

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**. Indica, en la primera hoja donde resuelves el examen, la opción elegida.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe a bolígrafo (no a lápiz) ordenadamente y con letra clara. Las faltas de ortografía, la mala presentación y no explicar adecuadamente las operaciones pueden restar hasta un máximo de 1 punto de la nota final.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción A

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Dadas las funciones $f(x) = x^2 - ax - 4$ y $g(x) = \frac{x^2}{2} + b$, halla los valores de a y b de manera que las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ tengan la misma recta tangente en el punto $x = 3$. Halla la ecuación de esa recta tangente.

Ejercicio 2.- Sea $f : (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} x + 2e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ a \cdot \sqrt{b-x} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$

a) [1,5 puntos] Determina a y b sabiendo que $f(x)$ es derivable en todo su dominio.

b) [1 punto] Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Un poste de 3 metros de altura tiene en su punta un sensor que recoge datos meteorológicos. Dichos datos deben transmitirse a través de un cable a una estación de almacenamiento situada a 4 metros de la base del poste. El cable puede ser aéreo o terrestre, según vaya por el aire o por el suelo. El metro de cable aéreo cuesta 3000 euros y el metro de cable terrestre cuesta 1000 euros. ¿Qué parte del cable debe ser aéreo y qué parte terrestre para que su coste sea mínimo?

Ejercicio 4.- [2,5 puntos] Estudia la derivabilidad de la siguiente función en su punto frontera.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Opción B

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Obtener m y n para que $f(x)$ sea continua en toda la recta real. Estudia la derivabilidad de $f(x)$ tomando esos valores de m y n .

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ mx + n & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Determinar k para que $f(x)$ sea continua y derivable en todo su dominio.

$$f(x) = \begin{cases} x + k & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Justifica de manera razonada el dominio de la función $f(x) = e^{\operatorname{tg}(x)}$ y obtener la ecuación de la recta tangente en $x = \frac{-\pi}{4}$.

Ejercicio 4.- [2,5 puntos] Estudia la derivabilidad de $f(x) = \left| \frac{x}{x-3} \right|$. Si en algún punto no es continua, indica el tipo de discontinuidad.