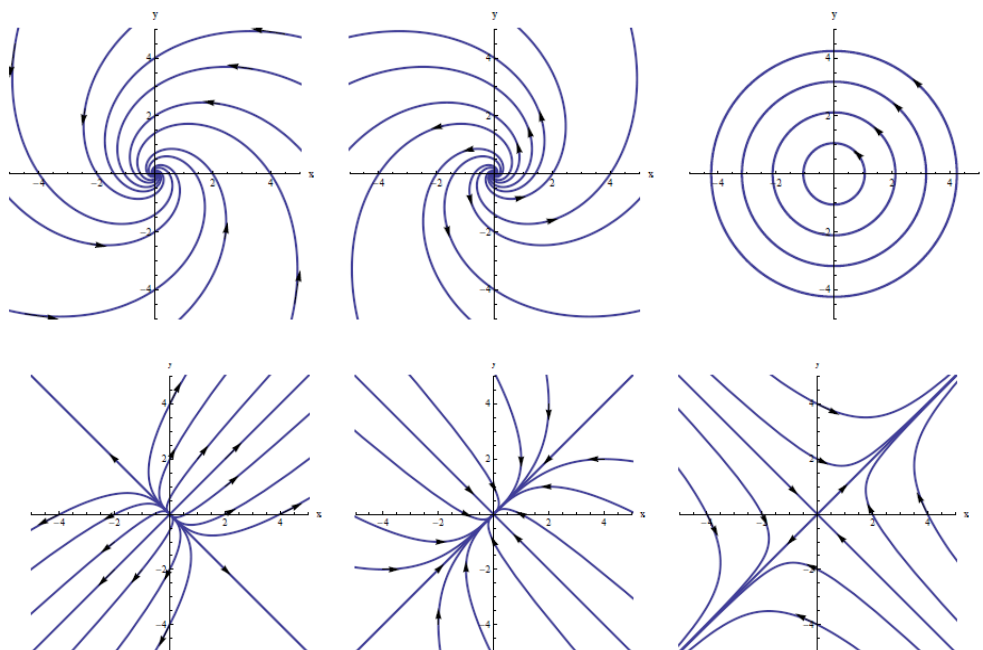


Parte 3: Flujos en dos dimensiones



En más de una dimensión los trayectorias de un flujo tienen más espacio para “moverse” que en una dimensión y un comportamiento dinámico más amplio. Antes de abordar los sistemas más complejos (sistemas no-lineales), comenzaremos por estudiar el comportamiento de los sistemas más simples que son los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias. ¿Por qué? Existen resultados, que aseguran que el comportamiento de un sistema no-lineal localmente alrededor de cada punto de equilibrio se puede determinar a partir del comportamiento de su linealización alrededor de dicho punto. Queremos entonces estudiar cualitativamente las soluciones de un sistema lineal en el plano a partir de la clasificación de sus puntos de equilibrio.

✓ **Trabajaremos en el Capítulo 5 y 6 del Libro Strogatz.**

Sistemas Lineales en dos dimensiones - El plano fase

Analizaremos el *comportamiento* de las trayectorias que son solución del sistema de ecuaciones lineales ordinarias de la forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a \cdot x(t) + b \cdot y(t) \\ \dot{y}(t) = c \cdot x(t) + d \cdot y(t) \end{cases} \quad (1)$$

Donde a ; b ; c y d son constantes reales. Variables, t independiente, $x(t)$ e $y(t)$ dependientes.

El sistema puede escribirse en la forma matricial:

$$\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad y \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Estos sistemas de ecuaciones diferenciales pueden resolverse analíticamente y las soluciones (también llamadas trayectorias) dependen de los autovalores y autovectores de la matriz A, y caracterizarán su comportamiento.

Las soluciones reales $x(t)$, $y(t)$ del sistema pueden visualizarse graficando las trayectorias $(x(t); y(t))$ para t real, en el plano x - y , denominado *plano (o espacio) de fase*. O también graficar las curvas $x(t)$ y $y(t)$ en función de t .

Puntos de equilibrio. Se dice que X^* es punto de equilibrio del sistema si

$$A \cdot X^* = 0$$

En el caso que A sea no singular el único punto de equilibrio es el vector nulo $X^*=0$.

En el caso A singular, los puntos de equilibrio son los vectores X^* pertenecientes al Espacio Nulo de A .

Actividad

Comencemos a estudiar el tema con un ejemplo sencillo. Sea el siguiente sistema al que se lo denomina *desacoplado*.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a \cdot x(t) \\ \dot{y}(t) = -y(t) \end{cases}$$

Resolver el sistema para una condición inicial (x_0, y_0) para $t=0$. Simular las trayectorias resultantes para distintos valores de a . Analizar la estabilidad del punto de equilibrio.

Clasificación de los sistemas lineales

La solución general del sistema lineal (1) en caso que la matriz sea diagonalizable puede escribirse como una combinación lineal de soluciones linealmente independientes de la forma:

$$X(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot V_1 + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot V_2$$

Con c_1 y c_2 constantes, V_1 y V_2 **autovectores** correspondientes a los **autovalores** λ_1 y λ_2 de la matriz A .

Los autovalores caracterizarán el comportamiento de las trayectorias del sistema y la estabilidad del punto de equilibrio.

Actividad para entregar 1

A partir del estudio y análisis del punto 5.2 del Libro, confeccionar un cuadro al estilo del dado, en el que se categoricen el tipo de soluciones reales según características de los autovalores de la matriz, identificando los casos en que el origen es un punto de equilibrio estable y aquellos en que es inestable.

Característica de los autovalores	Gráfico en el plano fase	Punto de equilibrio - denominación	Ejemplo
Ambos reales y positivos			
Ambos reales y negativos			
Uno positivo y uno negativo			
Complejos con parte real negativa			
Complejos con parte real positiva			
Imaginarios			

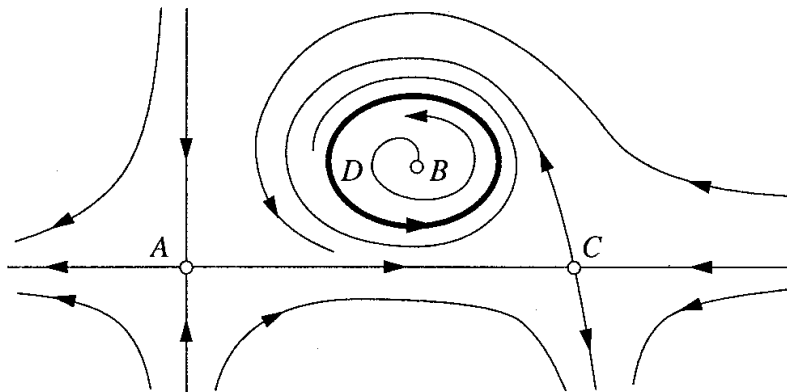
Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no-lineales

En esta parte estudiaremos el comportamiento de los sistemas no-lineales de dos dimensiones:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t)) \end{cases}$$

Para estos sistemas no es esperable encontrar las soluciones analíticas. Por lo tanto se determinará su comportamiento a partir del conocimiento del flujo $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$.

Varios tipos de comportamientos podrán ser posibles, como se observa en la figura siguiente, puntos fijos inestables (A, B y C), órbitas cerradas (donde $x(t) = x(t+T)$, para $T > 0$, y para todo t) y otros.



Puntos fijos y linealización

En muchos casos el comportamiento local de un sistema no-lineal cerca de un punto de equilibrio se puede inferir a partir del sistema linealizado alrededor del punto y estudiar entonces el comportamiento lineal que resulta a partir de la linealización (Pag. 150, Strogatz).

La dinámica del sistema no lineal puede ser analizada mediante el conocimiento del sistema linealizado.

Linealización es el proceso matemático que permite aproximar un sistema no-lineal a un sistema lineal en el entorno de un punto determinado.

Linearized System

Consider the system

$$\dot{x} = f(x, y)$$

$$\dot{y} = g(x, y)$$

and suppose that (x^*, y^*) is a fixed point, i.e.,

$$f(x^*, y^*) = 0, \quad g(x^*, y^*) = 0.$$

Let

$$u = x - x^*, \quad v = y - y^*$$

denote the components of a small disturbance from the fixed point. To see whether the disturbance grows or decays, we need to derive differential equations for u and v . Let's do the u -equation first:

$$\dot{u} = \dot{x} \quad (\text{since } x^* \text{ is a constant})$$

$$= f(x^* + u, y^* + v) \quad (\text{by substitution})$$

$$= f(x^*, y^*) + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv) \quad (\text{Taylor series expansion})$$

$$= u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv) \quad (\text{since } f(x^*, y^*) = 0).$$

To simplify the notation, we have written $\partial f / \partial x$ and $\partial f / \partial y$, but please remember that these partial derivatives are to be evaluated *at the fixed point* (x^*, y^*) ; thus they are *numbers*, not functions. Also, the shorthand notation $O(u^2, v^2, uv)$ denotes **quadratic terms** in u and v . Since u and v are small, these quadratic terms are *extremely* small.

Similarly we find

$$\dot{v} = u \frac{\partial g}{\partial x} + v \frac{\partial g}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv).$$

Hence the disturbance (u, v) evolves according to

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \text{quadratic terms.} \quad (1)$$

The matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)}$$

is called the **Jacobian matrix** at the fixed point (x^*, y^*) . It is the multivariable analog of the derivative $f'(x^*)$ seen in Section 2.4.

Now since the quadratic terms in (1) are tiny, it's tempting to neglect them altogether. If we do that, we obtain the **linearized system**

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2)$$

Esta técnica es ampliamente usada en el estudio de sistemas dinámicos, por la razón que se cuenta con métodos analíticos generales para la solución de sistemas lineales, incluso se tendrá una solución general del comportamiento del proceso, independientemente de los valores de los parámetros y de las variables de entrada si las hubiese. Esto no es posible en sistemas no-lineales pues la solución por computadora mediante métodos numéricos arroja una solución del comportamiento del sistema válida sólo para valores específicos de los parámetros y de las variables de entrada.

Nos preguntaremos: ¿Qué cambia del sistema lineal en relación al comportamiento? ¿Qué hay de nuevo? ¿Qué puede pasar? ¿Existen limitaciones respecto del sistema lineal? ¿Podría existir caos en dos dimensiones? El Teorema de Poincaré-Bendixson, nos dará respuesta a algunas de estas preguntas.

Actividad para practicar

Para cada uno de los siguientes sistemas encontrar sus puntos fijos, clasificarlos y realizar algunas simulaciones.

- a) $\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) - y(t) \\ \dot{y}(t) = x(t)^2 - 4 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} \dot{x}(t) = \text{sen}(y(t)) \\ \dot{y}(t) = x(t) - x(t)^3 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} \dot{x}(t) = ay(t) + x(t) - x(t)^3 \\ \dot{y}(t) = -y(t) \end{cases}$

d) Sea el siguiente sistema no lineal.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= y(t)^3 - 4x(t) \\ \dot{y}(t) &= y(t)^3 - y(t) - 3x(t) \end{cases}$$

Encontrar los puntos de equilibrio y clasificarlos. Mostrar que la línea $x=y$ es invariante. Es decir, que cualquier trayectoria que inicia allí, permanece allí. c) Mostrar que $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| = 0$. Ayuda: encontrar una ecuación diferencial para $x-y$. d) Realizar simulaciones para un dominio de las variables $-20 \leq x \leq 20, -20 \leq y \leq 20$. Observar qué sucede para t grande.

Actividad para entregar 2

Dado el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= -y(t) + a x(t)(x(t)^2 + y(t)^2) \\ \dot{y}(t) &= x(t) + a y(t)(x(t)^2 + y(t)^2) \end{cases}$$

- a) ¿El $(0,0)$ es un punto de equilibrio? b) Linealizar el sistema y clasificar el $(0,0)$.
c) Escribir el sistema en coordenadas polares. ¿Qué ventajas observa? Analizarlo.
d) Comparar lo hallado en b) y en c), y extraer conclusiones.

Actividad para entregar 3

Clasificar el punto de equilibrio $(0,0)$ para el sistema para todos los valores del parámetro a . Realizar simulaciones.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= -y(t) + a x(t)^3 \\ \dot{y}(t) &= x(t) + a y(t)^3 \end{cases}$$