

UNIDAD 3

LOGARITMOS

Objetivo general.

Al terminar esta Unidad comprenderás la importancia histórica de los logaritmos y resolverás ejercicios y problemas en los que apliques los logaritmos y sus leyes.

Objetivos específicos:

1. Reconocerás las necesidades que motivaron el descubrimiento de los logaritmos y valorarás su importancia y utilidad en el desarrollo de las matemáticas aplicadas.
 2. Recordarás la definición de logaritmo.
 3. Recordarás la diferencia entre los logaritmos naturales y los logaritmos base diez.
 4. Recordarás las propiedades generales de los logaritmos.
 5. Recordarás las leyes de las operaciones con logaritmos.
 6. Recordarás el procedimiento para cambiar logaritmos de una base a otra.
 7. Resolverás ecuaciones que involucren logaritmos.
 8. Aplicarás logaritmos en la resolución de problemas de casos reales.
-

Objetivo 1. Reconocerás las necesidades que motivaron el descubrimiento de los logaritmos y valorarás su importancia y utilidad en el desarrollo de las matemáticas aplicadas.

De las tres actividades básicas que lleva a cabo una persona alfabetizada: la lectura, la escritura y el cálculo aritmético, este último ha sido siempre el que mayor dificultad le ha representado. Hace tan sólo 5 siglos, el hombre de mediana cultura sólo disponía de los dedos para contar y el ábaco era manejable únicamente por calculadores profesionales. La multiplicación era muy difícil, pero la división únicamente podían realizarla “sabios especialistas” -a los que se consideraba dotados de facultades casi sobrenaturales- que requerían de varios días para obtener el resultado.

La necesidad de simplificar los cálculos en campos de actividad esenciales como la navegación, la agrimensura y la astronomía, dio origen al concepto de *logaritmo* que permitió enfrentar un problema ancestral. Hasta el siglo XVI la escritura de los números racionales como una parte entera más una fracción de la unidad hacía incluso de la suma una operación muy complicada y los algoritmos de la multiplicación y de la división eran desconocidos.

Antes de los *logaritmos*, en el siglo XI el matemático árabe **Ibn Jounis** propuso un método llamado *prostaferesis* para simplificar la multiplicación a través de relaciones trigonométricas que vinculan productos con sumas y restas. Este método permaneció mucho tiempo en vigor, aún cuando el ahorro de tiempo en el caso de las multiplicaciones y las divisiones entre números muy grandes era poco significativo.

Si bien se dice que **Arquímedes** propuso la idea fundamental que generaría los logaritmos, idea que aparece en los trabajos de los matemáticos **Chuquet** y **Stifel** en el siglo XV, no fue sino un siglo después, alrededor del año 1590, cuando **John Napier**, barón de Merchiston, (1550 – 1617) asoció los términos de una progresión geométrica con los términos de una progresión aritmética:

Progresión geométrica:	a	a^2	a^3	a^4	a^n
Progresión aritmética:	1	2	3	4	n	

estableciendo que al producto de dos términos de la progresión geométrica, $a^m \cdot a^s$, está asociado el término que corresponde a la suma $m + s$ de la progresión aritmética.

Por ejemplo, dadas las progresiones:

PG	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192
PA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Para efectuar el producto de 128×32 se procede como sigue:

- Al 128 en el primer renglón le corresponde el número 7 en el segundo, y al 32 le corresponde el 5
- La suma de estos números es: $7 + 5 = 12$
- Al número 12 en el segundo renglón le corresponde el 4096 en el primero

Entonces, $128 \times 32 = 4096$, y este resultado se obtuvo mediante una operación de suma.

Napier fue posiblemente el más notable de los matemáticos del siglo XVI, y un reconocido inventor. Sus esfuerzos por encontrar formas más sencillas para el cálculo aritmético lo llevaron a crear diferentes artificios, como una especie de ajedrez aritmético donde los dígitos se movían como torres y alfiles sobre el tablero; y otro que sobrevive y se conoce como *huesos de Napier*. La palabra *logaritmo*, que asignó a su descubrimiento sobre la relación entre los números de las dos progresiones, viene de las palabras griegas *logos*: relación y *arithmos*: número.

Napier vio tan claramente la utilidad de los logaritmos en la astronomía y la trigonometría, que decidió dejar sus estudios en álgebra y dedicar el resto de su vida a producir las tablas necesarias, toda una hazaña ya que en ese momento no se había inventado la teoría de los exponentes ni el cálculo diferencial.

Con el objeto de que los números de la progresión geométrica fueran muy cercanos y los cálculos tuvieran buenas aproximaciones, Napier eligió como razón para elaborar sus tablas el número

$$a = 1 - \frac{1}{10^7} = 0.9999, \text{ muy próximo a } 1$$

Según *Eves*, para evitar decimales se multiplicaba cada potencia por 10^7 de manera que el logaritmo de 10^7 es 0 y el de $10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)$ es 1. Las tablas aparecieron hasta el año 1614, atrayendo la atención de los matemáticos, especialmente de **Henry Briggs** (1561 – 1630) y de **Johannes Kepler**

(1571 – 1630). Cuando Briggs se trasladó a Edimburgo porque “... no podía tener tranquilidad hasta que no hubiera visto a la noble persona de cuya sola invención...” eran los logaritmos, establecieron una gran amistad, y fue a él a quien Napier dejó el “computo real de la nueva regla”. Juntos trabajaron en el cálculo de logaritmos más útiles, donde el logaritmo de 1 fuera 0 y el de 10 una potencia adecuada de 10, dando con ello origen a los logaritmos actuales de base 10. En 1617, año en que murió Napier, Briggs publicó una primera tabla con 8 decimales considerando la progresión geométrica de las potencias de 10. Debe reconocerse a Briggs la celeridad de los progresos en la construcción de tablas logarítmicas, cosa que sólo un experto matemático con originalidad podía haber realizado.

La rápida difusión de los logaritmos de Napier en Europa se debió a Kepler -quien también consideró el aspecto analítico del logaritmo como una función- y a las tablas publicadas en 1628 por el flamenco **Adriaan Vlacq** (1600 – 1667) retomando las tablas de Briggs. El objetivo de Vlacq fue proporcionar un tratado de cálculo práctico, especialmente a los agrimensores.

Los logaritmos en el siglo XVII son parte del corpus matemático y como tal se encuentran en numerosas obras. No se trató de un simple método de cálculo publicado en manuales de bolsillo que, siempre complementados con un manual de uso, se utilizaron sobre el terreno y a bordo de los navíos; también fueron de gran ayuda para el nacimiento de la física matemática y un apoyo decisivo para el avance de la astronomía, tanto que para **Laplace** (1749 – 1827) “los logaritmos han duplicado la vida de los astrónomos”.

La aplicación de los logaritmos a todo cálculo multiplicativo condujo a la construcción de la “regla deslizante” o “regla de cálculo”, inventada en 1621 por el matemático inglés **William Oughtred** (1574 – 1660) y que hasta 1970 fue el símbolo del estudiante universitario de ingeniería.

Después de la muerte de Napier se dedicó gran atención a los logaritmos. En 1646 **Torricelli** propuso la gráfica de la curva logarítmica y en 1690 **Huygens** expuso sus propiedades. El estímulo de la geometría analítica alentó a varios matemáticos a estudiar los logaritmos utilizando las coordenadas cartesianas, lo que condujo a un resultado que relacionaba el logaritmo con el área entre una hipérbola y su asíntota. **Grégoire de Saint Vicent**, en su trabajo publicado en 1647, supuso haber resuelto los problemas de la cuadratura del círculo y de la hipérbola. Fracasó en el primero, pero puso en evidencia que las áreas bajo la hipérbola se parecen a los logaritmos y,

aunque él no se dio cuenta de su relación, otros matemáticos como **Mercator**, **Mersenne**, **Gregory**, **Newton** y **Leibniz**, llegaron a las mismas conclusiones generales de manera independiente.

Así, teniendo como antecedente un primer trabajo de Mercator, **John Wallis** (1616 – 1703) propuso un desarrollo con el que, a partir de la integración de la serie

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

en

$$\text{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

el cálculo de los logaritmos de los números era más rápido, por lo que éste es el método que aparece en lo sucesivo en los manuales del siglo XVIII.

Entre las grandes contribuciones derivadas del estudio del logaritmo se encuentra el descubrimiento del teorema del binomio por **James Gregory** (1638 – 1675), un matemático escocés y valioso sucesor de Napier, aunque dicho teorema se atribuye a Newton (1642 – 1727) quien probablemente lo había descubierto antes pero no publicó sus resultados.

Sin embargo, no se puede hablar de función logarítmica en el sentido moderno antes de la intervención de **Leonhard Euler** (1707 – 1783) en la segunda mitad del siglo XVIII. Fue él quien trató de manera magistral la integración de los logaritmos (aunque ya Leibniz y Newton utilizaron

casi un siglo antes las relaciones $\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$ y $\int \frac{dx}{x} = \ln x$, aquí escritas con la notación

moderna), y puso fin al debate que a principios del siglo XVIII sostuvieron Leibniz y **Jean Bernoulli** sobre la existencia de los logaritmos de los números negativos y de los imaginarios: en 1749 Euler estableció que cualquier número tiene una infinidad de logaritmos (complejos), de los cuales sólo en el caso de los números positivos uno es real.

Además de las tablas con formato de bolsillo y la regla de cálculo, el empleo de los logaritmos de base 10 (\log_{10} ; \log) se dio en el uso de escalas logarítmicas. Una cuarta aplicación se generó en el desarrollo de la teoría de ciertos conceptos matemáticos y en la descripción de fenómenos físicos o químicos. En este caso, los logaritmos utilizados tienen como base el número irracional e , cuyo valor aproximado hasta cinco decimales es $e = 2.71828\dots$. Dado que esta aplicación proviene del estudio de fenómenos naturales, los logaritmos de base e se llaman *logaritmos naturales* y se denotan como: \ln ; \log_e .

A partir del último tercio del siglo XX, la enseñanza de los logaritmos como instrumento de cálculo ha desaparecido de las escuelas y los productos resultantes de la invención de Napier se han vuelto piezas de museo. Con el desarrollo de las calculadoras de bolsillo, las tablas de logaritmos y la regla de cálculo no se usan más. No obstante, el estudio de las propiedades de la función logarítmica y su inversa, la función exponencial, permanecerán siempre como una parte importante de la matemática.

Con el desarrollo de la Teoría de la Información a partir de los trabajos de **Claude Shannon** (1916 – 2001), los logaritmos han asumido un papel fundamental pues constituyen una herramienta esencial en el contexto de la tecnología moderna.

Objetivo 2. Reconocerás la definición de logaritmo.

La definición de logaritmo es la siguiente:

Para todos los números positivos a , donde $a \neq 1$,

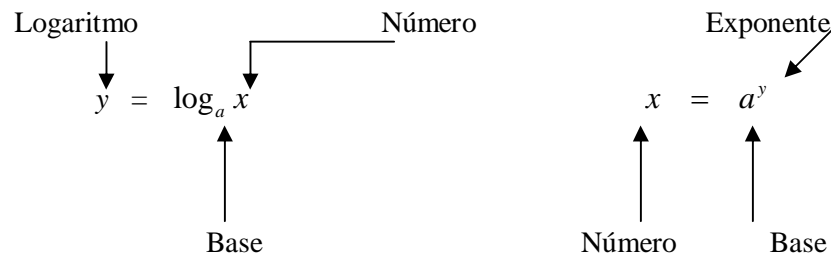
$$y = \log_a x \quad \text{significa} \quad a^y = x$$

En palabras, el logaritmo del número x en la base a es el exponente al que debe elevarse la base a para obtener el número x .

En la expresión $y = \log_a x$ la palabra *log* es una abreviatura de la palabra logaritmo, la letra a representa la base y la letra x representa el número cuyo logaritmo se desea obtener.

Por ejemplo, escribir $2 = \log_{10} 100$ significa $10^2 = 100$. Aquí, el logaritmo es 2, la base es 10 y el número cuyo logaritmo se desea es 100. En otras palabras, el logaritmo 2 es el exponente al que hay que elevar la base, 10, para obtener el número 100.

En la siguiente figura se ilustra la relación entre la notación de logaritmos y la notación exponencial:

**Ejemplos:**

Las siguientes expresiones exponenciales y logarítmicas son equivalentes:

- | | | |
|-----|---|---------------------------------------|
| 1.) | $10^0 = 1$ | $\log_{10} 1 = 0$ |
| 2.) | $4^2 = 16$ | $\log_4 16 = 2$ |
| 3.) | $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$ | $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32} = 5$ |
| 4.) | $\log_5 \frac{1}{25} = -2$ | $5^{-2} = \frac{1}{25}$ |
| 5.) | $\log_3 81 = 4$ | $3^4 = 81$ |

Como consecuencias de la definición de logaritmo, se pueden deducir estas identidades:

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces

- 1.) $\log_a a^x = x$
- 2.) $a^{\log_a x} = x \quad (x > 0)$

Ejemplos:

- 1.) $\log_6 6^5 = 5$
- 2.) $\log_6 6^x = x$
- 3.) $3^{\log_3 7} = 7$
- 4.) $5^{\log_5 x} = x \quad (x > 0)$

Objetivo 3. Recordarás la diferencia entre los logaritmos naturales y los logaritmos base diez.

Los logaritmos de base 10 se conocen como *logaritmos comunes* o *logaritmos de Briggs*, Éste es el sistema de logaritmos que se utiliza, principalmente, para realizar operaciones aritméticas. En este tipo de logaritmos los números como 10, 100, 1000, 0.1, 0.01, 0.001, etcétera, es decir las potencias de diez, tienen como logaritmos a números enteros, y cualquier otro número tiene como logaritmo a un número entero más una fracción. El logaritmo común de x se denota como $\log x$.

Ejemplos:

- 1.) $\log 100 = 2$
- 2.) $\log 0.0001 = -4$
- 3.) $\log 5 = 0 + 0.698970\dots$
- 4.) $\log 0.5 = -1 + 0.698970\dots$

A la parte entera de un logaritmo común se le conoce como *característica* y a la parte fraccionaria como *mantisa*.

Otro sistema de logaritmos, muy importante por su uso, es el de los *logaritmos naturales*, o *logaritmos neperianos*, que tiene como base el número irracional $e = 2.71828\dots$; el logaritmo natural de x se representa por $\ln x$. Como es de esperarse, en este tipo de logaritmos los números que tienen logaritmos enteros son las potencias de e .

Ejemplos:

- 1.) $\ln e = 1$
- 2.) $\ln e^5 = 5$
- 3.) $\ln 6 = 1.791759\dots$
- 4.) $\ln 0.6 = -0.510823\dots$

Los logaritmos naturales se generaron para el estudio de cuestiones teóricas en el cálculo diferencial e integral, y para la descripción de fenómenos naturales, por ejemplo, para determinar la longitud de la trayectoria de un proyectil; la cantidad de trabajo hecho por un gas que se expande; el tiempo que

requiere un objeto caliente para enfriarse a una temperatura dada; el tiempo necesario para que una colonia de bacterias crezca a un tamaño dado, entre otras muchas.

Objetivo 4. Recordarás las propiedades generales de los logaritmos.

Las propiedades generales de cualquier sistema de logaritmos son:

1. La base tiene que ser un número positivo diferente de 1.
2. El cero y los números negativos no tienen logaritmo.
3. El logaritmo de la base es 1.
4. El logaritmo de 1 es cero.
5. Los números mayores que 1 tienen logaritmo positivo.
6. Los números comprendidos entre cero y 1 tienen logaritmo negativo.

En el cálculo avanzado, con la introducción de los números complejos y las funciones que tienen dominios complejos, algunas de estas restricciones desaparecen, pero se anotan aquí para fines prácticos de nivel básico.

Ejemplos:

- 1.) $\log_{-4} x$ y $\log_{-11} a$ no existen, porque las bases son negativas.
- 2.) $\ln(-34)$ y $\log_2(-0.75)$ no existen puesto que -34 y -0.75 son números negativos.
- 3.) $\log_7 7 = 1$, $\log_{15} 15 = 1$, $\log_{0.443} 0.443 = 1$
- 4.) $\log 1 = \ln 1 = \log_3 1 = \log_{5/7} 1 = 0$
- 5.) $\log 67 = 1.826075\dots$, $\log 321 = 2.506505$, $\ln 92.1 = 4.522875\dots$

$$6.) \quad \ln 0.79 = -0.235722\dots, \quad \log \frac{2}{3} = -0.176091\dots, \quad \ln 0.443 = -0.814186\dots$$

Objetivo 5. Recordarás las leyes de las operaciones con logaritmos.

Ley del producto:

En cualquier sistema de logaritmos, para los números positivos x , y se cumple que

$$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$$

Ley del cociente:

En cualquier sistema de logaritmos, para los números positivos x , y se cumple que

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$$

Ley de la potencia:

En cualquier sistema de logaritmos, para el número positivo x y para cualquier número n , se cumple que

$$n(\log_a x) = \log_a x^n$$

Las demostraciones de estas leyes son sencillas si se recurre a la notación exponencial. Por ejemplo, para demostrar la regla del cociente basta considerar que si

$$\log_a x = p, \quad y \quad \log_a y = q$$

entonces

$$a^p = x \quad y \quad a^q = y$$

como:

$$\frac{x}{y} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

resulta que:

$$p - q = \log \frac{x}{y}$$

$$\log x - \log y = \log \frac{x}{y}$$

Las otras dos leyes se demuestran en forma similar y su aplicación es directa.

Ejemplos:

$$1.) \quad \log_4 3 + \log_4 5 = \log_4 (3 \cdot 5) = \log_4 15$$

$$2.) \quad \log_6 \frac{7}{8} = \log_6 7 - \log_6 8$$

$$3.) \quad \ln x - \ln 4 = \ln \left(\frac{x}{4} \right)$$

$$\begin{aligned} 4.) \quad \log_5 \left(\frac{12x}{3y} \right) &= \log_5 (12x) - \log_5 (3y) \\ &= (\log_5 12 + \log_5 x) - (\log_5 3 + \log_5 y) \\ &= \log_5 12 + \log_5 x - \log_5 3 - \log_5 y \end{aligned}$$

$$5.) \quad 3 \log_2 5 = \log_2 (5^3) = \log_2 125$$

$$\begin{aligned} 6.) \quad \log \frac{4y^3}{x^2} &= \log (4y^3) - \log (x^2) \\ &= (\log 4 + \log y^3) - \log (x^2) \\ &= (\log 4 + 3 \log y) - 2 \log x \\ &= \log 4 + 3 \log y - 2 \log x \end{aligned}$$

Objetivo 6. Recordarás el procedimiento para cambiar logaritmos de una base a otra.

El concepto de cambio de base se deriva de la definición de logaritmo.

Para entender mejor el procedimiento se presenta un ejemplo: Se trata de encontrar el logaritmo de 39 en base 2, a partir de su logaritmo en base 10.

Para ello, se plantea la incógnita a encontrar, x :

$$x = \log_2 39$$

o, por la definición de logaritmo

$$2^x = 39$$

al aplicar el logaritmo (base 10) en la expresión anterior y tomando en cuenta la ley de la potencia, se obtiene

$$\log 2^x = x(\log 2) = \log 39$$

y resulta que:

$$x = \frac{\log 39}{\log 2}$$

de donde se puede encontrar x con ayuda de tablas o de una calculadora,

$$x = \frac{\log 39}{\log 2} = \frac{1.591065...}{0.301030...} = 5.285402...$$

de modo que

$$\log_2 39 = 5.285402...$$

El procedimiento anterior se puede generalizar fácilmente para mostrar que:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

que es la expresión que permite encontrar el logaritmo de un número x en la base b si se conocen el logaritmo de ese mismo número y el de b, en cualquier otra base.

Ejemplos:

- 1.) Para obtener $\log_7 81$, sabiendo que $\log_3 81 = 4$ y $\log_3 7 = 1.771244...$, se aplica la fórmula indicada:

$$\log_7 81 = \frac{\log_3 81}{\log_3 7} = \frac{4}{1.771244...} = 2.258300...$$

- 2.) Para obtener $\log 0.35$, sabiendo que $\ln 0.35 = -0.049822...$ y $\ln 10 = 2.302585...$, de acuerdo con la fórmula dada se calcula:

$$\log 0.35 = \frac{\ln 0.35}{\ln 10} = \frac{-1.049822\dots}{2.302585\dots} = -0.455932\dots$$

- 3.) Para obtener $\ln 5.76$, sabiendo que $\log 5.76 = 0.760422\dots$ y $\log e = 0.434294\dots$, se procede igual que en los casos anteriores:

$$\ln 5.76 = \frac{\log 5.76}{\log e} = \frac{0.760422\dots}{0.434294\dots} = 1.750938\dots$$

Objetivo 7. Resolverás ecuaciones que involucren logaritmos.

Para resolver este tipo de ecuaciones, generalmente se deben aplicar las leyes de los logaritmos para que la incógnita aparezca en un único logaritmo y, luego, recurrir a la definición de logaritmo para eliminar a éste. El resto del procedimiento consiste en resolver la ecuación resultante en forma usual. Sin embargo, es necesario cuidar que la solución obtenida respete las propiedades de los logaritmos, particularmente la de que no existen logaritmos de números negativos ni el logaritmo de cero.

Ejemplos:

- 1.) Para obtener el valor de x en la ecuación

$$\log 4x = 3\log 2 + 4\log 3$$

se aplican las leyes de logaritmos para dejar:

$$\begin{aligned}\log 4x &= \log 2^3 + \log 3^4 \\ &= \log(2^3 \cdot 3^4) = \log(8 \cdot 81)\end{aligned}$$

$$\log 4x = \log 648$$

entonces, al tomar la definición de logaritmo queda

$$10^{4x} = 10^{648}$$

y, de aquí:

$$4x = 648$$

$$x = \frac{648}{4} = 162$$

2.) Para obtener el valor de x en la ecuación

$$\log_2 x - 3\log_2 x = 2$$

se aplican las leyes de logaritmos y:

$$\log_2 x - \log_2 x^3 = 2$$

$$\log_2 \frac{x}{x^3} = 2$$

$$\log_2 \frac{1}{x^2} = 2$$

de acuerdo con la definición de logaritmo:

$$\frac{1}{x^2} = 2^2 = 4$$

$$1 = 4x^2$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

A partir de esta última expresión se podrían obtener dos valores para x :

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad x = -\frac{1}{2}$$

pero el valor negativo no se puede aceptar, puesto que en la ecuación original se tiene $\log_2 x$ y, como se indicó anteriormente, los números negativos no tienen logaritmos.

Por lo tanto, la solución es:

$$x = \frac{1}{2}$$

3.) Para obtener el valor de x en la ecuación

$$\frac{\ln(2x^2 - 4)}{\ln(x - 4)} = 2$$

se reescribe

$$\ln(2x^2 - 4) = 2[\ln(x - 4)]$$

se aplica la ley de la potencia

$$\ln(2x^2 - 4) = \ln(x - 4)^2$$

y la definición de logaritmo para obtener que:

$$e^{(2x^2-4)} = e^{(x-4)^2}$$

entonces

$$(2x^2 - 4) = (x - 4)^2$$

$$2x^2 - 4 = x^2 - 8x + 16$$

$$x^2 + 8x - 20 = 0$$

De esta última ecuación se obtiene que $x = 2$ o $x = -10$, pero ninguno de los dos valores puede aceptarse porque en la ecuación original el divisor $\ln(x - 4)$, quedaría como $\ln(-2)$ o $\ln(-14)$. Por tanto, la ecuación no tiene solución (en los números reales).
