{7}{4}$ e $\beta = -\frac{3}{4}$. Luego se es sencillo comprobar que

$$(-4,2) = (\frac{7}{4})\,(-1,2) + (-\frac{3}{4})\,(3,2).$$

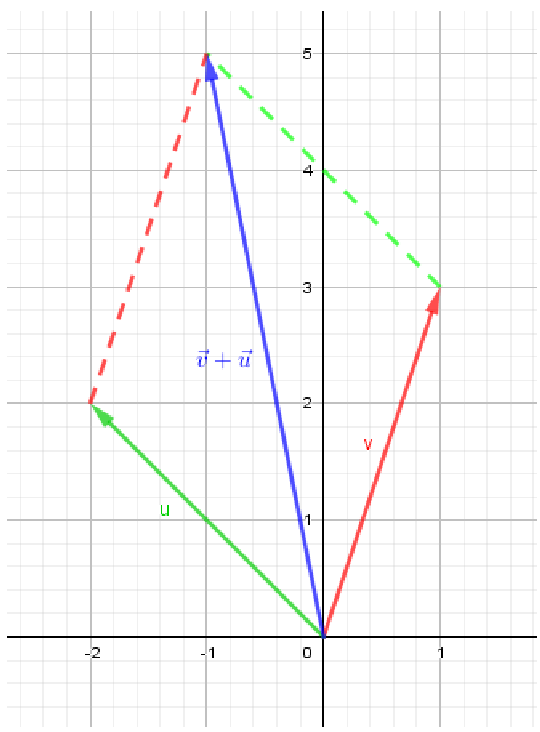
Interpretación gráfica

Recordemos que al multiplicar un vector v por un escalar c, geométricamente, al hacer $v \cdot c$ nos da otro vector u que tiene la misma dirección que v pero que puede cambiar de sentido y su longitud.

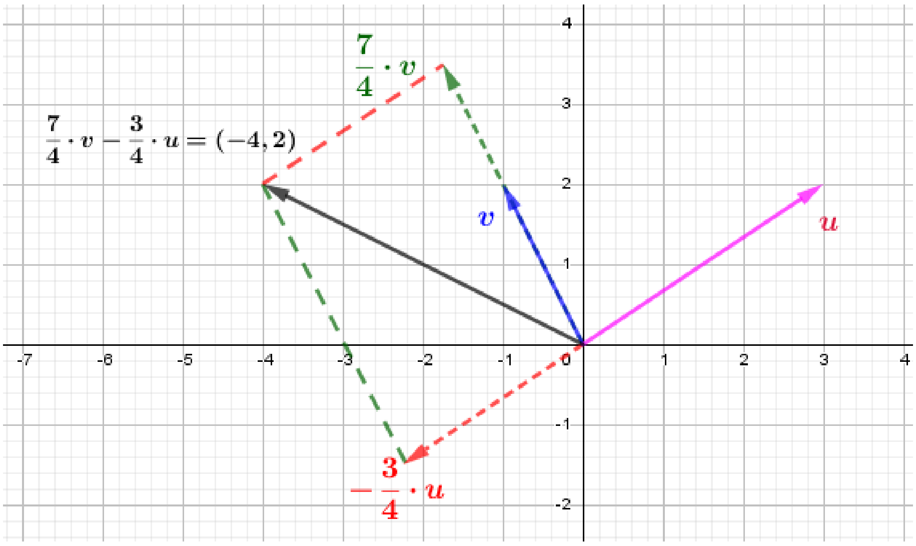
Por ejemplo: Sea $u = (2,3)$ entonces $2 \cdot u = 2 \cdot (2,3) = (4,6)$ y $-u = -(2,3) = (-2,-3)$



En el capítulo anterior observamos que ocurría al sumar dos vectores:



¿Qué ocurrirá si graficamos entonces la combinación lineal del ejemplo anterior?



Entonces observemos que al multiplicar por un escalar a un vector lo estamos 'estirando' y cambiando de sentido. Si pensamos en algo más genérico sin un escalar en particular, entonces al multiplicar por un escalar (genérico) a un vector lo que genera es una **recta**.

¿Qué ocurre si pensamos en lo mismo pero con la combinación lineal de dos vectores?

Estaríamos llenando de vectores muchos paralelogramos. Esto es, estaríamos generando un **plano.** Por lo tanto, para generar un plano necesitaremos dos vectores que entre sí no sean combinación lineal uno de otro (si no generaríamos una recta) y para 'rellenarlo' de otros vectores podremos entonces realizar combinaciones lineales. Es así que entonces podemos definir al plano a partir de su ecuación vectorial:

La ecuación vectorial del plano:

Dados dos vectores independientes entre sí u y v de $\mathbb{R}^3$. El plano que generan es:

$$\pi : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = \alpha \cdot u + \beta \cdot v,\ con\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$