Zur Bedeutung didaktischer Prinzipien im Entschleunigungsprozess beim Lernen mit neuen Technologien

Hans-Georg Weigand, Würzburg

Abstract: There is a tendency that learners don't have the patience to read and interpret screen-representations very thoroughly while working in computer-support learning environments. Referring to "didactical principles" like the Socratic principle, the spiral principle or the problem solving principle might give the chance to stop the acceleration in the learning process. Different principles are categorized and explained in the frame of a geometric problem.

Entschleunigung

Im computerunterstützten Unterricht zeigt sich immer wieder, dass Lernende nicht die Ruhe und Muße aufbringen, Bildschirmdarstellungen gründlich zu lesen, zu interpretieren und darüber zu reflektieren. Darstellungen werden oft nur optisch als Bilder wahrgenommen, aber nicht als Darstellungen mathematischer Objekte hinterfragt (Weigand 1999). Es stellt sich deshalb die Frage, wie der offensichtlich durch das Werkzeug hervorgerufene Zeitdruck weggenommen werden kann, denn „aufschließendes, schrittweise differenzierendes und weiterführendes Fragen benötigt Zeit, erfordert Besinnlichkeit, konzentrierte Aufmerksamkeit, ein Sich-Einlassen auf Phänomene..." (Bildungskommission NRW, 1995, S. 94). Das Arbeiten am Computer mit den in hoher Geschwindigkeit ablaufenden Bildschirmveränderungen mit der Muße im Unterricht in Einklang zu bringen, ist aber keine einfache Aufgabe.

Das Phänomen des hektischen, schnellen und unreflektierten Arbeitens ist nicht nur auf die Schule oder gar den Mathematikunterricht begrenzt, und so gibt es in letzter Zeit vermehrt Hinweise, Vorschläge und Konzeptionen um dieser Hektik zu begegnen. „Die Entdeckung der Langsamkeit" hieß der 1987 herausgekommene Überraschungserfolg, in dem Sten Nadolny den Versuch unternimmt, durch Langsamkeit dem Rhythmus des Lebens Sinn zu verleihen. In „Keine Zeit – 18 Versuche über die Beschleunigung" (2000) fragt Lothar Baier, wer denn nun endlich die immer größere Beschleunigung unseres Lebensablaufes stoppe, wer denn nun endlich mit der „Zeitrevolte" begänne, und in dem 1998 erschienenen Buch „Kreativität der Langsamkeit. Neuer Wohlstand durch Entschleunigung" fordert Fritz Reheis die entschleunigte Gesellschaft.

„Die entschleunigte Gesellschaft ist eine Gesellschaft, in der nicht das Haben von Sachen, sondern das Sein der Menschen im Mittelpunkt steht. ... Die entschleunigte Gesellschaft wird eine Gesellschaft der Muße und der Faulheit sein, verstanden als „kluge Lust". (S. 207)

Schließlich schlägt Günter Grass den Bogen von der Langsamkeit zu Bildung und Schule:

„ ... und schlage vor, in allen Schulen einen Kurs zur ‚Erlernung der Langsamkeit‘ einzuführen. Von mir aus darf es sogar ein Leistungskurs sein. .... es geht um das Lernen des Innehaltens, der Muße. Nichts wäre inmitten der gegenwärtigen Informationsflut hilfreicher als eine Hinführung der Schüler und Schülerinnen zur Besinnung ohne lärmende Nebengeräusche, ohne schnelle Bildabfolge, ohne Aktion und hinein ins Abenteuer der Stille. (Günter Grass, Die Zeit, 20. Mai 1999).

Im folgenden wird die These vertreten, dass das Ernst nehmen didaktischer Prinzipien ein Schlüssel zur Entschleunigung des Arbeitens mit Neuen Technologien darstellt.

Didaktische Prinzipien

In der Pädagogik haben didaktische Regeln, Gesetze oder Prinzipien eine lange Tradition, wenn man etwa an das "Prinzip der Naturgemäßheit" (Comenius) oder das "Prinzip der Anschauung" (Diesterweg) denkt. Unterrichts- oder didaktische Prinzipien sind Regeln für die Gestaltung und Beurteilung von Unterricht, die auf normativen Überlegungen einerseits und auf praktischen Unterrichtserfahrungen andererseits aufbauen. Sie beziehen Ergebnisse der psychologischen Lerntheorie ein und stellen Erfahrungen aus der Unterrichtspraxis verdichtet und verkürzt dar (Wagemann, S. 101). Unterrichtsprinzipien sind sowohl konstruktive Regeln für die Gestaltung von Unterricht als auch Kriterien für die Analyse und Beurteilung von Unterricht (Wittmann 1975).

Die Vielzahl an didaktischen Prinzipien in der mathematikdidaktischen Literatur ist überwältigend und verwirrend zugleich:

Spiralprinzip - Prinzip der Stufengemäßheit - Prinzip der vorwegnehmenden Lernens - Prinzip der Fortsetzbarkeit - Prinzip der Vorstrukturierung der Lernhilfen - Genetisches Prinzip - Sokratisches Prinzip - Exemplarisches Prinzip - Prinzip des (gelenkten) Entdeckenden Lernens - Prinzip der minimalen Hilfe - Prinzip der integrativen Verbindung - Prinzip der Realitätsnähe oder Lebensnähe - Prinzip der Beziehungshaltigkeit - Prinzip des Lernens in Zusammenhängen - Prinzip der konsequenten Wiederholung - Prinzip der integrierten Wiederholung - Prinzip der Stabilisierung - Prinzip der Isolation der Schwierigkeiten - Veränderung der Leistungsmessung - Prinzip der Selbsttätigkeit - Prinzip der aktiven Lernens - Operatives Prinzip - Prinzip der Variation - Prinzip der Verinnerlichung - Prinzip der adäquaten Visualisierung - Prinzip der Verzahnung der Darstellungsebenen - Prinzip der Variation der Veranschaulichungsmittel - Prinzip der Anschauung - Prinzip der Veranschaulichung - Prinzip des darbietenden Unterrichts - Prinzip der Deutlichkeit

Im folgenden wird versucht, die didaktischen Prinzipien zu kategorisieren und im Rahmen von *Aktivitäten* oder *Leitlinien* zu erläutern, denen wir im Hinblick auf den Einsatz neuer Technologien eine ganz besondere Bedeutung beimessen. Wir unterscheiden dabei Leitlinien, die stärker auf den mathematischen Inhalt bezogen sind, solche die Einstellungen und Verhalten von Schüler beeinflussen, und schließlich jene, die im Zusammenhang mit den verwendeten Werkzeugen zu sehen sind. Unter Werkzeugen verstehen wir ikonische und symbolische Werkzeuge wie Darstellungsformen und Notationen, aber auch reale Werkzeuge wie "Papier und Bleistift", "Zirkel und Lineal" oder Taschenrechner und Computer.

Inhaltsbezogene Leitlinien	Schülerbezogene Leitlinien	Werkzeugebene
• An Grundideen orientieren • Fragen entwickeln • Beziehungen herstellen	• Operativ Arbeiten • Selbsttätig Lernen • Produktiv Üben und Wiederholen	• Adäquat Visualisieren • Wissen und Können auslagern

An Grundideen orientieren

Die Inhalte des Mathematikunterrichts dürfen nicht in unzusammenhängende Gebiete zerfallen, sondern der Lernende soll Beziehungslinien oder "rote Fäden" und Beziehungsnetze im Mathematiklehrgang erkennen. Fundamentale Ideen sollen den Lernenden eine Orientierung in der Stofffülle einer Wissenschaft geben und die Grundzüge des Fachs unter einem bestimmten Aspekt aufzeigen. Mit Blick auf die Schulrealität ist es die entscheidende Frage, wie Lehrende dahin kommen können, ihren Unterricht entlang fundamentaler Ideen, Prinzipien oder Leitlinien auszurichten.

Neue Technologien können in vielfacher Hinsicht die Möglichkeiten erweitern, fundamentale Ideen im Unterricht aufzuzeigen. So entlasten sie von kalkülhaften Rechnungen und erleichtern dadurch die Konzentration auf zentrale Aspekte des Unterrichts. Lerninhalte lassen sich "intellektuell ehrlich" bereits früher im Unterricht verdeutlichen, wie etwa das Lösen von Gleichungen auf verschiedenen Niveaus, das Modellieren von Umweltsituationen oder das Ermitteln von Extremwerten durch verschiedene Darstellungsformen. Schließlich helfen die erweiterten Visualisierungsmöglichkeiten, Ideen auf einer breiteren Darstellungsbasis zu entwickeln. In sehr detaillierter Weise hat Volker Hole (1998, S. 60ff) für die Sekundarstufe I an vielen Beispielen den Beitrag aufgezeigt, den der Computer zu den zentralen Ideen im Sinne Heymanns zu leisten vermag.

Fragen entwickeln

"Im Grunde gibt es zwei Arten, Mathematik zu unterrichten. Man kann von Antworten ausgehen oder von Fragen" (Wittenberg). Diese - sicherlich grobe - Unterscheidung charakterisiert zwei grundlegende Einstellungen zum Unterrichten, die sich am ehesten mit "darbietendem Lernen" einerseits und "entdeckendem Lernen", "genetischer Unterricht" oder "problemlösender Unterricht" andererseits charakterisieren lassen.[1] Es ist sicherlich richtig, dass Antworten nur für denjenigen bedeutsam sind, für den sie Fragen beantworten, für den Antworten das Ergebnis eines Suchens nach Erklärungen oder Lösungen von Problem sind. Für Postman (1999) ist Wissen eine organisierte und zweckgerichtete Information und für ihn heißt Erkenntnis, dass man weiß welche Fragen man an das Wissen stellen muss. "Fragen ist das bedeutsamste geistige Werkzug, das Menschen zur Verfügung steht" (1999, S. 202). Fragen ist ein Suchen nach Sinnbedeutung.

Wie neue Technologien zum 'hoffentlich nie aufhörenden Fragen' anregen können, hat Steinberg (1993) in seinem Buch 'Polarkoordinaten' mit dem Untertitel 'Eine Anregung, sehen

[1] Diese Unterscheidung stellt noch keine Bewertung dieser Unterrichtsformen dar.

und fragen zu lernen' überzeugend dargelegt. Allerdings erfordert Fragen Zeit, erfordert Besinnlichkeit, konzentrierte Aufmerksamkeit und eine Umgebung der Muße (im ursprünglichen Sinn das Wort für 'Schule'). Das Arbeiten mit neuen Technologien regt zum Fragen an, die Muße muss allerdings die Unterrichtsgestaltung bewusst herbeigeführt werden.

Beziehungen herstellen

Wir gehen heute davon aus, dass Wissen im Gedächtnis als ein Netzwerk von Begriffen und Beziehungen gespeichert wird, welches bei seiner Aneignung aufgebaut werden muss. Dies ist der kognitionspsychologische Hintergrund des Prinzips vom Lernen in Zusammenhängen oder vom Integrationsprinzip, das ein Lernen von (mathematischen) Begriffen nicht als isolierte Wissenselemente sondern in Form von Beziehungsnetzen und Sinnzusammenhängen fordert.

In mannigfacher Weise sehen wir den Beitrag Neuer Technologien zum Entwickeln oder Herstellen von Beziehungen. Durch die vielfältige und parallele Verfügbarkeit verschiedener Darstellungsformen werden Beziehungen zwischen der symbolischen, numerischen und graphischen Ebene hergestellt. Durch die sich bereits durch den Taschenrechner anbahnende Möglichkeit des Verwendens realistischer Zahlen können Mathematisierungen realitätsnäher erfolgen, die Datenbeschaffung über das Internet ermöglicht das Einbeziehen aktueller Beispiele. Schließlich trägt das Auslagern komplexer kalkülhafter Berechnungen im Modellbildungsprozess zur Konzentration auf zentrale Tätigkeiten wie Mathematisieren und Interpretieren der Lösungen bei.

Produktiv Üben und Wiederholen

Üben und Wiederholen sind notwendig zur Sicherung und Vertiefung des Gelernten und zur Entwicklung der Fähigkeit, das Gelernte in gleichen, ähnlichen oder gar neuen Situationen anwenden zu können. Üben kann in verschiedenen Formen erfolgen, wie etwa Verständnisübungen, stabilisierendes Üben, operatives Üben, anwendungsorientiertes Üben oder heuristisches Üben. Üben darf keine isolierte Tätigkeit sein, sondern muss in die Unterrichtskonzeption eingebunden sein und muss mit Einsicht verbunden sein. Üben muss ferner regelmäßig stattfinden ("Prinzip der konsequenten Wiederholung") und sollte bereits gelernte Dinge immer wieder in neuen Kontexten aufgreifen ("Prinzip der integrierten Wiederholung"). Damit ein Schema erlernt und verfügbar bleibt - es also ein stabiles Wissenselement wird - , muss es in herausfordernden und anregenden Kontexten immer wieder geübt werden ("Prinzip der Stabilisierung").

Die Bedeutung Neuer Technologien im Rahmen des produktiven Übens ist ambivalent. Zum einen gibt es eine große Vielfalt an interaktiven Übungsprogrammen für alle Altersstufen, die dem Benutzer eine Rückmeldung über seine Eingaben und evtl. Lösungshinweise anbieten. Tutorielle oder gar intelligente tutorielle Systeme versuchen die kognitiven Prozesse des Schülers zu modellieren, enthalten eine Wissenskomponente und Lehrstrategien zum adäquaten Reagieren auf Benutzereingaben. Solche Übungsformen sind heute auch verstärkt über das Internet verfügbar.[2] Zum anderen übernimmt der Rechner nun aber gerade die Fertigkeiten, denen im traditionellen

[2] Etwa: http://www.univie.ac.at/future.media/mo

Unterricht das Hauptaugenmerk des Übens gegolten hat, die kalkülhafte Anwendungen von Rechenregeln. Damit ergibt sich die für die Unterrichtsgestaltung wesentliche Frage, welche Fertigkeiten überhaupt noch mit Papier und Bleistift beherrscht werden sollten und welche Fertigkeiten zukünftig an den Rechner delegiert werden können.

Operativ Arbeiten

Entscheidend für die Denkentwicklung sind die an konkreten, bildlichen und symbolischen Gegenständen ausgeführten Aktivitäten und Handlungen. Der Wissenserwerb erfolgt nicht durch Betrachten oder einfaches Nachahmen ("Mathematik ist kein Zuschauersport"), sondern das Operieren mit Objekten. Konkretes Handeln, zeichnerisches Handeln und Handeln in der Vorstellung sind die Stufen des Verinnerlichungsprozesses. "Das operative Prinzip leitet einen Unterricht, der das Denken im Rahmen des Handelns weckt, es als ein System von Operativen aufbaut und es schließlich wieder in den Dienst des praktischen Handelns stellt." (Aebli 1985, S. 4). Dieses ist die Grundannahme des operativen Prinzips, das Aebli in die allgemeine Didaktik und Besuden, Fricke und Wittmann in die Mathematikdidaktik eingeführt haben.

Neue Technologien bieten neue Möglichkeiten eines handlungsorientierten Umgangs mit mathematischen Symbolen, Graphiken, Diagrammen und geometrischen Konstruktionen. Das operative Prinzip ist eine wichtige Orientierungshilfe für den Rechnereinsatz im Hinblick auf das Ausbilden von Begriffsvorstellungen im Sinne des Verinnerlichens von Handlungen. Das operative Prinzip ist ein zentrales Unterrichtsprinzip, es sollten aber auch seine Grenzen mitbedacht wissen. So muss nicht jeder Wissenserwerb aufgrund eigener Tätigkeiten erfolgen, sondern Lernen ist durchaus auch in einem Unterricht möglich, der auf systematisch aufeinanderfolgenden Erklärungen aufbaut, ein Unterricht also, der darbietendes oder rezeptives Lernen ermöglicht. Ferner steckt in dem Begriff Tätigkeit auch die Gefahr des blinden Aktionismus und in der Forderung nach einer systematischen Variation der Ausgangswerte die Gefahr einer allzu vielfältigen Variation, die zu einer Überforderung der Schüler und ein Aus-dem-Auge-verlieren des Zieles resultieren kann.[3] Diese Gefahr verschärft sich beim Lernen mit dem Computer noch. Es sei hier auch an Ausubel erinnert, der sich kritisch mit dem "entdeckenden Lernen" auseinandergesetzt und auf die Bedeutung eines systematischen Wissens für den Lernprozessen hingewiesen hat. Er stellte es auch als ineffektiv heraus, da es viel Zeit erfordert, und es ein Mystizismus sei, zu glauben, dass man Lernenden dadurch zu besseren Einsichten verhelfe, indem man ihnen möglichst wenig oder gar nicht hilft.[4]

Selbsttätig Lernen

Viele sog. schülerorientierte Arbeitsformen wie problemlösender, entdeckender, Projekt- oder offener Unterricht setzen Eigenaktivitäten oder Selbsttätigkeit des Lernenden voraus.[5] Mit einem

[3] vgl. hierzu auch die - konstruktive - Kritik von Bauer am operativen Prinzip (1993).

[4] Für eine Zusammenstellung kritischer Einwände gegen das "entdeckende Lernen" sei auf Führer 1997, S. 61ff verwiesen.

[5] Der Begriff der Selbsttätigkeit hat eine lange Tradition. So forderte bereits Rousseau Bildung durch "eigene Erfahrung" des Kindes, bei Pestalozzi werden Anschauung und Selbsttätigkeit zu den beiden grundlegenden Prinzipien von Unterricht, und Fröbel stellt die Selbsttätigkeit in den Mittelpunkt der Erziehung. Dann baut

auf Selbsttätigkeit aufbauenden Unterricht sind Ziele wie Entwicklung von Selbstständigkeit, kritisches Reflektieren der eigenen Tätigkeit und Motivation durch eigenen Erfolg verbunden. Insbesondere deutet der auch im BLK-Modellversuch aufgegriffene Aspekt "Aus Fehlern lernen" auf die konstruktive Sichtweise des Fehlermachens hin. So sollten Verständnisfehler produktiv genutzt werden zum einen um die Ursachen von Fehlerquellen aufzuspüren, zum anderen um durch das Aufzeigen von Konsequenzen aus fehlerhaften Überlegungen bewusst die Widersprüche zu traditionellen Ergebnissen deutlich werden zu lassen. Jank und Meyer vertreten gar die These, dass "in der Ausweitung des selbsttätigen Lernens ... der Schlüssel zur Lösung der Probleme des herkömmlichen Unterrichts (liegt)" (1994[3], S. 343).

Alle bisherigen Unterrichtserfahrungen zeigen, dass das Arbeiten mit neuen Technologien zu einer größeren Selbstständigkeit führt (etwa Nocker 1996). Das Ziel muss dabei sein, dass diese Aktivitäten auch konstruktiv für die Wissensentwicklung genutzt werden. Für den Lehrenden stellt sich die wichtige Aufgabe, zwischen dem in unterschiedlichen Geschwindigkeiten ablaufenden individuellen Arbeiten des Einzelnen am Computer und einer auf die gesamten Klasse bezogenen gemeinsamen Diskussions- und Wissensbasis zu vermitteln.

Adäquat Visualisieren

Nach Bruner gibt es drei Repräsentationsarten von Wissen: die enaktive oder handlungsmäßige, die ikonische oder bildhafte und die symbolische Darstellungsebene. Auf jeder dieser Ebenen gibt es viele verschiedene Darstellungsformen.

Warum sind Darstellungen in der Mathematik so wichtig? Mit Hilfe von Darstellungen lassen sich Lösungsideen finden, indem etwa Muster oder Regelmäßigkeiten erkannt werden, Lösungswege darstellen, Lösungsideen ordnen und kalkülhafte Berechnung durchführen. In Abhängigkeit von der Problemstellung und den benötigten Begriffseigenschaften sind Darstellungen von den Lernenden problemadäquat einzusetzen. Zum Vorbeugen einer einseitigen Sichtweise und für ein umfassendes Begriffsverständnis ist es wichtig, Begriffseigenschaften in verschiedenen Darstellungen zu erkennen, Darstellungsformen zueinander in Beziehung zu setzen und zwischen diesen Darstellungen "übersetzen" zu können.

Das Arbeiten mit Darstellungen erhält im Rahmen des computerunterstützten Arbeitens eine neue Qualität. Der Computer stellt Darstellungsformen auf Knopfdruck in einfacher Weise zur Verfügung stellt, die Darstellungen lassen sich in einfacher Weise verändern, d. h. strecken, drehen, spiegeln, verziehen, man kann zwischen verschiedenen Darstellungen hin und her springen und es können gleichzeitig mehrere Darstellungen auf den Bildschirm erzeugt werden, die zudem interaktiv miteinander verknüpft sind.

die Reformpädagogik und insbesondere die Arbeitsschulbewegung auf dem Prinzip der Selbsttätigkeit auf. So ist für John Dewey (1859 - 1952) das selbständige Denken und Handeln Grundlage allen Lernens, für Kerschensteiner hat das selbständige Erarbeiten zentrale Bedeutung für die Bildung des Menschen und bei Hugo Gaudig wird die Selbsttätigkeit zum zentralen Prinzip für alle Unterrichtsfächer (vgl etwa Reble 1999[19]). Die – auch kritische – Auseinandersetzung mit diesem Begriff übersteigt den Rahmen dieses Artikels.

Wissen und Können auslagern

Dörfler (1991) hat - aufbauend auf den Überlegungen von Roy Pea (1985) - prognostiziert und am Funktionsbegriff genauer erläutert, wie der Computer als "kognitive Technologie" zur Erweiterung und Verstärkung unserer Kognition beitragen kann. Analog den Überlegungen Ch. S. Pierce gibt es für ihn keine Trennung zwischen Kognition und Kontext, zwischen abstraktem Begriff und Darstellung, sondern Denkprozesse realisieren sich in der Wechselbeziehung zwischen Darstellungs- und Arbeitsweisen einerseits und dem kognitiven System mathematischer Begriffe andererseits (S. 61). "Denken ... ist dann nicht mehr im Subjekt lokalisiert, sondern das System aus Subjekt und Kontext (das sind insbesondere die dort verfügbaren materiellen und mentalen Werkzeuge und Technologien) realisiert 'Denkprozesse' " (ebd.).

Neue Technologien werden so zu einem zentralen Bestandteil des Denkens und sie ermöglichen insbesondere das Auslagern mathematischer Fertigkeiten vom Kopf in die Technik. Durch das Werkzeug Computer eröffnen sich dabei vielfältige Möglichkeiten vor allem im Bereich des heuristischen und experimentellen Arbeitens. Die neuen Technologien werden den Schüler verstärkt vom Ausführen algorithmischer Tätigkeiten entlasten, dagegen wird das Planen von Rechenabläufen und das Interpretieren von Ergebnissen an Bedeutung zunehmen. "Der Schüler löst sich von seiner bisherigen Rolle als 'Rechner' und erfährt die Beförderung zum *Anweiser und Planer* von Rechnungen" (Weth 1993, s. 108).

Ein Beispiel

Im Folgenden soll anhand eines Beispiels gezeigt werden, wie das Beachten zumindest einige dieser Prinzipien die Wechselbeziehung zwischen experimentellem Arbeiten mit dem Computer und mathematischen Überlegungen (im Kopf) den Entschleunigungsprozess im Unterricht initiieren kann. Das Beispiel hat als Ausgangspunkt eine übliche Aufgabe aus dem Geometrieunterricht der 8. Klasse, die Aufgabe zu den Diagonalen des Mittenvierecks (siehe unten) findet sich bei Peter (1953/54) und wurde dann von Götz (1959/60) verwendet, um „am Beweis eines an sich unwichtigen Satzes“ Kongruenzbeweis und abbildungsgeometrischen Beweis gegenüberzustellen. Bei Schumann (1991) ist diese Aufgabe dann ein Beispiel für die „Satzfindung durch stetiges Variieren von geometrischen Konfigurationen“ (S. 42ff).

Die Aufgabe: *Über den vier Seiten eines Parallelogramms werden „nach außen“ vier Quadrate gezeichnet (Abb. 1). Was fällt auf?*

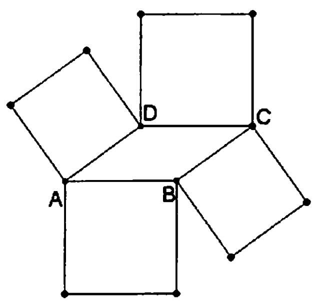

Abb. 1

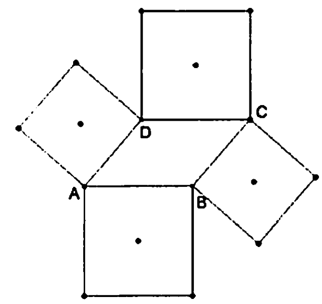

Abb. 2

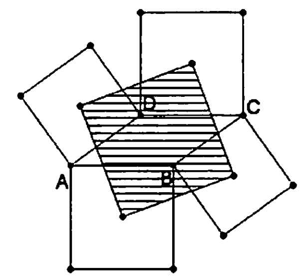

Abb. 3

Heuristische Strategien

Für das Untersuchen der Figur gibt es eine ganze Reihe von heuristischen Strategien oder Prinzipien (etwa Polya 1949 oder Schoenfeld 1985): Variiere die Figur, betrachte Spezialfälle und Grenzfälle, suche nach Symmetrien, beobachte interessante Punkte usw. Dabei kann viel auffallen, etwa dass sich die jeweils kongruenten Quadrate durch eine Gleitspiegelung aufeinander abbilden lassen, oder die Quadrate kongruent (achsen- oder punktgespiegelt, kongruent und achsen- bzw. punktsymmetrisch) sind, falls ABCD eine Raute (ein Rechteck, ein Quadrat) ist. Ein zusätzlicher Aspekt kommt hinzu, wenn die Mittelpunkte der Quadrate eingezeichnet werden (Abb. 2). Man erhält ein Viereck, wir nennen es im folgenden *Mittenviereck.* Dieses Mittenviereck ist – wie man mit Hilfe des Zugmodus und durch Abmessen der Strecken vermuten kann – ein Quadrat. Ein Beweis lässt sich mit Hilfe kongruenter Dreiecke führen.[6]

Weiterfragen

Die Figur gibt Anlass zu weiteren Fragen: Wie sind die Verhältnisse, wenn ein (zwei) Quadrat(e) „nach innen“ gezeichnet wird (werden)? Wie ist es wenn alle Quadrate „nach innen“ gezeichnet werden? Wie ist es, wenn die Quadrate durch gleichseitige Dreiecke ersetzt werden (Abb. 4)? Welche speziellen Fälle können sich dann für das Mittenviereck ergeben? Welche Eigenschaften hat das Mittenviereck, wenn die Eigenschaft des Parallelogramms im Ausgangsviereck fallengelassen wird (Abb. 5)?

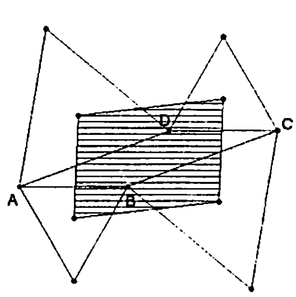

Abb. 4

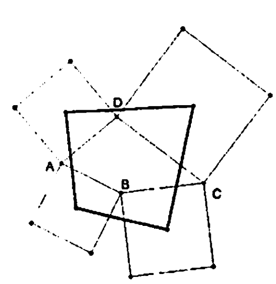

Abb. 5

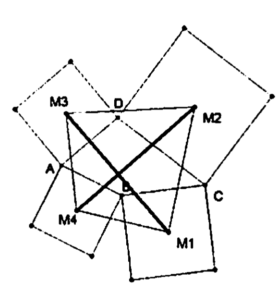

Abb. 6

[6] Die Dreiecke aus zwei angrenzenden Eckpunkten des Mittenquadrats und einer Ecke des Parallelogramms sind kongruent!

Wiederum: Heuristische Strategien

Welche Eigenschaften hat das Mittenviereck? Wiederum wendet man obige heuristische Strategien auf das Mittenviereck von Abb. 5 an: Hat es einen Umkreis, hat es einen Inkreis? Haben die Seiten, die Summen angrenzender oder gegenüberliegender Seiten eine besondere Eigenschaft. Gibt es besondere Eigenschaften der Diagonalen (Abb. 6)?

Weitersuchen

Die Diagonalen des Mittenvierecks scheinen aufeinander senkrecht zu stehen. Sie scheinen zudem – wie das Nachmessen im Zugmodus zeigt – gleich lang zu sein. Dann ist das Mittenviereck ein spezieller schiefer Drachen. Die Begründung für diese Diagonaleneigenschaft ist allerdings nicht einfach, wodurch die Aufgabe aber zu einer herausfordernde Problemstellungen werden kann. Experimentieren mit dem DGS scheint keine Einsichten und Hinweise für einen Beweis zu erbringen. Man muss sich bei dieser Aufgabe wohl „jenseits des Bildschirms" mit Papier und Bleistift einlassen. Dies ist ein wichtiger Schritt im Hinblick auf den Entschleunigungsprozess des Arbeitens am Computer. Durch dieses Weggehen vom technischen Gerät wird das Handeln des Lernenden entschleunigt.

Vielfältige Begründungen

Hier soll es reichen einige Beweisideen dieser Aufgabe anzugeben. Ein abbildungsgeometrischer Beweis[7] geht von der Verkettung zweier 90^0-Drehungen etwa D_{M3} und D_{M2} aus. Die beiden Drehungen lassen sich durch jeweils zwei Achsenspiegelungen ersetzen, deren Achsen einen Winkel von 45^o bilden. Bei beiden Achsenpaaren kann die Gerade M3M2 als eine Spiegelachse gewählt werden. Der Schnittpunkt der beiden anderen Spiegelachsen liefert dann einen Punkt Z, der als Drehzentrum einer 90^0-Drehung genommen werden kann, die M1M3 in M2M4 überführt. Damit hat man auch einen Kongruenzbeweis!

Ein anderer Beweis[8] geht mit Hilfe sog. „pythagoräischer Vierecke" (vgl. Weth 2000). Das sind Vierecke, bei denen die Summe der Quadrate gegenüberliegender Seiten gleich sind, was sogar eine allgemeine Kennzeichnung der Vierecke mit zueinander senkrechten Diagonalen darstellt (Schumann 1991, S. 47).

Schließlich kann ein Beweis auch auf dem Satz aufbauen, dass sich in einem Dreieck die Winkelhalbierende eines Winkels und die Mittelsenkrechte der gegenüberliegenden Seite auf dem Umkreis schneiden.[9] Bei dieser Aufgabe betrachtet man dann den Thaleskreis über einer Viereckseite durch den jeweiligen Quadratmittelpunkt.

Weiterfragen

Auch (oder gerade!) im Falle eines erfolglosen Suchens eines Beweises bieten sich weitere Fragen an: Gilt die Diagonaleneigenschaft des Mittenvierecks auch, wenn die Quadrate durch

[7] nach einer Idee von meinem Kollegen Lothar Profke aus Gießen.

[8] nach einer Idee von meinem Kollegen Thomas Weth aus Nürnberg.

[9] Nach einer Idee von meinem Kollegen Herbert Glaser aus Würzburg.

gleichseitige Dreiecke ersetzt werden (Abb. 7)? Warum bzw. warum nicht? Wie verhält sich das Mittenviereck beim Übergang zu Spezialfällen? Werden im Viereck ABCD zwei Ecken „zusammengeführt" (Abb. 8), dann sind offensichtlich die Strecken CM4 bzw. DM4 und M1M3 gleich lang und stehen senkrecht aufeinander. Coxeter u. Greitzer (1983, S. 100f) ist das sogar einen eigenen Satz wert, den sie mit Hilfe geeigneter Drehstreckungen beweisen.

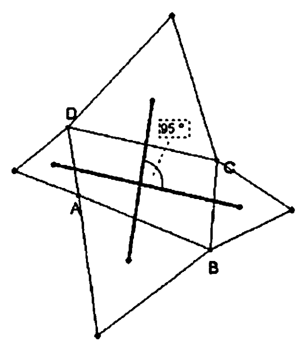

Abb. 7

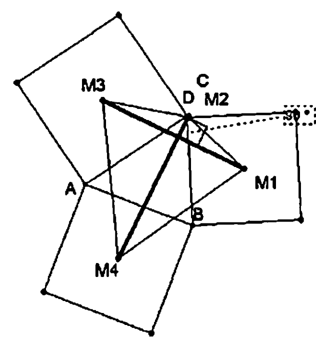

Abb. 8

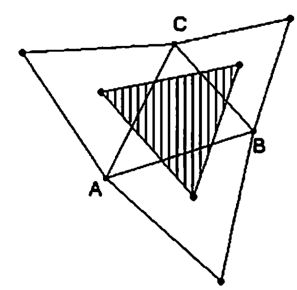

Abb. 9

Variieren

Wie sind nun die Verhältnisse, wenn man bei diesem Dreieck die Quadrate durch gleichseitige Dreiecke ersetzt? Die Diagonaleneigenschaften von Abb.8 gelten dann nicht mehr, aber wir sind nun bei einem anderen bekannten Satz angelangt, dem Satz des Napoleon, der besagt, dass das Mittendreieck (Abb. 9) gleichseitig ist.

Schluss

Die Behandlung dieser Aufgabe lässt sich unter verschiedenen Gesichtspunkten analysieren. So ist es eine offenen Aufgabe oder Problemstellung, die zum Fragen, Argumentieren und Begründen anregt. Dies ist somit ein Beispiel, wie eine „einfache" Schulbuchaufgabe durch die Variation der Ausgangsparameter zu einem komplexen Problem werden kann (vgl. auch Schupp 2000). Die Aufgabensequenz lässt sich aber auch unter dem Aspekt der Anwendung didaktischer Prinzipien sehen. Didaktische Prinzipien erleichtern das Beschreiben des Unterrichtsablaufs und sie stellen konstruktive Regeln für eine praktische Unterrichtslehre dar. Viele didaktische Prinzipien lassen sich in diesem Beispiel wiederfinden: Fragen entwickeln, Beziehung herstellen, Produktiv Üben, Operativ Arbeiten, Selbsttätig Arbeiten. Sie stellen ein Hintergrundwissen des Lehrers, um diese Aufgabe zu analysieren, aber auch um den Prozess des Weiterfragens zu steuern. In diesem Sinn sind sie Leitlinien für die Unterrichtsgestaltung, Leitlinien die immer wieder anregen, innezuhalten und über die Tätigkeit des Arbeitens (hier am Computer) zu reflektieren und dadurch die Aktivitäten am Computer zu entschleunigen.

Literatur:

Aebli, H., Das operative Prinzip, in Mathematiklehren 11 (August 1985), 4 - 6

Baier, L, Keine Zeit – 18 Versuche über die Beschleunigung, München 2000

Bauer, L., Das operative Prinzip als umfassendes, allgemeingültiges Prinzip für das Mathematiklernen. Didaktisch-methodische Überlegungen zum Mathematikunterricht in der Grundschule, ZDM 25 (1993), 76-83

Bildungskommission NRW, Zukunft der Bildung - Schule der Zukunft, Neuwied u. a. 1995

Coxeter, H. S. M., Greitzer, S. L., Zeitlose Geometrie, Stuttgart 1983

Dörfler, W., Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium, in: Dörfler, W. u. a. (Hrsg.), Computer – Mensch – Mathematik, Wien 1991

Führer, L, Pädagogik des Mathematikunterrichts. Eine Einführung in die Fachdidaktik für Sekundarstufen, Wiesbaden 1997

Götz, W., Gegenüberstellung elementargeometrischer Methoden an einem Beispiel, MNU 12 (1959/60) 222 – 224

Hole, V., Erfolgreicher Mathematikunterricht mit dem Computer. Methodische und didaktische Grundfragen in der Sekundarstufe I, Donauwörth 1998

Jank, W., Meyer, H., Didaktische Modelle, Frankfurt 1994[3]

Nocker, R. J., Effects of Computer Algebra on Classroom methodology and pupil activity, in: Weigand, H.-G. u. a. (Hrsg.), Developments in Mathematics Education in Germany, Hildesheim u. Berlin 1996, 82 – 95

Pea, R., Beyond amplification: Using the Computer to reorganize mental functioning, Educ. Psych. 20 (1991), No. 4, 167 – 182

Peter, F., Über ebene Vielecke, MNU 6 (1953/54), 61 – 63

Polya, G., Schule des Denkens – Vom Lösen mathematischer Probleme, Tübingen und Basel 1949, 1995[4]

Postman, N., Die zweite Aufklärung. Vom 18. zum 21. Jahrhundert, Berlin 1999

Reble, A., Geschichte der Pädagogik, Stuttgart 1999[19]

Reheis, F., Die Kreativität der Langsamkeit, Darmstadt 1996

Schoenfeld, A. H., Mathematical problem solving, Orlando 1985

Schumann, H., Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer. Beiträge zur Didaktik des interaktiven Konstruierens. Stuttgart 1991

Schupp, H., Forschungsprojekt: Aufgabenvariation als Heurismus, Saarbrücken 2000

Steinberg, G., Polarkoordinaten, Hannover, 1993

Wagemann, E. B., Bausteine zu einer Methodik des Mathematikunterrichts, unveröffentliches Vorlesungsmanuskript, Gießen 1994

Weigand, H.-G., Eine explorative Studie zum computerunterstützten Arbeiten mit Funktionen, Journal für Mathematikdidaktik 20 (1999), H. 1, 28 - 54

Weth, Th., Zum Rollenwechsel des Schülers beim Arbeiten mit Unterrichtssoftware, in Hischer, H. (Hrsg.), Wie viel Termumformung braucht der Mensch?, Hildesheim 1993, 106 – 110

Weth, Th., Mathematische Erfindungen im Umfeld des Satzes von Pythagoras, Praxis der Mathematik 42 (2000), 70 – 75

Wittmann, E. Chr., Zur Rolle von Prinzipien in der Mathematikdidaktik, Beiträge zum Mathematikunterricht 1975, 226 – 235