

# 즐거움 미적분학



교과서 111쪽

부등식의 증명

학번  
이름

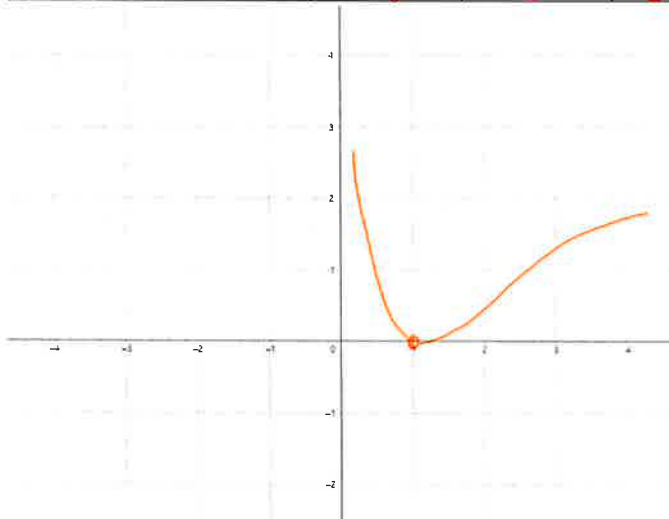
## 부등식의 증명

어떤 구간에서 부등식  $f(x) \geq 0$ 이 성립함을 보이려면 주어진 구간에 속하는 모든  $x$ 에 대하여  $f(x) \geq 0$ 임을 보이면 된다. 즉,  $f(x)$ 의 최솟값이 0 이상임을 보이면 된다.

어떤 구간에서 부등식  $f(x) \geq g(x)$ 가 성립함을 보이려면  $h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하고, 주어진 구간에 속하는 모든  $x$ 에 대하여  $h(x) \geq 0$ 임을 보이면 된다. 즉,  $h(x)$ 의 최솟값이 0 이상임을 보이면 된다.

문제3.  $x > 0$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여  $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ 이 성립함을 보이시오.

$x$		1		2	
$f'(x)$	-	0	+	+	+
$f''(x)$	+	+	+	0	-
$f(x)$	↘	0	↗	$-\frac{1}{2} + \ln 2$	↗



$$f(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x} \text{ 라 두면}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}, \quad f'(x) = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}, \quad f''(x) = 0$$

$$x=2$$

$x > 0$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x) \geq 0$

$$\therefore \ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$$

### 생각과 표현

찬열이는 오른쪽에 제시된 두 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 에 대하여 ' $x > 0$ 일 때,  $f(x) < g(x)$ 이다.'라고 추측하였다. 찬열이의 추측이 맞는지 판단해 보자.

찬

미분가능한 두 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가)  $f(0) = g(0)$

(나)  $x > 0$ 에서  $f'(x) < g'(x)$



찬열

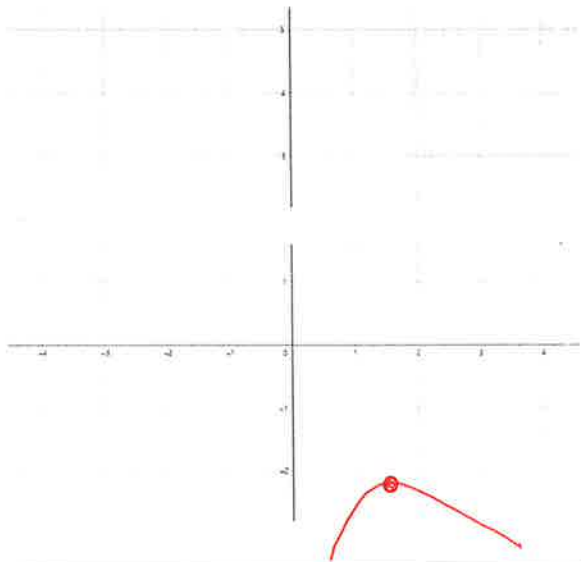
# 즐거운 미적분학

HAPPY



교과서 116쪽. 문제 16.  $x > 1$  인 모든 실수  $x$  에 대하여 부등식  $2x + k \geq \ln(x-1)$  이 성립하도록 하는 실수  $k$  의 최솟값을 구하시오.

$x$		$\frac{3}{2}$		
$f'(x)$	+	0	-	
$f''(x)$	-	-	-	
$f(x)$		$-\ln 2 - 3$		



$f(x) = \ln(x-1) - 2x$  라 두면

$f'(x) = \frac{1}{x-1} - 2$ ,  $x = \frac{3}{2}$  일때  $f'(x) = 0$ .

$f''(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0$

$x > 1$  인 모든 실수  $x$  에 대하여  $f(x) \leq -3 - \ln 2$

즉,  $\ln(x-1) - 2x \leq -3 - \ln 2$

$k$  의 최솟값은  $-3 - \ln 2$  이다.

교과서 116쪽. 문제 17. **방법 1**

$f(x) = x^2 - 1 - 2 \ln x$  라 두면

$f'(x) = 2x - \frac{2}{x}$ ,  $x = 1$  일때  $f'(x) = 0$  이다.

$f''(x) = 2 + \frac{2}{x^2}$ ,  $f''(x) > 0$  이다.

$x$		1	
$f'$	-	0	+
$f''$	+	+	+
$f$	↘	0	↗

$f(x)$  의 최솟값 0 이다.

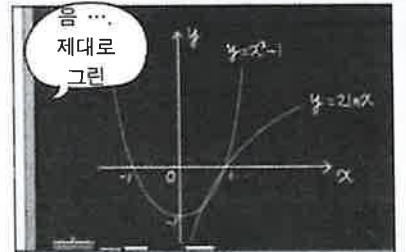
$f(x) = x^2 - 1 - 2 \ln x \geq 0$

그래프 관찰하면  $x=1$  에서만 최솟값 0 이다.

**방법 2**  $y = x^2 - 1$ ,  $2 \ln x$  의 그래프 관찰하기

생각  
특이점!

17 두 곡선  $y = x^2 - 1$ ,  $y = 2 \ln x$  의 교점의 개수를 구하고, 풀이 과정을 친구들에게 설명해 보자.



점 (1, 0) 이 교점인  
또 다른 교점이 있는지 확인해야

