Problemas – Tema 3

Problemas resueltos - 11 - producto y cociente en notación polar

1. Determinar los valores reales a **y** b **para que el cociente** $\frac{a+2i}{3+bi}$ **sea igual a** $(\sqrt{2})_{45^o}$ **.**

En el cociente, multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador (recuerda que $i^2=-1$).

$$\frac{a+2i}{3+bi}\cdot\frac{3-bi}{3-bi}=\frac{3a-abi+6i+2b}{9+b^2}=\frac{3a+2b}{9+b^2}+\frac{6-ab}{9+b^2}\cdot i$$

El número complejo en forma polar lo expresamos en forma binómica, con ayuda de la ecuación trigonométrica.

$$(\sqrt{2})_{45^o}=\sqrt{2}\cdot\cos(45^o)+\sqrt{2}\cdot sen(45^o)i=1+i$$

Igualamos parte real con parte real, e imaginaria con imaginaria.

$$\left\{\begin{matrix}\frac{3a+2b}{9+b^2}=1\\ \frac{6-ab}{9+b^2}=1\end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix}3a+2b=9+b^2\\ 6-ab=9+b^2\end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix}3a+2b=9+b^2\\ -ab=3+b^2\end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix}3a+2b=9+b^2\\ a=\frac{-3-b^2}{b}\end{matrix}\right\}$$

Sustituimos el valor de a de la segunda ecuación del sistema en la primera ecuación.

$$3\cdot\frac{-3-b^2}{b}+2b=9+b^2 \to -9-3b^2+2b^2=9b+b^3 \to -9-b^2=9b+b^3$$

$b^3+b^2+9b+9=0$ → aplico Rufinni

	1	**1**	**9**	**9**
-1		-1	0	-9
	1	0	9	0

Es decir → $b^3+b^2+9b+9=0$ → $(b+1)(b^2+9)=0$ → Única solución real → $b=-1$

Si $b=-1$ → $a=\frac{-3-1}{-1}=4$

2. Sea el afijo $A(4,4)$ perteneciente al cuerpo de los números complejos. ¿Por qué número complejo habrá que multiplicarlo para que el resultado del producto sea el afijo complejo $B(-8\sqrt{3},8)$?

Expresamos ambos complejos en forma polar.

$$A(4,4) \rightarrow 4+4i \rightarrow módulo=\sqrt{32}=4\sqrt{2} \quad , \quad fase=arcotg(\frac{4}{4})=45º \rightarrow (4\sqrt{2})_{45º}$$

$$B(-8\sqrt{3},8) \rightarrow -8\sqrt{3}+8i \rightarrow módulo=\sqrt{64\cdot 3+64}=16 \quad , \quad fase=arcotg(\frac{1}{-\sqrt{3}})=-30º$$

$B(-8\sqrt{3},8)$ pertenece al segundo cuadrante → $fase=-30º=330º \rightarrow 150º \rightarrow (16)_{150º}$

Expresamos la relación del enunciado.

$$(4\sqrt{2})_{45º}\cdot r_{\alpha}=(16)_{150º} \rightarrow (4\sqrt{2}\cdot r)_{45º+\alpha}=(16)_{150º}$$

Donde r_{α} es el complejo que estamos buscando, en forma polar. Igualamos módulos e igualamos fases.

$$4\sqrt{2}\cdot r=16 \rightarrow r=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

$$45º+\alpha=150º \rightarrow \alpha=105º$$

Solución → $r_{\alpha}=(2\sqrt{2})_{105º+360º k} \quad , k\in\mathbb{Z}$

3. Obtener la forma binómica y polar del número complejo $(\sqrt{3},1)$. Obtener también su conjugado y su inverso en forma polar.

$(\sqrt{3},1) \rightarrow \sqrt{3}+i$ → forma binómica

$Módulo=\sqrt{3+1}=2$, $fase=arctg(\frac{1}{\sqrt{3}})=30º \rightarrow (2)_{30º}$ → forma polar

Conjugado → $\sqrt{3}-i \rightarrow (2)_{330º}$ → forma polar del conjugado

Inverso → $\frac{1}{(2)_{30º}}=\frac{1_{0º}}{(2)_{30º}}=(\frac{1}{2})_{-30º}=(\frac{1}{2})_{330º+360º k}$ $, k\in\mathbb{Z}$ → forma polar del inverso

4. El producto de dos números complejos es $3i$, y el cubo de uno de ellos dividido por el otro es $1/3$. Calcúlalos.

Planteamos las ecuaciones a partir de las condiciones del enunciado.

$$\begin{pmatrix} z_1 . z_2 = 3i \\ \dfrac{(z_1)^3}{z_2} = \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$$

En notación polar, con módulo y fase, cada complejo quedaría:

$z_1 = m_\alpha$

$z_2 = m'_\beta$

$$\begin{Bmatrix} m_\alpha \cdot m'_\beta = 3i \\ \dfrac{(m_\alpha)^3}{m'_\beta} = \dfrac{1}{3} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} m_\alpha \cdot m'_\beta = 3_{90^o} \\ \dfrac{(m_\alpha)^3}{m'_\beta} = \left(\dfrac{1}{3}\right)_{0^o} \end{Bmatrix}$$

Y obtenemos un sistema para los módulos y un sistema para las fases:

$$\begin{Bmatrix} m \cdot m' = 3 \\ \dfrac{(m)^3}{m'} = \dfrac{1}{3} \end{Bmatrix}$$ → sistema para los módulos → $m = 1$, $m' = 3$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 = 90^o \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 = 0^o \end{Bmatrix}$$ → sistema para las fases → $\alpha_1 = 22{,}5^o$, $\alpha_2 = 67{,}5^o$

Solución: $z_1 = 1_{22{,}5^o}$, $z_2 = 3_{67{,}5^o}$

5. El producto de dos números complejos es $4i$, y el cubo de uno de ellos dividido por el otro resulta $\frac{1}{4}$. Halla los módulos y los argumentos de ambos complejos de partida.

Los dos números complejos, en forma polar, son:

$$z_1=|z_1|_\alpha \quad , \quad z_2=|z_2|_\beta$$

El valor imaginario puro $4i$ en forma polar es 4_{90^o} . Las condiciones a cumplir son:

$$|z_1|\cdot|z_2|=4$$
$$\alpha+\beta=90^o$$

El valor real $\frac{1}{4}$ en forma polar es $\left(\frac{1}{4}\right)_{0^o}$. Las condiciones a cumplir son:

$$\frac{|z_1|^3}{|z_2|}=\frac{1}{4}$$
$$3\cdot\alpha-\beta=0^o$$

Podemos formar dos sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas cada uno.
El primer sistema implica a las fases.

$$\left\{\begin{array}{c}\alpha+\beta=90^o\\ 3\alpha-\beta=0^o\end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación $\beta=3\alpha$ → Sustituimos en la primera → $4\alpha=90^o$
Por lo tanto → $\alpha=22{,}5^o$ y $\beta=67{,}5^o$

El segundo sistema implica a los módulos.

$$\left\{\begin{array}{c}|z_1|\cdot|z_2|=4\\ \dfrac{|z_1|^3}{|z_2|}=\dfrac{1}{4}\end{array}\right\}$$

De la primera ecuación → $|z_2|=\frac{4}{|z_1|}$ → Sustituimos en la segunda → $\frac{|z_1|^3}{\frac{4}{|z_1|}}=\frac{1}{4}$ → $|z_1|^4=1$ →

$|z_1|=1$ → Tomamos solución positiva porque el módulo, por definición, es una cantidad positiva.

Por lo tanto → $|z_2|=4$

La solución final resulta:

$$z_1=1_{22,5^o} \quad , \quad z_2=4_{67,5^o}$$

Donde podemos sumar, a cada fase, el número de vueltas completas de 360º que queramos.

6. Desarrolla la siguiente potencia y deja el resultado en forma binómica $(1-i)^5$

Trabajo en polares: $z=1-i$

Módulo: $|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

Fase: $\alpha=arctg(\frac{-1}{1})=cuarto\ cuadrante=-45^o+360^o=315^o+360^o k\ ,k\in\mathbb{Z}$

$$z^5=(1-i)^5 \quad\rightarrow\quad z^5=((\sqrt{2})_{315^o})^5=((\sqrt{2})^5)_{5\cdot 315^o}=(4\cdot\sqrt{2})_{1575^o}$$

Realizamos la división entera para expresar la fase dentro del intervalo [0º , 360º]. Así, al dividir la fase 1575º entre 360º obtenemos un cociente de 4 y un resto de 135º. Por lo que:

$$z^5=(4\cdot\sqrt{2})_{135^o}$$

Pasamos a binómica con la forma trigonométrica.

$$z^5=(4\cdot\sqrt{2})\cdot\cos(135^o)+(4\cdot\sqrt{2})\cdot sen(135^o)\cdot i$$

Donde la parte real es → $a=(4\cdot\sqrt{2})\cdot\cos(135^o)=4\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{-\sqrt{2}}{2}=-4$

Y la parte imaginara es → $b=(4\cdot\sqrt{2})\cdot sen(135^o)=4\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=4$

$$z^5=-4+4i$$

7. Dado el número complejo $z=(-2,-2)$ **obtener su notación binómica, el opuesto, el inverso, el conjugado y la notación polar .**

Binómico → $z=-2-2i$

Opuesto → $z=2+2i$

Inverso → $z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{-2-2i}\cdot\frac{2+2i}{2+2i}=\frac{2+2\text{i}}{4+4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$

Conjugado → $\bar{z}=-2+2i$

Notación polar:

$|z|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$\alpha=arctg\left(\frac{-2}{-2}\right)=tercer\ \ cuadrante=45º+180º=225º+360º\,k\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

$z=(2\sqrt{2})_{225º}$