# Teoría – Tema 5

# Teoría - 10 - Vectores linealmente independientes

## Vectores linealmente independientes o sistema libre

Un conjunto de vectores $\vec{u}_1$ , $\vec{u}_2$ , $\vec{u}_3$ ,..., $\vec{u}_n$ de un espacio vectorial son **linealmente independientes** si se cumple:

$\alpha \cdot \vec{u}_1 + \beta \cdot \vec{u}_2 + \gamma \cdot \vec{u}_3 + ... + \delta \cdot \vec{u}_n = \vec{0}$ → con $\alpha = \beta = \gamma = ... = \delta = 0$ → Todos los coeficientes nulos

El factor $\vec{0}$ indica el vector nulo.

Es decir, no hay ninguna ecuación lineal que relacione a todos los vectores entre sí, salvo que todos los coeficientes sean iguales a cero.

SI te das cuenta, la definición de vectores linealmente independientes es opuesta a la definición de que todos los vectores estén en combinación lineal. Por eso, a un sistema de vectores linealmente independientes se le denomina **sistema libre de vectores o sistema sin combinación lineal**.

**Ejercicio 1 resuelto**

**Comprobar que los vectores $\hat{i} = (1,0,0)$ , $\hat{j} = (0,1,0)$ y $\hat{k} = (0,0,1)$ son linealmente independientes en $V^3$ .**

Planteamos la definición.

$$\alpha \cdot \hat{i} + \beta \cdot \hat{j} + \gamma \cdot \hat{k} = \vec{0}$$

$$\alpha \cdot (1,0,0) + \beta \cdot (0,1,0) + \gamma \cdot (0,0,1) = (0,0,0) \quad \rightarrow \quad (\alpha, \beta, \gamma) = (0,0,0)$$

Igualamos componentes y obtenemos, como única solución posible, la solución trivial:

$$\alpha = 0$$

$$\beta = 0$$

$$\gamma = 0$$

Esto implica que no existe ninguna combinación lineal entre los tres vectores, por lo que forman un sistema libre. Los tres vectores son linealmente independientes.

# Usar Gauss para comprobar si un conjunto de vectores son dependientes o independientes en función de un parámetro inicial. Concepto de Rango

Cuando aplicamos la definición formal de independencia lineal:

$$\alpha \cdot \vec{u}_1 + \beta \cdot \vec{u}_2 + \gamma \cdot \vec{u}_3 + ... + \delta \cdot \vec{u}_n = \vec{0}$$

Lo que obtenemos es un sistema de ecuaciones homogéneo (con todos los términos independientes igual a cero). Ya sabemos que los sistemas homogéneos siempre tienen solución.

Si el sistema es SCD con solución única con todas las incógnitas igual a 0, los vectores son linealmente independientes.

Si el sistema es SCI con infinitas soluciones, los vectores no son linealmente independientes. Por lo que existe al menos una ecuación lineal que los relaciona a todos, distinta de la solución trivial.

Como la columna de términos independientes son todos nulos, podemos trabajar sin esa columna. Por lo que en la notación matricial del sistema de ecuaciones homogéneo podemos obviar la columna de términos independientes y trabajar directamente con una matriz (conjunto de número organizados en filas y columnas).

Veamos, por ejemplo, este razonamiento para tres vectores en tres dimensiones:

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) \quad , \quad \vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \quad \text{y} \quad \vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$$

$$\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} + \gamma \cdot \vec{w} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \alpha \cdot (u_x, u_y, u_z) + \beta \cdot (v_x, v_y + v_z) + \gamma \cdot (w_x, w_y, w_z) = \vec{0}$$

$$(\alpha \cdot u_x + \beta \cdot v_x + \gamma \cdot w_x, \alpha \cdot u_y + \beta \cdot v_y + \gamma \cdot w_y, \alpha \cdot u_z + \beta \cdot v_z + \gamma \cdot w_z) = (0,0,0)$$

Igualamos componentes.

$$\begin{Bmatrix} \alpha \cdot u_x + \beta \cdot v_x + \gamma \cdot w_x = 0 \\ \alpha \cdot u_y + \beta \cdot v_y + \gamma \cdot w_y = 0 \\ \alpha \cdot u_z + \beta \cdot v_z + \gamma \cdot w_z = 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} u_x & v_x & w_x & 0 \\ u_y & v_y & w_y & 0 \\ u_z & v_z & w_z & 0 \end{array}\right)$$ → Notación matricial del sistema de ecuaciones homogéneo

$$\begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix}$$ → Matriz resultante de eliminar la columna de ceros

Sobre esta matriz, directamente, podemos aplicar Gauss. Es decir, buscamos hacer ceros por debajo o por encima de la diagonal principal.

Y razonamos de la siguiente manera: **el número de vectores no proporcionales con al menos un coeficiente no nulo, que queden tras aplicar el método de Gauss, es igual al número de vectores linealmente independientes de la matriz. A este número también se le llama Rango de la matriz**.

No tiene sentido hablar de absurdo matemático porque en sistemas homogéneos siempre hay solución, por lo que es imposible obtener un sistema incompatible.

Si el rango de la matriz coincide con el número de vectores iniciales, diremos que los vectores son linealmente independientes (SCD en el sistema homogéneo).

Si el rango de la matriz es menor al número de vectores iniciales, diremos que los vectores están en combinación lineal (SCI en el sistema homogéneo).

**El rango nos informa del número de vectores que son linealmente independientes dentro del conjunto de vectores inicial.**

**El rango nunca puede superar al número de vectores del conjunto de partida. Es más, el rango como máximo será igual a la menor dimensión de la matriz.** Por ejemplo, si tenemos una matriz de cuatro filas y tres columnas, el rango como máximo podrá ser tres.

Durante el método de Gauss, si aparece una fila con todos los términos nulos significa que el vector de esa fila es combinación lineal de los otros.

Si aparecen dos filas con todos los términos iguales significa que existe combinación lineal entre esos vectores de la matriz.

Si hay dos filas con los coeficientes proporcionales, existe combinación lineal entre esos vectores de la matriz. En estos casos podremos obviar una de las filas. Veamos varios ejemplos.

**Ejemplo 2 resuelto**

**¿Son independientes los vectores $\vec{u}=(1,2,-1)$ , $\vec{v}=(0,2,-3)$ y $\vec{w}=(4,0,-1)$ en el espacio vectorial $V^3$ ?**

Escribimos la matriz formada por los vectores (**¡Ojo! Da igual escribir los coeficientes de los vectores en filas o en columnas, para calcular el rango de la matriz de coeficientes.**).

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicamos Gauss, buscando la matriz triangular por debajo de la diagonal principal.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow F_3'=F_3-4F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -8 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow F_3'=F_3+4F_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango } 3$$

Una vez obtenida la matriz triangular comprobamos que no hay filas proporcionales y que hay tres filas con al menos una componente no nula. Significa que hay tres vectores linealmente independientes. O lo que es lo mismo, que la matriz formada por los vectores tiene rango 3.

**Ejemplo 3 resuelto**

**¿Son independientes los vectores $\vec{u}=(1,2,-1)$ , $\vec{v}=(0,1,2)$ y $\vec{w}=(1,3,1)$ en el espacio vectorial $V^3$ ?**

Escribimos la matriz formada por los vectores y aplicamos Gauss

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow F_3'=F_3-F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que las dos últimas filas son idénticas, por lo que podemos obviar una de las filas (al existir combinación lineal).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Obviamos } F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango 2}$$

Hemos terminado Gauss, al haber hecho nulo el único coeficiente que había por debajo de la diagonal principal. Por lo tanto solo hay 2 vectores linealmente independientes en el conjunto de partida, por lo que los 3 vectores iniciales no son independientes entre sí.

**¡¡IMPORTANTE!!**

**El valor del rango coincide con el número de vectores linealmente independientes.**

**Ejemplo 4 resuelto**

**Obtener el rango de la matriz formada por los vectores $\vec{u}=(1,0,-1)$ , $\vec{v}=(3,0,-3)$ y $\vec{w}=(1,3,1)$ en el espacio vectorial $V^3$ .**

Escribimos la matriz formada por los vectores y aplicamos Gauss

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow F_2'=F_2-3F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

En la segunda fila tenemos todos los coeficientes nulos. Eso significa que ese vector es combinación lineal de los otros, por lo que podemos obviarlo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Obviamos } F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow F_2'=F_2-F_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango 2}$$

Tras aplicar Gauss, haciendo ceros por debajo de la diagonal principal, encontramos dos filas con al menos un coeficiente no nulos. El rango de los vectores es 2. O lo que es lo mismo, de los tres vectores de partida hay 2 vectores linealmente independientes.

**¿Y si aparece un parámetro en algunas de las componentes de los vectores?** Realizamos una discusión de casos, tras aplicar el método de Gauss en la matriz, tal y como realizamos en los sistemas de ecuaciones que dependían de un parámetro. Sabiendo que, ahora, en matrices no tendremos sistemas incompatibles. Y sabiendo que el rango es igual al número de vectores linealmente independientes.

**Ejemplo 5 resuelto**

**Estudiar el rango de la siguiente matriz según el parámetro inicial a.**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2a & 4 \\ 0 & a & -1 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

Ya tenemos la matriz escalonada, por lo que aplicamos la discusión de casos en: $a=0$ , $a-1=0$

Si $a=0$ → $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ → Obviamos la tercera fila → $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ → Rango 2 → Solo hay dos vectores linealmente independientes. Los tres vectores de partida están en combinación lineal.

Si $a=1$ → $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ → → Obviamos la tercera fila → $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ → Rango 2 → Solo hay dos vectores linealmente independientes. Los tres vectores de partida están en combinación lineal.

Si $a\neq 0,1$ → Rango 3 → Los tres vectores son linealmente independientes

**Ejemplo 6 resuelto**

**Estudiar el rango de la siguiente matriz según el parámetro inicial a.**

Coeficiente de filas donde el término de la diagonal principal es nulo.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Ya tenemos la matriz escalonada, por lo que aplicamos la discusión de casos en: $1+a=0$ , $a=0$

Si $a=-1$ → $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ → Obviamos la segunda fila → $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ → Rango 2 → Solo hay dos vectores linealmente independientes. Los tres vectores de partida están en combinación lineal.

Si $a=0$ → $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ → Obviamos la tercera fila → $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ → Rango 2 → Solo hay dos vectores linealmente independientes. Los tres vectores de partida están en combinación lineal.

Si $a\neq 0,-1$ → Rango 3 → Los tres vectores son linealmente independientes