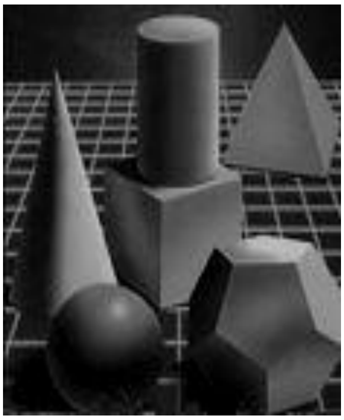
“

ÍNDICE



I BIMESTRE

CAPÍTULO

HISTORIA DE LA GEOMETRIA

GEOMETRÍA

Geometría (del griego *geo,* “tierra”; *metrein,* “medir”), rama de las matemáticas que se ocupa de las propiedades del espacio. En su forma más elemental, la geometría se preocupa de problemas métricos como el cálculo del área y diámetro de figuras planas y de la superficie y volumen de cuerpos sólidos. Otros campos de la geometría son la geometría analítica, geometría descriptiva, topología, geometría de espacios con cuatro o más dimensiones, geometría fractal, y geometría no euclídea.

GEOMETRÍA DEMOSTRATIVA PRIMITIVA

El origen del término geometría es una descripción precisa del trabajo de los primeros geómetras, que se interesaban en problemas como la medida del tamaño de los campos o el trazado de ángulos rectos para las esquinas de los edificios. Este tipo de geometría empírica, que floreció en el Antiguo Egipto, Sumeria y Babilonia, fue refinado y sistematizado por los griegos. En el siglo VI a.C. el matemático Pitágoras colocó la piedra angular de la geometría científica al demostrar que las diversas leyes arbitrarias e inconexas de la geometría empírica se pueden deducir como conclusiones lógicas de un número limitado de axiomas, o postulados. Estos postulados fueron considerados por Pitágoras y sus discípulos como verdades evidentes; sin embargo, en el pensamiento matemático moderno se consideran como un conjunto de supuestos útiles pero arbitrarios.

Un ejemplo típico de los postulados desarrollados y aceptados por los matemáticos griegos es la siguiente afirmación: "una línea recta es la distancia más corta entre dos puntos". Un conjunto de teoremas sobre las propiedades de puntos, líneas, ángulos y planos se puede deducir lógicamente a partir de estos axiomas. Entre estos teoremas se encuentran: "la suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a la suma de dos ángulos rectos", y "el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados" (conocido como teorema de Pitágoras). La geometría demostrativa de los griegos, que se ocupaba de polígonos y círculos y de sus correspondientes figuras tridimensionales, fue mostrada rigurosamente por el matemático griego Euclides, en su libro *Los elementos*. El texto de Euclides, a pesar de sus imperfecciones, ha servido como libro de texto básico de geometría hasta casi nuestros días.

“

PRIMEROS PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

Los griegos introdujeron los problemas de construcción, en los que cierta línea o figura debe ser construida utilizando sólo una regla de borde recto y un compás. Ejemplos sencillos son la construcción de una línea recta dos veces más larga que una recta dada, o de una recta que divide un ángulo dado en dos ángulos iguales. Tres famosos problemas de construcción que datan de la época griega se resistieron al esfuerzo de muchas generaciones de matemáticos que intentaron resolverlos: la duplicación del cubo (construir un cubo de volumen doble al de un determinado cubo), la cuadratura del círculo (construir un cuadrado con área igual a un círculo determinado) y la trisección del ángulo (dividir un ángulo dado en tres partes iguales). Ninguna de estas construcciones es posible con la regla y el compás, y la imposibilidad de la cuadratura del círculo no fue finalmente demostrada hasta 1882.

Los griegos, y en particular Apolonio de Perga, estudiaron la familia de curvas conocidas como cónicas y descubrieron muchas de sus propiedades fundamentales. Las cónicas son importantes en muchos campos de las ciencias físicas; por ejemplo, las órbitas de los planetas alrededor del Sol son fundamentalmente cónicas.

Arquímedes, uno de los grandes científicos griegos, hizo un considerable número de aportaciones a la geometría. Inventó formas de medir el área de ciertas figuras curvas así como la superficie y el volumen de sólidos limitados por superficies curvas, como paraboloides y cilindros. También elaboró un método para calcular una aproximación del valor de pi (), la proporción entre el diámetro y la circunferencia de un círculo y estableció que este número estaba entre 3 10/70 y 3 10/71.

GEOMETRÍA ANALÍTICA

La geometría avanzó muy poco desde el final de la era griega hasta la edad media. El siguiente paso importante en esta ciencia lo dio el filósofo y matemático francés René Descartes, cuyo tratado *El Discurso del Método,* publicado en 1637, hizo época. Este trabajo fraguó una conexión entre la geometría y el álgebra al demostrar cómo aplicar los métodos de una disciplina en la otra. Éste es un fundamento de la geometría analítica, en la que las figuras se representan mediante expresiones algebraicas, sujeto subyacente en la mayor parte de la geometría moderna.

Otro desarrollo importante del siglo XVII fue la investigación de las propiedades de las figuras geométricas que no varían cuando las figuras son proyectadas de un plano a otro. Un ejemplo sencillo de geometría proyectiva queda ilustrado en la figura 1. Si los puntos *A, B, C* y *a, b, c* se colocan en cualquier posición de una cónica, por ejemplo una circunferencia, y dichos puntos se unen *A* con *b* y *c*, *B* con *c* y *a*, y *C* con *b* y *a,* los tres puntos de las intersecciones de dichas líneas están en una recta. De la misma manera, si se dibujan seis tangentes cualesquiera a una cónica, como en la figura 2, y se trazan rectas que unan dos intersecciones opuestas de las tangentes, estas líneas se cortan en un punto único. Este teorema se denomina proyectivo, pues es cierto para todas las cónicas, y éstas se pueden transformar de una a otra utilizando las proyecciones apropiadas, como en la figura 3, que muestra que la proyección de una circunferencia es una elipse en el otro plano.

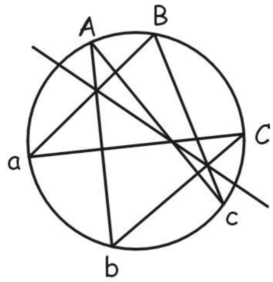


Figura 1

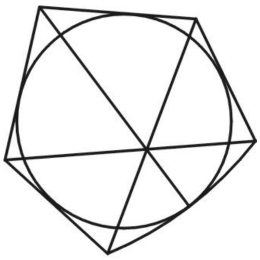


Figura 2

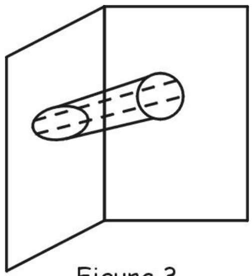


Figura 3

MODERNOS AVANCES

La geometría sufrió un cambio radical de dirección en el siglo XIX. Los matemáticos Carl Friedrich Gauss, Nikolái Lobachevski, y János Bolyai, trabajando por separado, desarrollaron sistemas coherentes de geometría no euclídea. Estos sistemas aparecieron a partir de los trabajos sobre el llamado "postulado paralelo" de Euclides, al proponer alternativas que generan modelos extraños y no intuitivos de espacio, aunque, eso sí, coherentes.

Casi al mismo tiempo, el matemático británico Arthur Cayley desarrolló la geometría para espacios con más de tres dimensiones. Imaginemos que una línea es un espacio unidimensional. Si cada uno de los puntos de la línea se sustituye por una línea perpendicular a ella, se crea un plano, o espacio bidimensional. De la misma manera, si cada punto del plano se sustituye por una línea perpendicular a él, se genera un espacio tridimensional. Yendo más lejos, si cada punto del espacio tridimensional se sustituye por una línea perpendicular, tendremos un espacio tetradimensional. Aunque éste es físicamente imposible, e inimaginable, es conceptualmente sólido. El uso de conceptos con más de tres dimensiones tiene un importante número de aplicaciones en las ciencias físicas, en particular en el desarrollo de teorías de la relatividad.

También se han utilizado métodos analíticos para estudiar las figuras geométricas regulares en cuatro o más dimensiones y compararlas con figuras similares en tres o menos dimensiones. Esta geometría se conoce como geometría estructural. Un ejemplo sencillo de este enfoque de la geometría es la definición de la figura geométrica más sencilla que se puede dibujar en espacios con cero, una, dos, tres, cuatro o más dimensiones. En los cuatro primeros casos, las figuras son los bien conocidos punto, línea, triángulo y tetraedro respectivamente. En el espacio de cuatro dimensiones, se puede demostrar que la figura más sencilla está compuesta por cinco puntos como vértices, diez segmentos como aristas, diez triángulos como caras y cinco tetraedros. El tetraedro, analizado de la misma manera, está compuesto por cuatro vértices, seis segmentos y cuatro triángulos.

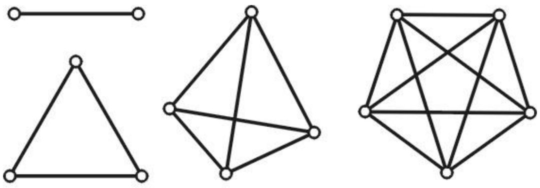


Figura 4

Otro concepto dimensional, el de dimensiones fraccionarias, apareció en el siglo XIX. En la década de 1970 el concepto se desarrolló como la geometría fractal.

PROBLEMAS PARA LA CLASE

1. Quién colocó la piedra angular de la geometría científica?

   Rpta.______________________

2. ¿Cómo contribuyó Euclides, en el avance de la geometría?

   Rpta.______________________

3. El libro de Euclides se denominó:

   Rpta.______________________

4. ¿Quiénes introdujeron los problemas de construcción?

   Rpta.______________________

5. ¿Quienes estudiaron a las curvas conocidas como “cónicas”?

   Rpta.______________________

6. ¿En qué contribuyó Arquímedes?

   Rpta.______________________

7. ¿Quiénes desarrollaron la geometría no Euclídea?

   Rpta.______________________

8. ¿Cuál es el concepto de geometría?

   Rpta.______________________

9. Diga cuáles son los otros campos de la geometría

   Rpta.___________________

10. ¿En qué época la geometría tuvo un letargo en su avance?

    Rpta. ___________________

11. ¿Cuáles son los tres famosos problemas de construcción que datan de la época griega?

    Rpta.____________________

12. ¿Quienes impulsaron los modernos avances de la geometría?

    Rpta. ___________________

13. ¿Qué es la geometría demostrativa?

    Rpta.___________________

14. ¿Qué matemático, escribió el “Discurso del Método”?

    Rpta.____________________

15. ¿En qué se interesaban los primeros geómetras?

    Rpta._____________________

PROBLEMAS PARA LA CASA

1. Parte de la matemática que se ocupa de las propiedades en su forma más elemental

A) Astronomía **B)** Geometría
C) Topología **D)** Física
E) Química

2. Uno de los campos de la geometría es:

A) Topología **B)** Geografía
C) Meteorología **D)** Astronomía
E) Geología

3. Colocó la piedra angular de la geometría científica

A) Euclides **B)** Apolonio
C) Arquímedes **D)** Pitágoras
E) Descartes

4. La geometría demostrativa de los griegos se ocupaba de:

A) Planos y Rectas
B) Ángulos
C) Puntos y Rectas
D) Curvas
E) Polígonos y círculos

5. Escribió el libro “Los Elementos”

A) Pitágoras **B)** Euclides
C) Descartes **D)** Gauss
E) Arquímedes

6. ¿Quiénes introdujeron los problemas de construcción?

A) Los Persas
B) Los Egipcios
C) Los Griegos
D) Los Babilonios
E) Los Romanos

7. En que año se demostró la cuadratura del círculo

A) 1772 **B)** 1662
C) 1552 **D)** 1882
E) 2003

8. Estudió a las “Cónicas”

A) Nikolai Lobacheski
B) Arthur Cayley
C) Apolonio de Perga
D) Arquímedes
E) Euclides

9. ¿Quién publicó el libro “El Discurso del Método”?

A) Pitágoras
B) René Descartes
C) Apolonio de Perga
D) Euclides
E) Fiedrich Gauss

10. ¿Quién desarrolló la geometría para espacios con más de tres dimensiones?

A) Arthur Cayley
B) János Bolyai
C) Euclides
D) Gauss
E) Arquímedes

“

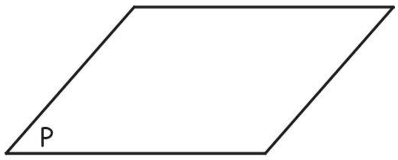
ELEMENTOS DE LA GEOMETRÍA - SEGMENTOS

ELEMENTOS DE LA GEOMETRÍA

El Plano

Imagina una hoja de papel que se extiende indefinidamente en todas sus direcciones. Esto te dará una idea de **Plano**.

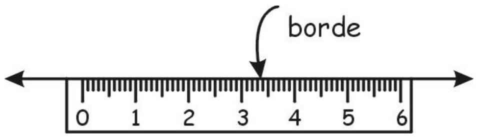
El plano no tiene límite y solamente podemos representar una parte de él.

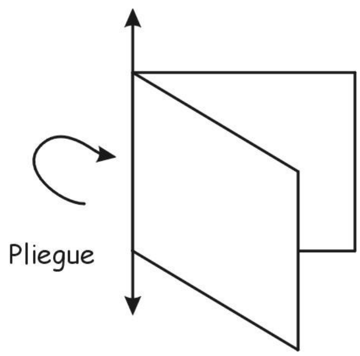


Plano P.

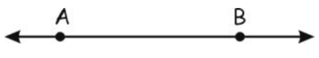
La recta es una línea que se extiende indefinidamente en ambos sentidos. Se designa a veces por dos letras mayúsculas o por una sola letra (mayúscula o minúscula).

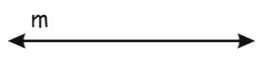
La recta es un sub conjunto de plano, esto quiere decir que el plano contiene infinitas rectas.





Notación:

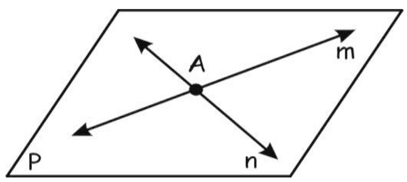




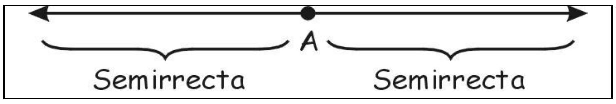
$\overleftrightarrow{AB}$: Se lee “recta AB” $\overleftrightarrow{L}$: Se lee “recta L” $\overleftrightarrow{m}$: Se lee recta “m”

El Punto

En el plano P se han trazado las rectas **m** y **n** las cuales se cortan en el punto “A”, o sea la intersección de las dos rectas en el punto “A”. Luego:

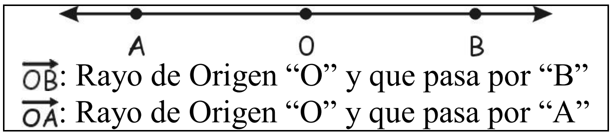


Semirrecta



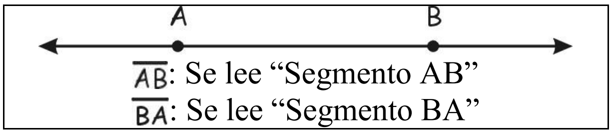
El punto **A** divide a la recta en dos partes, cada parte recibe el nombre de semirrecta.

Rayo



A la unión de una semirrecta con un punto frontera se llama rayo. El punto donde se inicia el rayo se llama origen.

Segmento



La parte de una recta comprendida entre dos puntos, incluyendo a dichos puntos se llama **segmento**.

Un segmento se denota por letras mayúsculas que corresponden a sus extremos, con una rayita superior. El segmento se diferencia de la recta, el rayo y la semirrecta, por tener longitud.

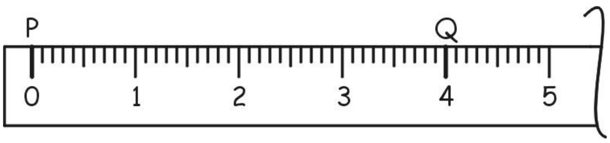
SEGMENTOS

Medición o Comparación de Segmentos

La longitud de un segmento es la distancia que hay entre los dos puntos de cada uno de sus extremos.

Ejemplo:

Al medir el segmento $\overline{PQ}$ con una regla graduada en centímetros comprobamos que su medida es de 4 cm.

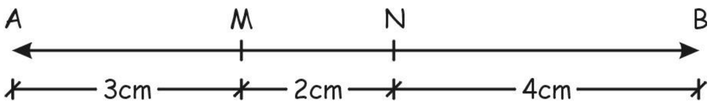


Operaciones con Segmentos

Las operaciones se realizan con los números que indican las longitudes.

Ejemplo:

Con respecto a la figura que se muestra, realizar las operaciones siguientes:



1) AM + MN – NB

Rpta. _ _ _ _ _ _

2) 2AM + 3MN

Rpta. _ _ _ _ _ _

3) AM . MN + MN . NB

Rpta. _ _ _ _ _ _

4) $\frac{2AM\ .\ NB}{MN + NB}$

Rpta. _ _ _ _ _ _

5) $NB^2 - AM^2$

Rpta. _ _ _ _ _ _

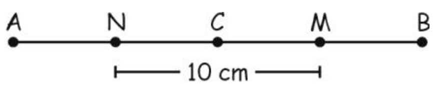
PROBLEMAS PARA LA CLASE

NIVEL I

1. En una recta se toman los puntos consecutivos P, Q y R, PR =20; QR = 4.
Hallar PQ

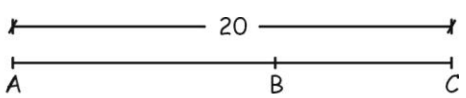
Rpta.

2. Si: M y N son puntos medios de $\overline{AC}$ ó $\overline{CB}$.
Hallar: AB



Rpta.

3. Si: AC + AB = 32
Hallar BC

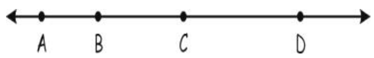


Rpta.

4. Hallar BC, si AC = 9; BD = 11, AD = 15

Rpta.

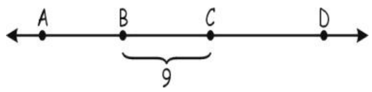
5. Si: 2AB = 3BC = 7CD = 84, Hallar AC



Rpta.

NIVEL II

6. Si: B y C son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$.
Hallar AD

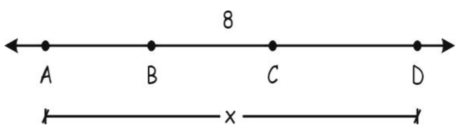


Rpta.

7. Si: AB = CD = 18; BC = DE = 16. Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$

Rpta.

8. Si: AC + BD = 36.
Hallar AD



Rpta.

9. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B y C tal que AB – BC = 6 y AB + BC = 10
Hallar AB

Rpta.

NIVEL III

10. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B y C, siendo AC = 12. Calcule la longitud del segmento cuyos extremos son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente

Rpta.

11. En una recta se ubican los puntos A, B, C y D tal que $\frac{AB}{3} = BC = \frac{CD}{2}$, siendo
AD = 12.
Calcule BC.

Rpta.

12. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B y C tal que AB = 2BC y AC = 6.
Calcule: BC

Rpta.

13. Si: M es punto medio de $\overline{AE}$ y AC – CE = 32.
Hallar MC

Rpta.

“

14. Si: AB = 10, BC = 18.
Hallar BM, siendo M punto de $\overline{AC}$

Rpta.

15. Si M es punto medio de $\overline{BC}$ y AB + AC = 38.

Hallar AM

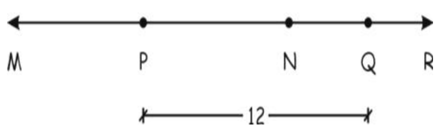
Rpta

PROBLEMAS PARA LA CASA

1. En una recta se toman los puntos consecutivos A, B y C; AC = 30, BC = 12.
Hallar AB

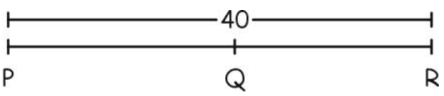
A) 16 **B)** 15 **C)** 14
D) 18 **E)** 20

2. Si P y Q son puntos medios de $\overline{MN}$ y $\overline{NR}$.
Hallar MR



A) 12 **B)** 20 **C)** 24
D) 26 **E)** 28

3. Si: PR + PQ = 64.
Hallar QR



A) 14 **B)** 15 **C)** 16
D) 18 **E)** 20

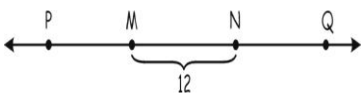
4. Hallar QR, si. PR = 18; QS = 22, PS = 30

A) 8 **B)** 9 **C)** 10
D) 11 **E)** 12

5. Si: 3PQ = 4QR = 5RS = 60.
Hallar PS

A) 41 **B)** 43 **C)** 47
D) 48 **E)** 60

6. Si: M y N son puntos medios de $\overline{PN}$ y $\overline{PQ}$
Hallar PQ



A) 24 **B)** 36 **C)** 48
D) 46 **E)** 50

7. Si: PQ = RS = 14; QR = ST = 12. Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{PQ}$ y ST.

A) 34 **B)** 36 **C)** 39
D) 38 **E)** 37

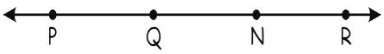
8. Si: N es punto medio de PR y PQ – QR = 48.
Hallar NQ

A) 15 **B)** 28 **C)** 29
D) 34 **E)** 17

9. Si M es punto medio de Ln y KL + Kn = 40.
Hallar KM

A) 10 **B)** 20 **C)** 30
D) 40 **E)** 50

10. Si N es punto medio de QR y además PQ + PR = 30.
Hallar PN



A) 10 **B)** 15 **C)** 20
D) 30 **E)** 40

NADA HAY TAN CONTAGIOSO COMO EL OPTIMISMO. VIVIR CON UN AMIGO OPTIMISTA ES ENCONTRAR LA CLAVE DE LA FELICIDAD. EL LLANTO DE LOS OTROS SUELE HACERNOS LLORAR; PERO LA RISA DE LOS OTROS, INVARIABLEMENTE, IRREMISIBLEMENTE, NOS HARÁ REÍR.

AMADO NERVO

¿SABÍAS QUÉ...

EN LA CARRERA PROFESIONAL

DE

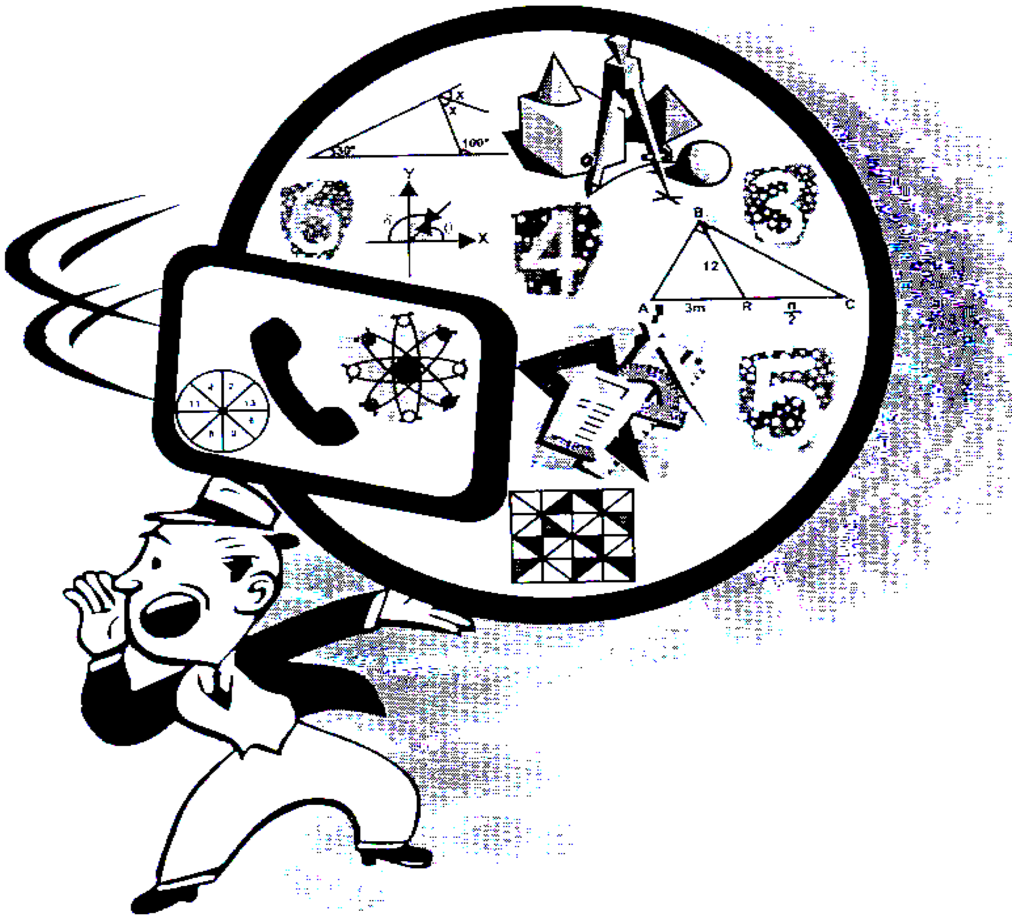
ADMINISTRACIÓN

El Licenciado en Administración, organiza, promueve y desarrolla empresas e instituciones que ofrecen bienes o servicios a los diferentes mercados, hace uso de métodos e instrumentos científicos y tecnológicos para optimizar el potencial humano, los recursos materiales, tecnológicos, económicos, y financieros de las organizaciones para mejorar la calidad, competitividad, eficacia y eficiencia. Gerencia, asesora y presta consultoría a organizaciones. Realiza investigaciones administrativas, formula y administra proyectos de inversión.

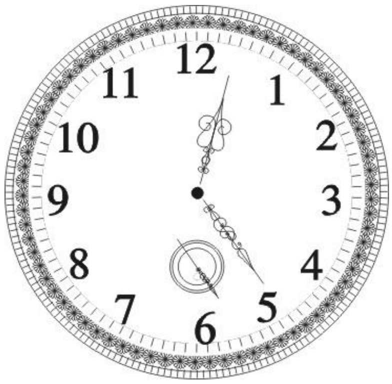
“

¡Entérate!

Cuenta la historia que Thales de Mileto, el gran matemático griego, en uno de sus viajes se dirigió a Egipto, donde quedó maravillado del esplendor y grandeza de las pirámides y lejos de medir la altura de una de ellas optó por un mejor camino, el cálculo, gracias a la sombra que proyectaba esta gigantesca construcción, la ayuda de un bastón que portaba y los conocimientos de geometría que tenía, pudo lograr su ansiado objetivo.



ÁNGULOS



Observa como en cada momento las manecillas del reloj forman un ángulo.

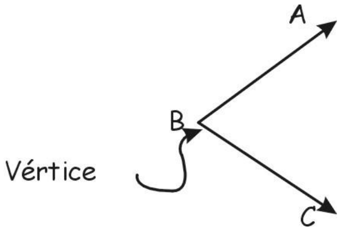
DEFINICIÓN
Ángulo es la unión de dos rayos que tienen un origen común.

ELEMENTOS
- Lados: Son los rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$
- Vértice: Es el origen común “B”

Notación:

En general los ángulos se designan con tres letras mayúsculas; la letra central corresponde al vértice.

Algunas veces, cuando no hay lugar a confusión un ángulo se nombra con la letra del vértice.



$\angle ABC$, $A\hat{B}C$
El símbolo $\angle$ se lee “ángulo”

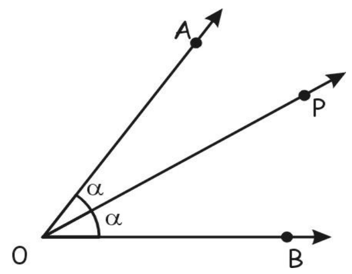
“

MEDIDA DE UN ÁNGULO

Los ángulos se miden en grados sexagesimales.
Para encontrar la medida de un ángulo se utiliza un instrumento llamado transportador. Cuando no se conoce la medida, se representa mediante una letra griega en la abertura.

BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

Es el rayo que partiendo del vértice, divide al ángulo en dos ángulos congruentes.



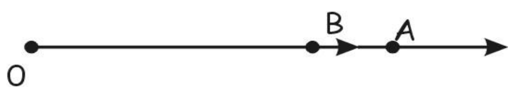
$\overrightarrow{OP}$ divide al ∢A0B en dos ángulos.

$\widehat{A0P}$ y $\widehat{P0B}$ que son congruentes por tener la misma medida “α” luego.
$\overrightarrow{OP}$ es bisectriz de ∢A0B

CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS SEGÚN SU MEDIDA

1.-Ángulo Nulo

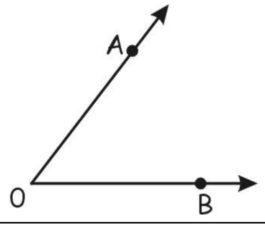
Cuando sus dos lados coinciden midiendo de esta manera 0º.



mA0B = 0º

2.-Ángulo Agudo

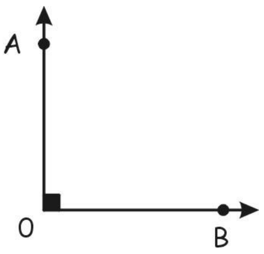
Es el ángulo cuya medida es menor que 90º y mayor que 0º.



0º < m∢A0B < 90º

3._Ángulo Recto

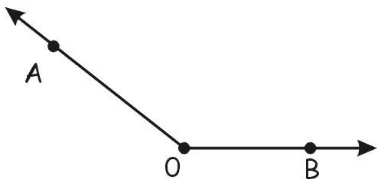
Es el ángulo cuya medida es igual a 90º.



m∢A0B = 90º

4.-Ángulo Obtuso

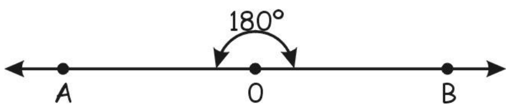
Es el ángulo cuya medida es menor que 180º pero mayor que 90º.



90 < m∢A0B < 180º

5.-Ángulo Llano

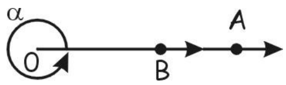
Es aquel cuya medida es 180º. (sus lados se encuentran extendidos en direcciones opuestas)



m∢A0B = 180º

6.-Ángulo de una Vuelta

Es el ángulo cuya medida es 360º

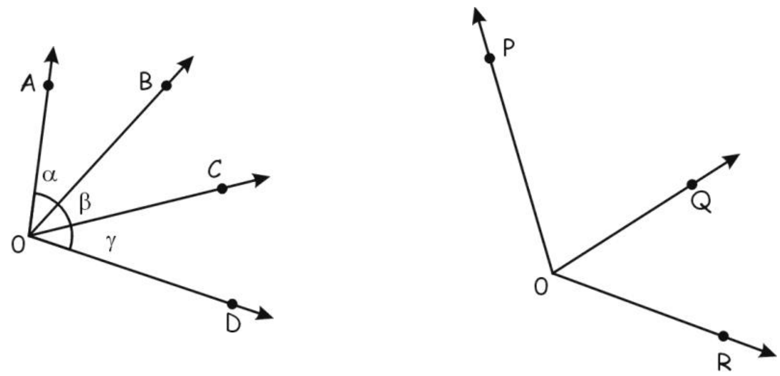


m∢A0B = 360º

CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS SEGÚN SU POSICIÓN

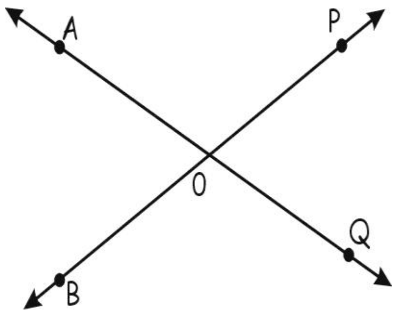
Ángulos Consecutivos

Son los que tienen lados en común y el mismo vértice



Ángulo Opuestos por el Vértice

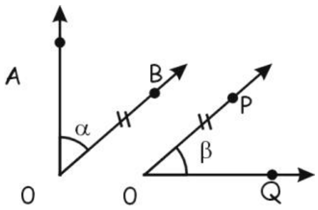
Son dos ángulos que tienen el mismo vértice y sus lados son opuestos (tienen la misma medida)



CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS SEGÚN LA COMPARACIÓN DE SUS MEDIDAS

Ángulos Complementarios

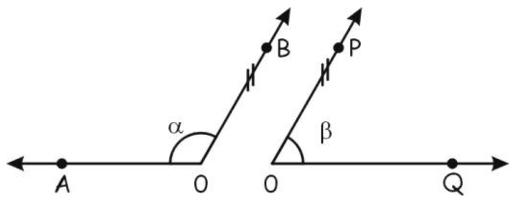
Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es 90º.



$\boxed{\alpha + \beta = 90^{\circ}}$

Ángulos Suplementarios

Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es 180º

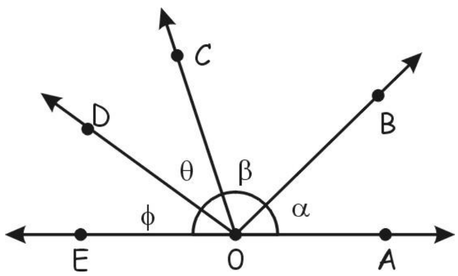


$\boxed{\alpha + \beta = 180^{\circ}}$

TEOREMAS FUNDAMENTALES

Teorema I

La suma de las medidas de los ángulos consecutivos formados alrededor de un mismo vértice y a un mismo lado de una recta es 180º

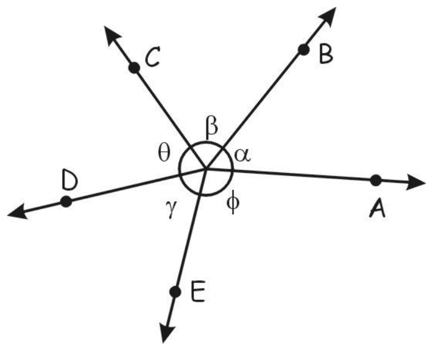


$\boxed{\alpha + \beta + \theta + \phi = 180^{\circ}}$

Teorema II

La suma de las medidas de los ángulos consecutivos formados alrededor de un punto en un plano es 360º.

“

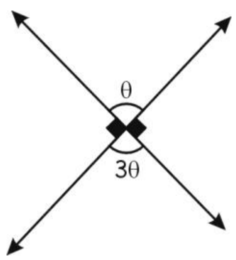


$\boxed{\alpha + \beta + \theta + \gamma + \phi = 360º}$

<u>PROBLEMAS PARA LA CLASE</u>

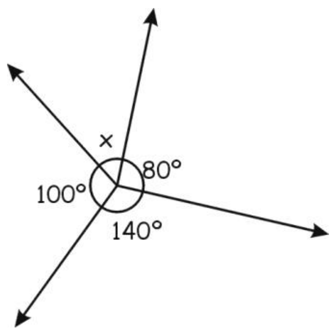
NIVEL I

1. En la figura, hallar “θ”



<u>Rpta</u>.

2. Hallar “x”

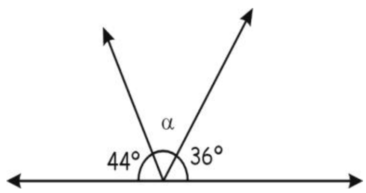


<u>Rpta</u>.

3. Se tiene los ángulos consecutivos $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ y $C\hat{O}D$, m∢A0C = 60º y m∢BOD = 40º, m∢$B\hat{O}D$ = 80º. Hallar m∢$B\hat{O}C$.

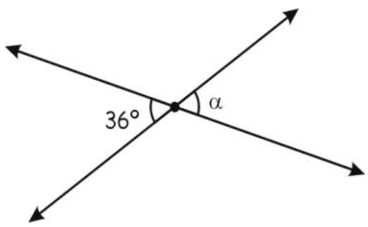
<u>Rpta</u>.

4. En la figura, hallar “α”



<u>Rpta</u>.

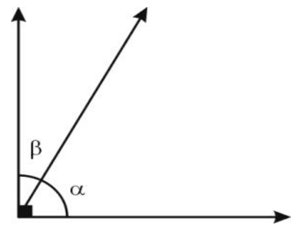
5. En la figura mostrada, hallar “α”



<u>Rpta</u>.

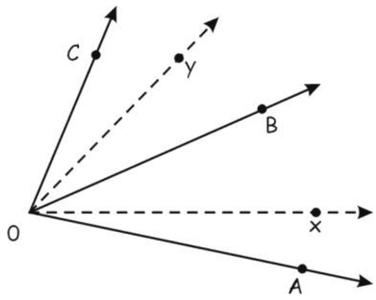
NIVEL II

6. En la figura mostrada:
$\alpha = 3x - 10º$
$\beta = 2x + 5º$
Hallar el complemento de “α”



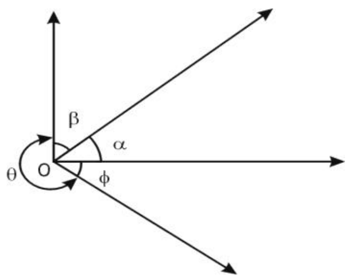
Rpta.

7. En la figura mostrada
$\overrightarrow{0x}$ es bisectriz del ángulo A0B
$\overrightarrow{0y}$ es bisectriz del ángulo B0C
m∢A0C = 72º. Hallar m∢x0y



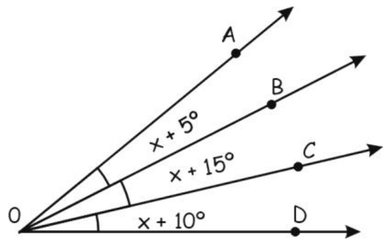
Rpta.

8. En la figura, hallar el valor de “θ”
$\alpha = x + 5º$
$\beta = x + 20º$
$\theta = 4x + 10º$
$\phi = 100º - x$



Rpta.

9. En la figura, m∢A0D = 90º.
Hallar el valor de “x”



Rpta.

NIVEL III

10. Hallar el suplemento del complemento de 20º
Rpta.

11. Hallar el complemento de un ángulo que mide el doble de 16º.
Rpta.

12. Hallar el suplemento de la mitad de un ángulo que mide 66º.
Rpta.

13. El suplemento de θ es igual a 4θ; hallar “θ”
Rpta.

14. El complemento de “α” más el suplemento de “α” es igual a 170º.
Hallar “α”
Rpta.

15. Si el suplemento de "x" es igual a "2x"
Hallar "x"
<u>Rpta</u>.

Sabias que :

↠ $1° <> 60'$

↠ $1' <> 60''$

↠ $1° <> 3600''$

Por ejemplo :

Convertir :

a) $\dfrac{45°}{2} = 22° + \dfrac{\overbrace{1°}}{2} = 22° + \dfrac{\cancel{60'}}{2}$

$\dfrac{45°}{2} = 22° + 30' \Rightarrow \dfrac{45°}{2} = 22°30'$

b) $\dfrac{17°}{4} = 4° + \dfrac{\overbrace{1°}^{60'}}{4} = 4° + \dfrac{60'}{4}$

$\dfrac{17°}{4} = 4° + 15' = 4°15'$

$= \dfrac{127°}{25} = 5°4'48''$ 2(60') 12'

16. Calcular : $\frac{27°}{2}$

17. Calcular $\frac{35°}{2}$

18. Calcular $\frac{125°}{4}$

19. Calcular $\frac{127°}{8}$

20. Calcular $\frac{85°}{4}$

21. Indicar verdadero ó falso según corresponda:

a. El ángulo tiene dos lados ( )
b. El ángulo tiene dos bisectrices ( )
c. El ángulo esta formado por dos semirrectas. ( )
d. Todos los ángulos están medidos en grados sexagesimales ( )
e. El ángulo agudo es mayor que 90º ( )

22. Indicar verdadero ó falso según el ángulo.

a. La unidad del ángulo es el grado sexagesimal (1º) ( )
b. El minuto sexagesimal es (1’) ( )
c. El segundo sexagesimal es (1’’) ( )
d. Un grado (1º) ; equivale a 60 minutos sexagesimales (60’’) ( )

e. Un minuto (1’) equivale a 60 segundos sexagesimales (60’’) ( )

23. Indicar verdadero o falso, según corresponda:

a. El ángulo agudo es menor que 90º; pero mayor que 0º ( )
b. El ángulo obtuso es mayor que 90º; ( ) pero menor que 180º
c. El ángulo recto mide 180º ( )
d. El ángulo llano mide 90º ( )
e. El ángulo de revolución ó de una vuelta mide 360º ( )

24. Relacionar las siguientes alternativas:

a) Ángulo Agudo ( ) 180º
b) Ángulo Obtuso ( ) 27º
c) Ángulo Recto ( ) 360º
d) Ángulo de una vuelta ( ) 90º
e) Ángulo Llano ( ) 150º

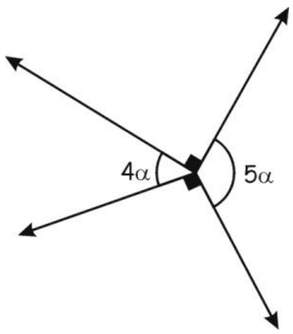
25. Calcular : CCC(23º)

26. Calcular : SSSSS(142º)

PROBLEMAS PARA LA CASA

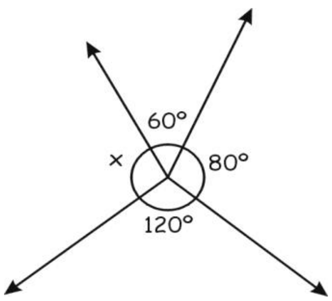
NIVEL I

1. En la figura, hallar “α”



A) 12º **B)** 20º **C)** 10º
D) 15º **E)** 16º

2. Hallar “x”

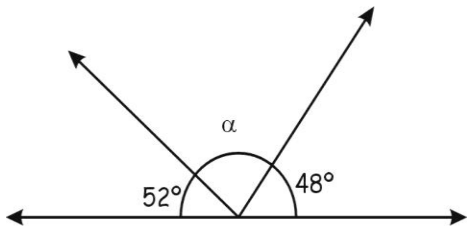


A) 90º **B)** 80º **C)** 100º
D) 110º **E)** 120º

3. Se tienen los ángulos consecutivos $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ y $C\hat{O}D$ .m∢A0C = 50º, m∢B0D = 30º. y m∢A0D = 70º
Hallar m∠B0C

A) 5º **B)** 10º **C)** 15º
D) 20º **E)** 25º

4. En la figura, hallar “α”

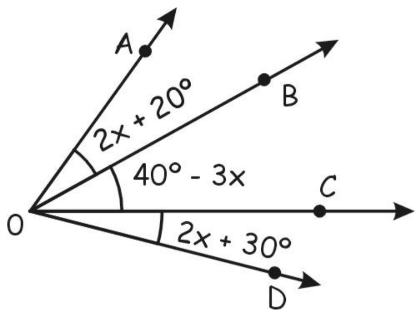


A) 70º **B)** 80º **C)** 90º
D) 100º **E)** 60º

“

5. En la figura, m∠A0D = 100º.

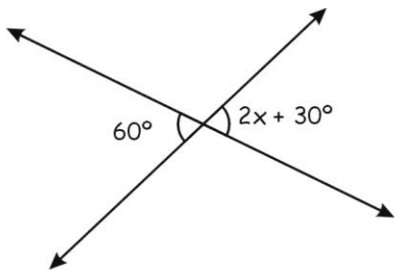
Hallar el valor de “x”



A) 15º **B)** 12º **C)** 10º
D) 15º **E)** 16º

NIVEL II

6. En la figura que se muestra, hallar “x”



A) 10º **B)** 15º **C)** 20º
D) 25º **E)** 30º

7. En la figura mostrada

$\alpha = 4x - 15º$; $\beta = x - 5$

A) 52º **B)** 42º **C)** 32º
D) 22º **E)** 12º

8. Hallar el complemento del complemento del complemento de 50º

A) 40º **B)** 50º **C)** 60º
D) 80º **E)** 30º

9. El suplemento de un ángulo es 5θ y el complemento del mismo ángulo es θ.
¿Cuál es ese ángulo?

A) 20º **B)** 22º30'
C) 23º **D)** 23º30'
E) 24º

10. Hallar el suplemento del complemento de 40º

A) 120º **B)** 130º **C)** 140º
D) 110º **E)** 90º

NIVEL III

11. Calcular “α” en grados y minutos.

$\alpha^{o} = \dfrac{37^{\circ}}{4}$

12. Calcular “α” en grados y minutos.

$\alpha^{o} = \dfrac{105^{\circ}}{8}$

“

Historia de los símbolos matemáticos

Símbolos	Año	Autor
$\frac{3}{4}$	1228	Fibonacci
$3 \cdot 4$	1464	Regiomontano
$3 + 4$ $4 - 3$	1489	Widmann
$2 + 3 = 5$	1557	Recorde
30°	1571	Reinhold
decimales	1585	Stevin
2,17	1617	Naiper
Log 27	1624	Naiper
$\sqrt[3]{5}$	1629	Girard
$3 < 4$ $4 > 3$	1631	Harriot
2^5	1637	Descartes
$\int dx$	1675	Leibniz
F(x)	1734	Euler
π	1736	Euler
e	1739	Euler
Sen, cos	1753	Euler
Σ, Δ	1755	Euler
i	1777	Euler
Ángulos α, β	1816	Crelle

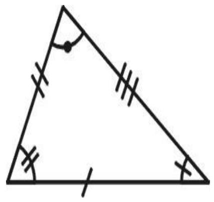
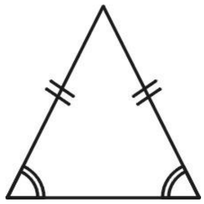
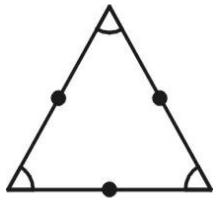
TRIÁNGULOS I – PROPIEDADES BASICAS

CONCEPTO

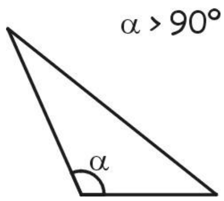
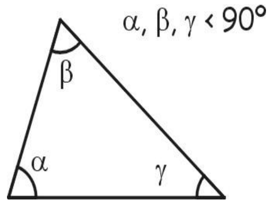
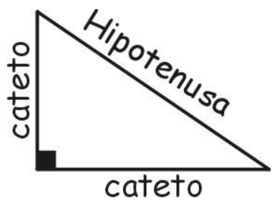
Es un polígono que tiene tres lados

CLASIFICACIÓN

Según la Medida de sus Lados

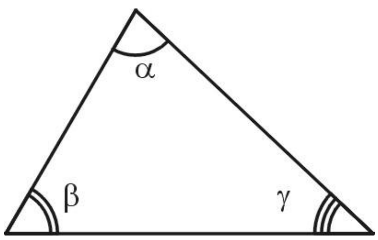
		
Escaleno	Isósceles	Equilátero

Según la Medida de sus Ángulos

		
Obtusángulo	Acutángulo	Rectángulo

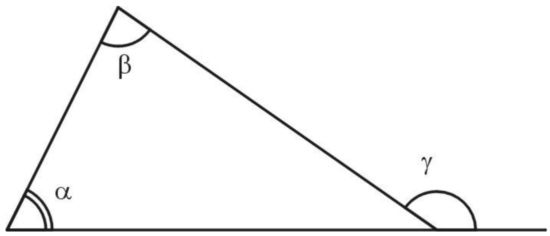
PROPIEDADES BÁSICAS

1. La suma de los ángulos interiores en un triángulo es 180º.



$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180º}$

2. Un ángulo exterior cualquiera es siempre igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a él.

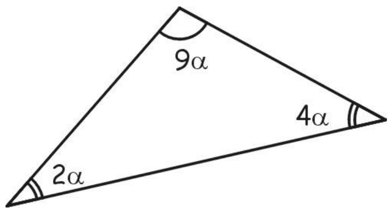


$$\boxed{\gamma = \alpha + \beta}$$

<u>PROBLEMAS PARA LA CLASE</u>

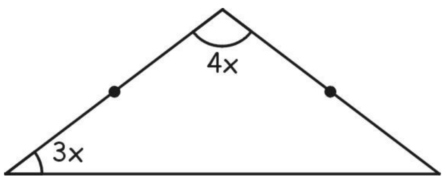
NIVEL I

1. Hallar α en:



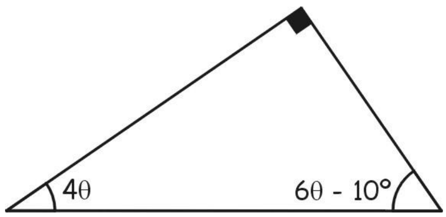
<u>Rpta</u>.

2. Hallar “x”:



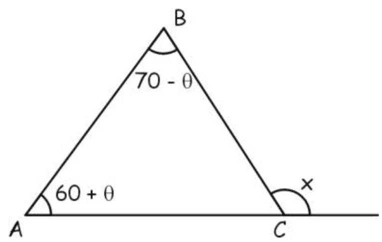
<u>Rpta</u>.

3. Hallar θ:



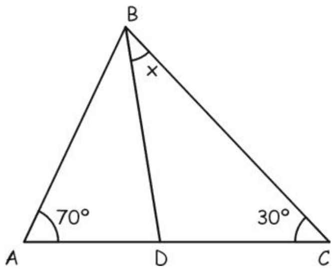
<u>Rpta</u>.

4. Calcular “x”



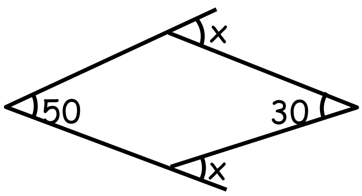
<u>Rpta</u>.

5. Hallar “x” su BD es bisectriz



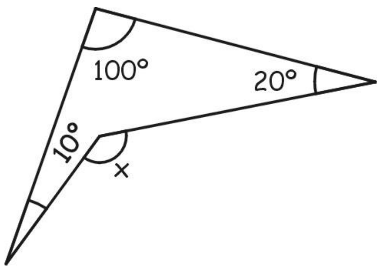
NIVEL II

6. Del gráfico calcular "x"



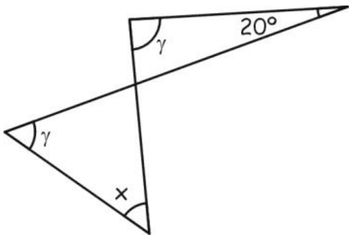
Rpta.

7. Hallar "x"



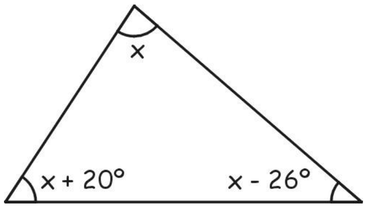
Rpta.

8. Hallar "x" en



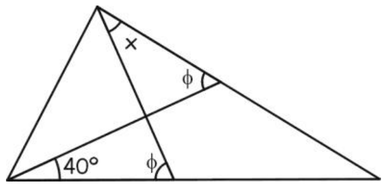
Rpta.

9. En la figura, hallar "x"



Rpta.

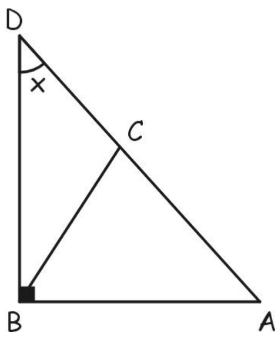
10. Determinar "x"



Rpta.

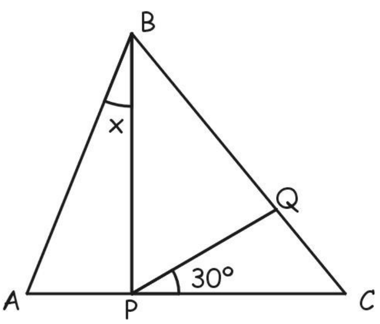
NIVEL III

11. Calcular "x", si AB = BC = CD



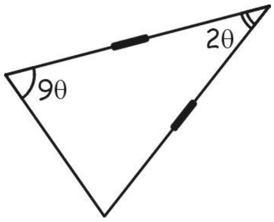
Rpta.

12. Determinar "x". Si AB = BC, BP = BQ



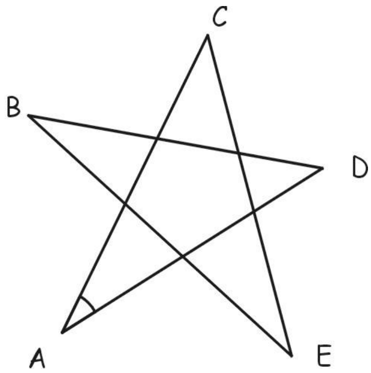
Rpta.

13. Hallar “θ”



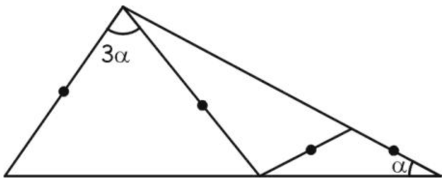
Rpta.

14. Hallar la suma de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$ y $\hat{E}$.



Rpta.

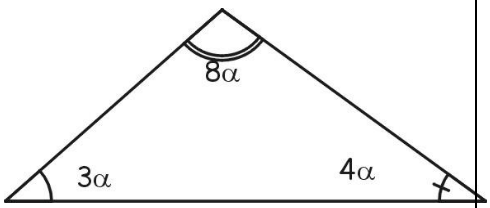
15. Hallar “α” en:



Rpta.

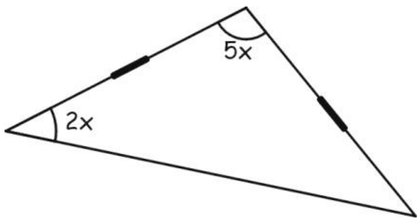
PROBLEMAS PARA LA CASA

1. Hallar “α” en:



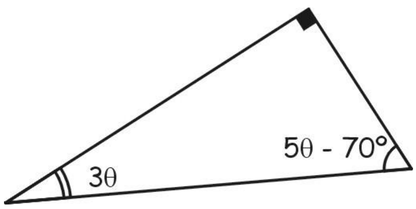
A) 12º **B)** 13º **C)** 14º
D) 15º **E)** 16º

2. Hallar “x” en:



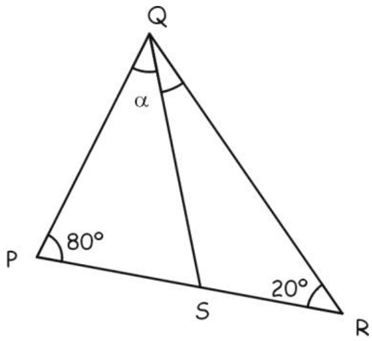
A) 10º **B)** 20º **C)** 30º
D) 40º **E)** 50º

3. Hallar θ en:



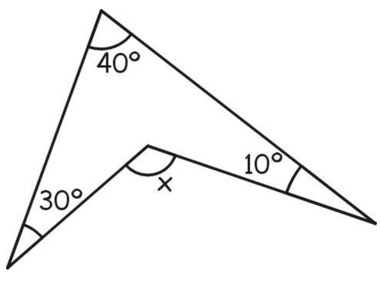
A) 10º **B)** 30º **C)** 20º
D) 40º **E)** 5º

4. Hallar “α” si: $\overline{QS}$ es una bisectriz



A) 30º **B)** 40º **C)** 38º
D) 25º **E)** 20º

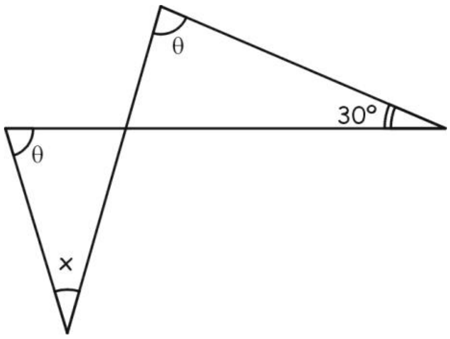
5. Hallar “x” en:



A) 70º **B)** 80º **C)** 90º
D) 60º **E)** 100º

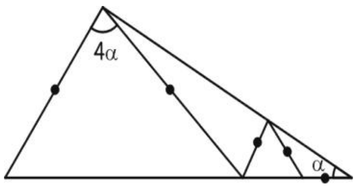
“

6. Hallar “x” en:



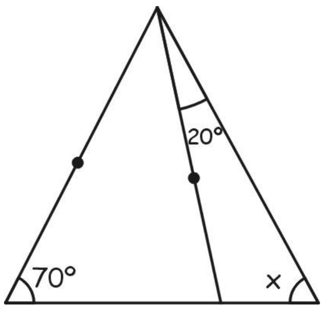
A) 10º **B)** 20º **C)** 30º
D) 40º **E)** 50º

7. Hallar “x” en:



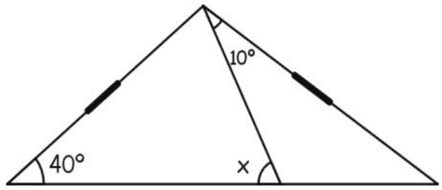
A) 15º **B)** 12º **C)** 11º
D) 10º **E)** 14º

8. En la figura, hallar “x”



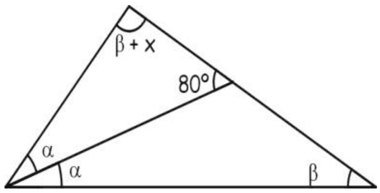
A) 30º **B)** 40º **C)** 50º
D) 60º **E)** 70º

9. En la figura, hallar “x”



A) 15º **B)** 50º **C)** 30º
D) 60º **E)** 40º

10. Hallar el valor de “x”



A) 10º **B)** 30º **C)** 40º
D) 20º **E)** 60º

“

Bernhard Riemann

Bernhard Riemann (1826 - 1866), matemático alemán que elaboró un sistema de Geometría que contribuyó al desarrollo de la Física teórica moderna.

Nació en Breselenz y estudió en las universidades de Gotinga y Berlín. Su tesis doctoral Foundations for a

General Theory of Functions of a Complex Variable (Fundamentos para una teoría general de funciones de variables complejas), presentaba en 1851, ontituyó una extraordinaria aportación a la teoría de funciones. Desde 1857 hasta su muerte fue profesor de matemáticas en la Universidda de Gotinga.

La importancia de la Geometría de Riemann radica en el uso y extensión de la Geometría Euclídea y de la Geometría de superficies, que conduce a muchas Geometrías diferenciales generalizadas. El efecto más importante de estas investigaciones fue que logró una aplicación geométrica para algunas abstracciones del análisis de tensores, que conducía a algunos de los conceptos que utilizó más tarde Albert Einstein al desarrollar su teoría de la relatividad. La Geometría de Riemann también es necesaria para tratar la electricidad y el magnetismo en la estructura de la relatividad general.

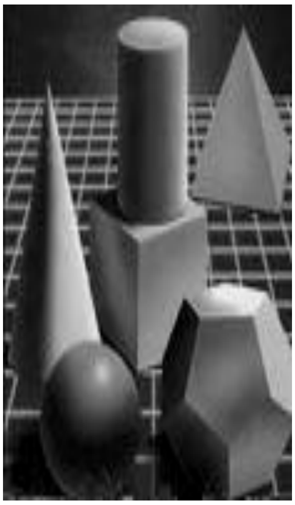
¿SABÍAS QUÉ…

EN LA CARRERA PROFESIONAL DE

INGENIERÍA DE SISTEMAS E INFORMÁTICA

El ingeniero de sistemas tiene como función principal elaborar soluciones sobre la base de elementos tecnológicos (hardware, software y de comunicación); estas soluciones pueden corresponder a construcción, adaptación y/o implantación de dichos elementos integrados para satisfacer las necesidades de las empresas, en todos sus niveles de gestión (operativa, táctica y estratégica).

ÍNDICE



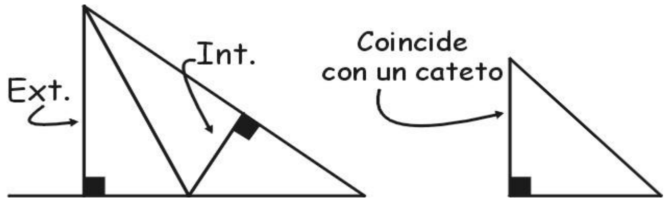
II BIMESTRE

CAPÍTULO

TRIANGULO II: LINEAS Y PUNTOS NOTABLES

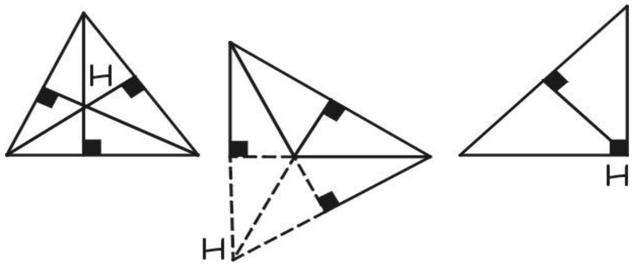
ALTURA

Segmento que sale de un vértice y corta en forma perpendicular al lado opuesto o a su prolongación.



Ortocentro (H)

Es el punto donde se intersectan las tres alturas de un triángulo.
H: Ortocentro.

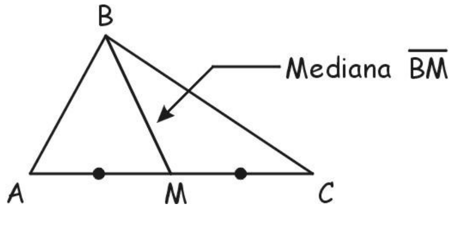


PARA RECORDAR.

TODO TRIÁNGULO TIENE UN SOLO ORTOCENTRO.
ES UN PUNTO INTERIOR SI EL TRIÁNGULO ES ACUTÁNGULO.
ES UN PUNTO EXTERIOR SI EL TRIÁNGULO ES OBTUSÁNGULO.
SI ES RECTÁNGULO ESTÁ EN EL VÉRTICE DEL ÁNGULO RECTO.

MEDIANA

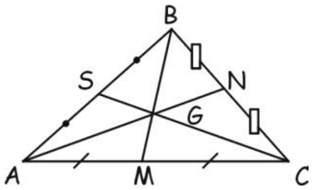
Segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.



Baricentro (G)

Es el punto donde se intersectan las tres medianas de un triángulo.
G: Baricentro

“



TEOREMA

$\overbrace{BG = 2GM}$

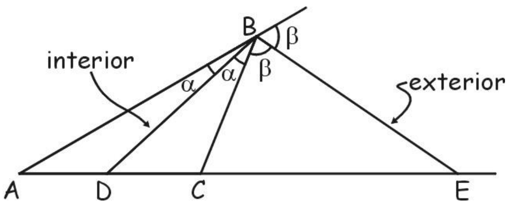
$AG = 2GN$

$CG = 2GS$

PARA RECORDAR.
TODO TRIÁNGULO TIENE UN SOLO BARICENTRO.
DIVIDE A CADA MEDIANA EN RELACIÓN COMO 1 ES A 2.
EL BARICENTRO ES SIEMPRE UN PUNTO INTERIOR.
ES LLAMADO TAMBIÉN GRAVICENTRO O CENTRO DE GRAVEDAD DE LA REGIÓN TRIANGULAR.

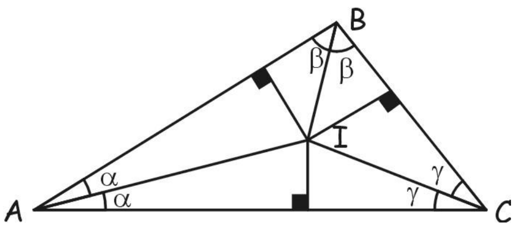
BISECTRIZ

Segmento que divide a un ángulo interior o exterior en dos ángulos de igual medida.



Incentro (I)

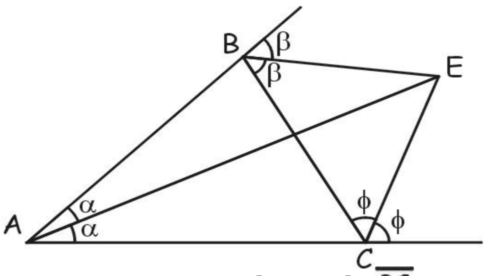
Es el punto donde se intersectan las tres bisectrices interiores de un triángulo, es el centro de la circunferencia inscrita



PARA RECORDAR.
TODO TRIÁNGULO TIENE UN SOLO INCENTRO.
EL INCENTRO EQUIDISTA E LOS LADOS DEL TRIÁNGULO.
EL INCENTRO ES SIEMPRE UN PUNTO INTERIOR DEL TRIÁNGULO.

Excentro (E)

Es el punto donde se intersectan dos bisectrices exteriores con una bisectriz interior en un triángulo, es el centro de la circunferencia exinscrita

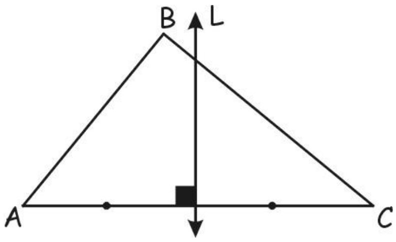


E: Encentro relativo de $\overline{BC}$

> ***PARA RECORDAR.***
> *TODO TRIÁNGULO TIENE TRES EXCENTROS.*
> *LOS EXCENTROS SON SIEMPRE PUNTOS EXTERIORES AL TRIÁNGULO.*

MEDIATRIZ

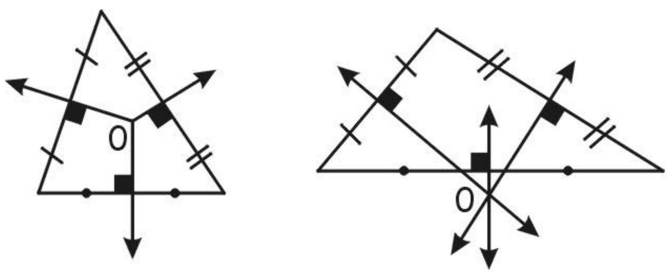
Es una recta que pasa por el punto medio de un lado cortándolo en forma perpendicular.



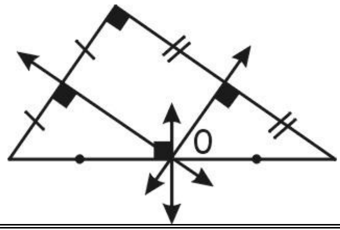
$\overleftrightarrow{L}$: Mediatriz de $\overline{AC}$

Circuncentro (O)

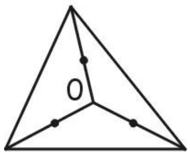
Es el punto donde se corta las tres mediatices de un triángulo.
C: Circuncentro, es el centro de la circunferencia circunscrita

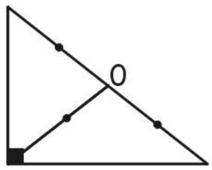


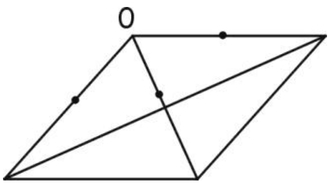
“



> ***PARA RECORDAR.***
> *TODO TRIÁNGULO TIENE UN SOLO CIRCUNCENTRO.*
> *EL CIRCUNCENTRO EQUIDISTA DE LOS VÉRTICES DEL TRIÁNGULO.*
> *ES UN PUNTO INTERIOR SI EL TRIÁNGULO ES ACUTÁNGULO.*
> *ES UN PUNTO EXTERIOR SI EL TRIÁNGULO ES OBTUSÁNGULO.*
> *SI ES RECTÁNGULO ESTÁ EN EL PUNTO MEDIO DE LA HIPOTENUSA.*

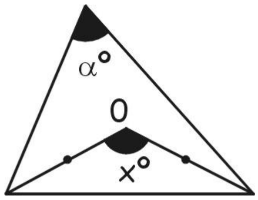






<u>Propiedad</u>:

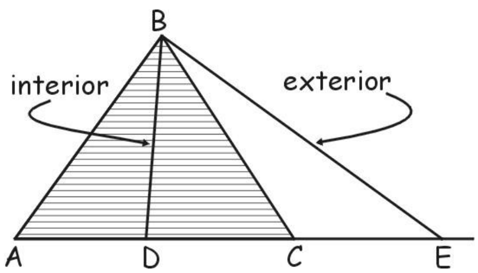
Si: “0” es circuncentro



$\Rightarrow \quad \boxed{x = 2\alpha}$

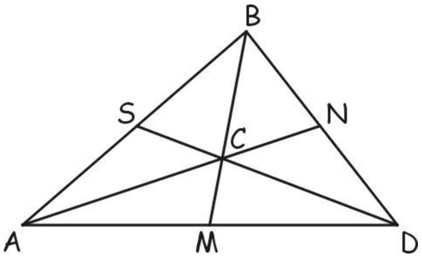
CEVIANA

Segmento que une un vértice con un punto cualquiera del lado opuesto o de su prolongación.



Cevacentro (C)

Es el punto donde se intersectan tres cevianas de un triángulo.



PARA RECORDAR:

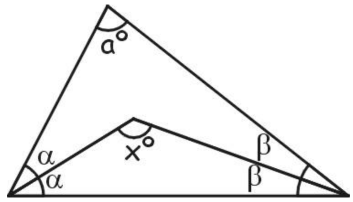
TODO TRIÁNGULO TIENE INFINITOS CEVACENTROS.

OBSERVACIONES:

- *PARA UBICAR UN PUNTO NOTABLE SÓLO ES NECESARIO TRAZAR DOS LÍNEAS NOTABLES DE LA MISMA ESPECIE.*
- *EN TODOS LOS TRIÁNGULOS ISÓSCELES SI SE TRAZA UNA DE LAS CUATRO PRIMERAS LÍNEAS NOTABLES HACIA LA BASE; DICHA LÍNEA CUMPLE LAS MISMAS FUNCIONES QUE LAS OTRAS.*
- *EN TODO TRIÁNGULO EQUILÁTERO EL ORTOCENTRO, BARICENTRO, INCENTRO Y CIRCUNCENTRO COINCIDEN.*
- *EN TODO TRIÁNGULO ISÓSCELES, EL ORTOCENTRO, BARICENTRO, INCENTRO Y EL EXCENTRO RELATIVO A LA BASE, SE ENCUENTRAN ALINEADOS EN LA MEDIATRIZ DE LA BASE.*

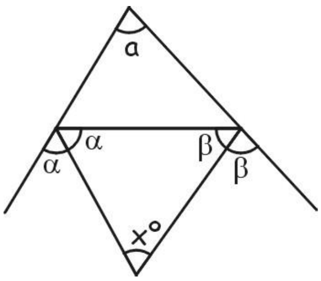
PROPIEDADES CON LÍNEAS NOTABLES

1. Ángulo formado por dos bisectrices interiores.



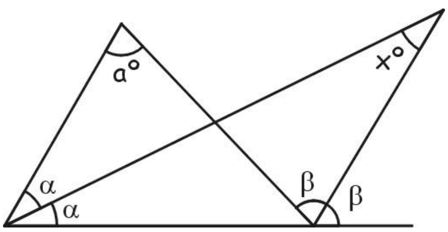
$$x = 90 + \frac{a}{2}$$

2. Ángulo formado por dos bisectrices exteriores.



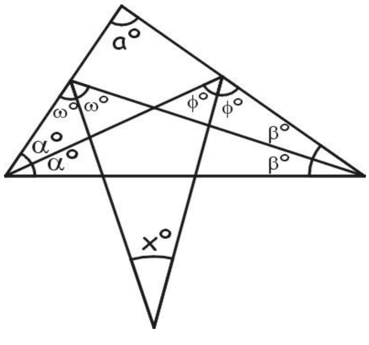
$$x = 90 - \frac{a}{2}$$

3. Ángulo formado por una bisectriz interior y una bisectriz exterior.



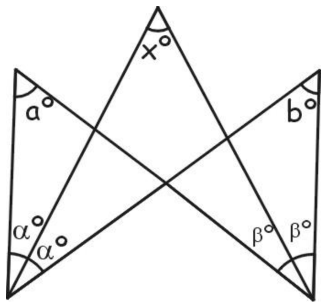
$$x = \frac{a}{2}$$

4.



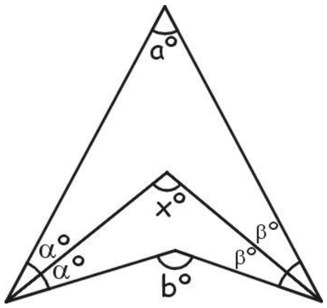
$$x = 45 - \frac{a}{2}$$

5.



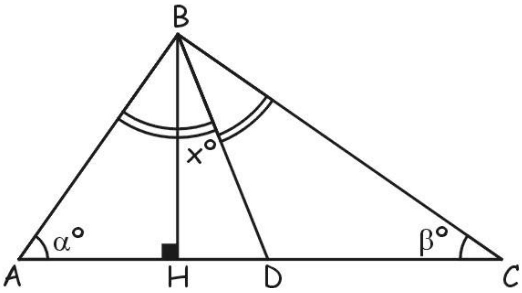
$$\boxed{x = \frac{a+b}{2}}$$

6.



$$\boxed{x = \frac{a+b}{2}}$$

7.

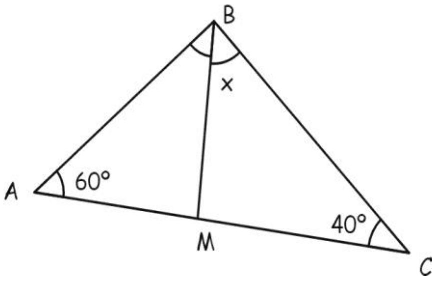


$$\boxed{x = \frac{\alpha-\beta}{2}}$$

PROBLEMAS PARA LA CLASE

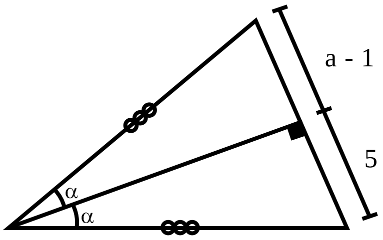
NIVEL I

1. Hallar “x” si BM es bisectriz



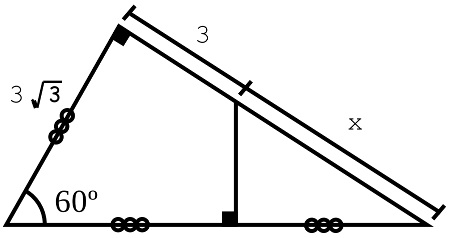
Rpta.

2. Hallar “a”



Rpta.

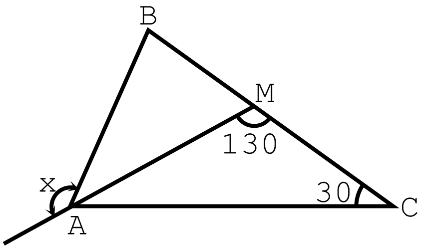
3. Hallar “x”



.

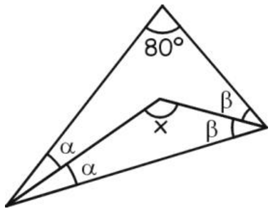
Rpta.

4. Hallar “x” si $\overline{AM}$ es bisectriz interior del Δ ABC



Rpta.

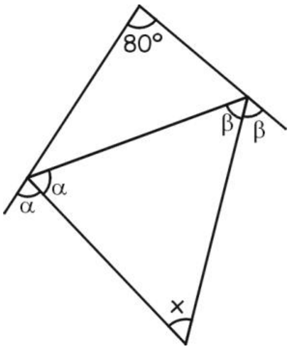
5. Hallar “x”:



Rpta.

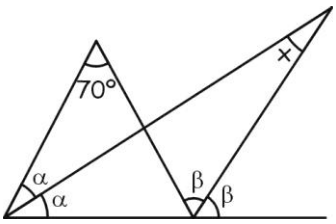
NIVEL II

6. Hallar el valor de “x” en



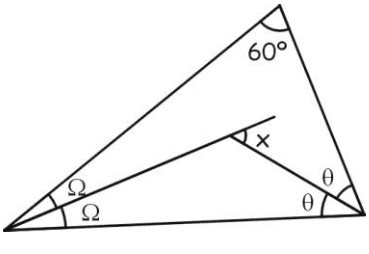
Rpta.

7. Hallar el valor de “x” en



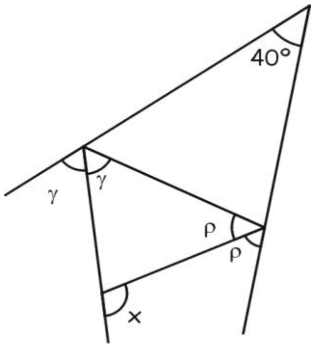
Rpta.

8. Hallar el valor de “x”



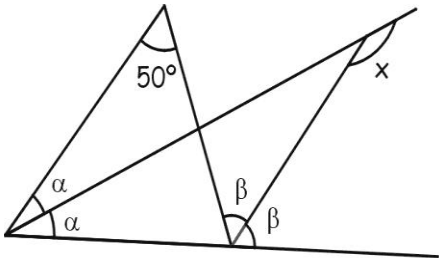
Rpta.

9. Hallar el valor de “x” en



Rpta.

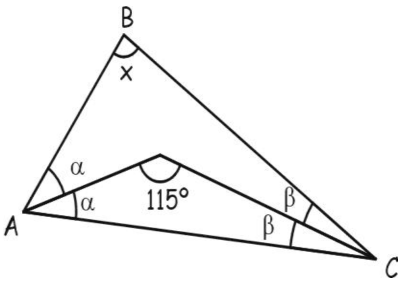
10. Hallar el valor de “x” en



Rpta.

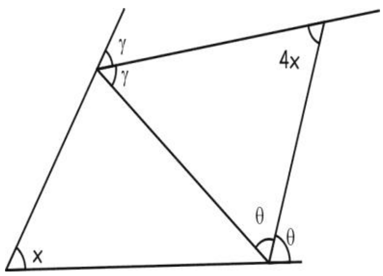
NIVEL III

11. Hallar el valor de “x”

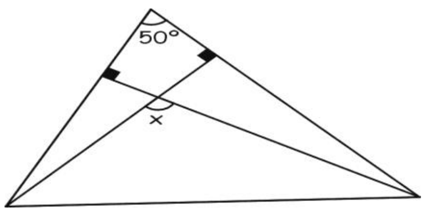


Rpta.

12. Hallar el valor de “x”



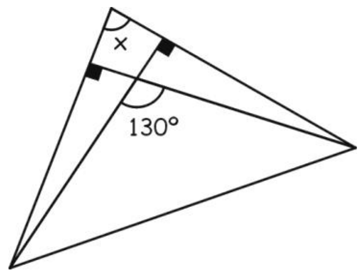
Rpta.



Rpta

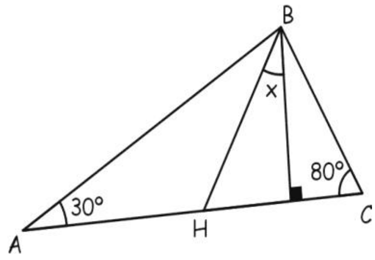
13. Hallar de “x” en

14. Hallar “x”



Rpta.

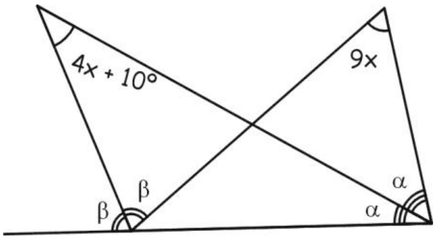
15. Hallar “x”, si BH es bisectriz



Rpta.

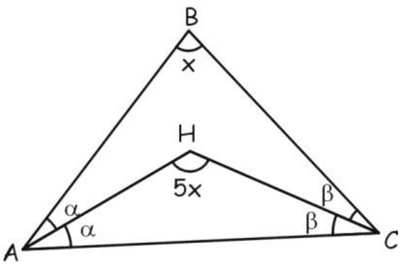
PROBLEMAS PARA LA CASA

1. Hallar “x”



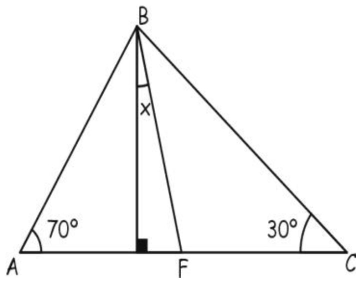
A) 10º **B)** 20º **C)** 30º
D) 40º **E)** 50º

2. Hallar “x” en



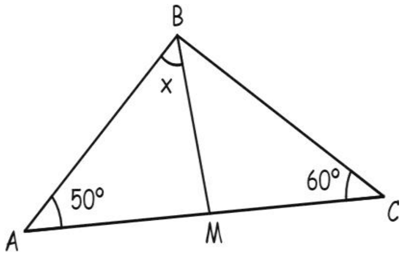
A) 40º **B)** 30º **C)** 20º
D) 10º **E)** 15º

3. Hallar “x”, si BF es bisectriz



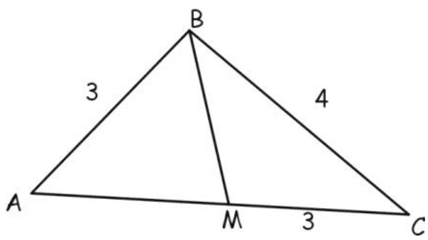
A) 10º **B)** 15º **C)** 17º
D) 20º **E)** 30º

4. Hallar “x” si BM es bisectriz



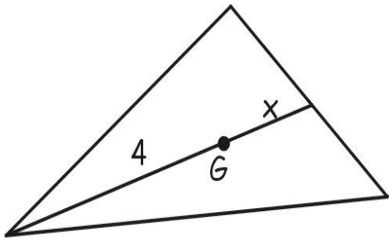
A) 30º **B)** 35º **C)** 36º
D) 40º **E)** 20º

5. Hallar $\overline{AM}$ si BM es mediana



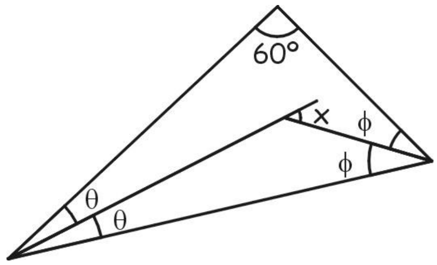
A) 1 **B)** 2 **C)** 3
D) 4 **E)** 5

6. Hallar el valor de “x” si G es el baricentro



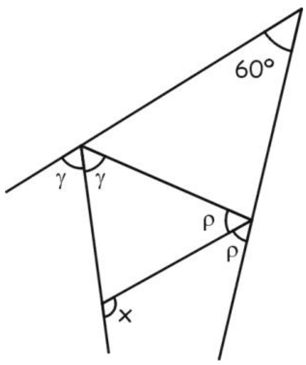
A) 1 **B)** 2 **C)** 3
D) 4 **E)** 5

7. Hallar “x” en la siguiente figura



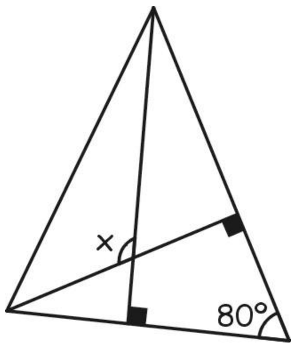
A) 30º **B)** 40º **C)** 60º
D) 70º **E)** 45º

8. Hallar el valor de “x” en



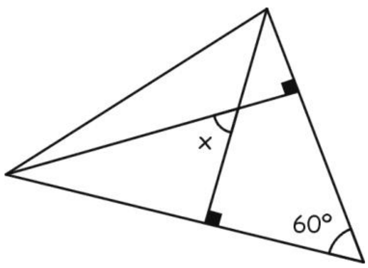
A) 60º **B)** 90º **C)** 120º
D) 140º **E)** N.A.

9. Hallar “x”



A) 80º **B)** 90º **C)** 100º
D) 110º **E)** 120º

10. Hallar “x”



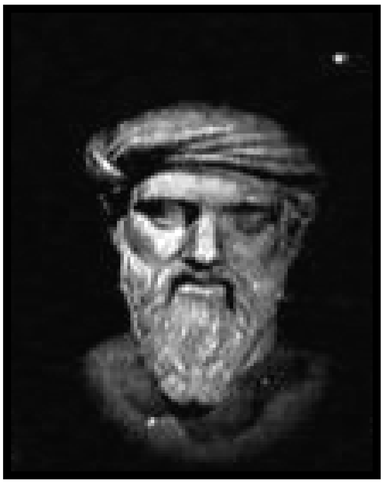
A) 30º **B)** 60º **C)** 90º
D) 70º **E)** 120º

“

PITÁGORAS

mucho más que un teorema

Sin duda Pitágoras es el matemático más conocido del gran público. Todo el mundo recuerda su famoso teorema. Pero las Matemáticas le deben a Pitágoras y a los pitagóricos mucho más. Ellos son los que pusieron las primeras piedras científicas no solo de la Geometría sino también de la Aritmética, de la Astronomía y de la Música.



SABÍAS QUÉ...

LA CARRERA PROFESIONAL DE ODONTOLOGÍA

El odontólogo trata las afecciones y enfermedades buco–dentales y conexas. Desarrolla acciones de carácter integral, de diagnóstico, prevención, promoción, tratamiento, recuperación, rehabilitación y administración de salud del sistema estomatognático, tanto a nivel individual como de la comunidad.

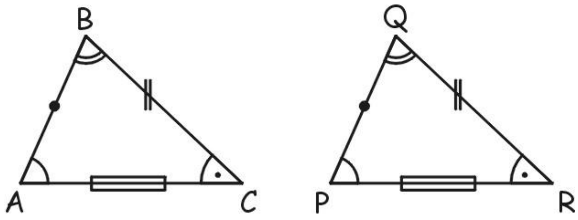
Ámbito de Trabajo:

Sector salud, servicios de sanidad, hospitales militares – policiales, clínicas, policlínicos, servicios odontológicos, centros educativos, seguros, empresas industriales, consultorios particulares e instituciones odontológicas.

CONGRUENCIA DE TRIANGULOS

DEFINICIÓN

Dos triángulos son congruentes, si tienen sus tres lados congruentes y sus tres ángulos congruentes respectivamente.

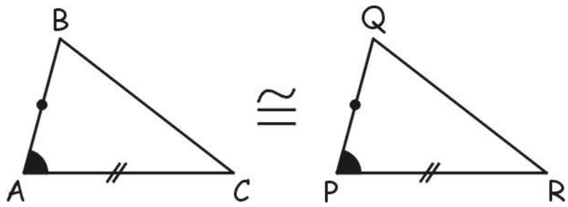


$\Rightarrow \quad \Delta ABC = \Delta PQR$

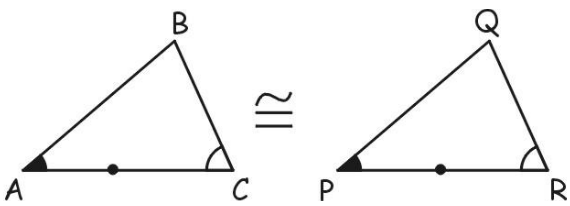
> ***OBSERVACIÓN:***
> *EN UN PROBLEMA DADO SE PODRÁ AFIRMAR QUE DOS TRIÁNGULOS SON CONGRUENTES SI TIENEN COMO MÍNIMO TRES ELEMENTOS IGUALES, DE LOS CUALES UNO DE ELLOS DEBE SER UN LADO.*

CASOS DE CONGRUENCIA EN TRIÁNGULOS

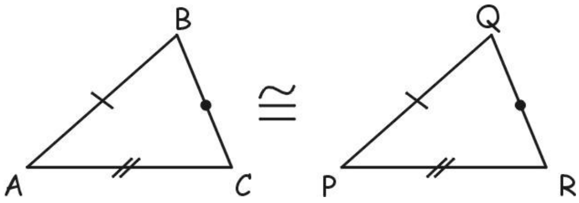
1. **Caso (L.A.L.)**



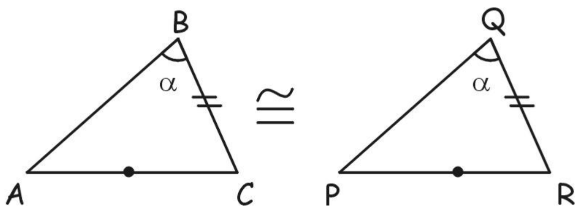
2. **Caso (A.L.A.)**



3. CASO (L.L.L.)



4. Caso (L.L.A.)

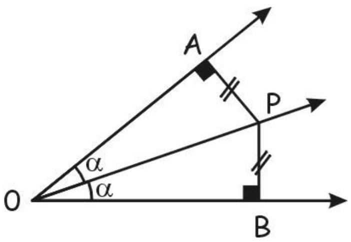


α : Opuesto al mayor lado

PROPIEDADES EN CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

1. De la Bisectriz

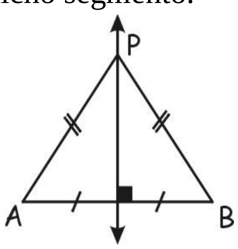
Todo punto situado en la bisectriz siempre equidista de los lados del ángulo.



$$\boxed{\begin{array}{c} PA = PB \\ OA = OB \end{array}}$$

2. De la Mediatriz

Todo punto situado en la mediatriz e un segmento, siempre equidista de los extremos de dicho segmento.



$$\boxed{PA = PB}$$

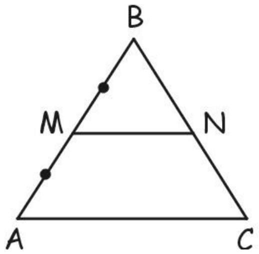
3. De la Base Media de un Triángulo

El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo, es paralelo al tercer lado y mide la mitad de lo que mide el tercer lado.

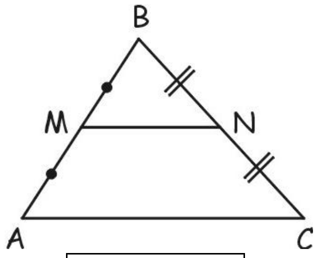
“

Si: $\overline{MN} // \overline{AC}$

Si: M y N son puntos medios

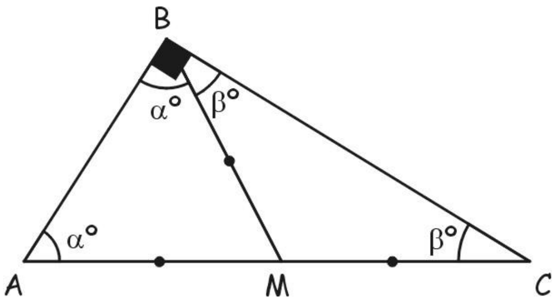


$\boxed{BN = NC}$



$$\boxed{MN = \frac{AC}{2}}$$

4. **De la Mediana Relativa a la Hipotenusa**
   La mediana relativa a la hipotenusa siempre mide la mitad de lo que mide la hipotenusa.

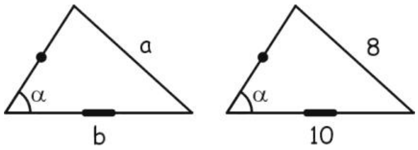


$$\boxed{BM = \frac{AC}{2}}$$

PROBLEMAS PARA LA CLASE

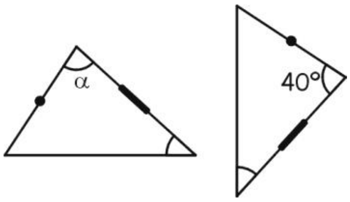
NIVEL I

1. Hallar “a + b” en



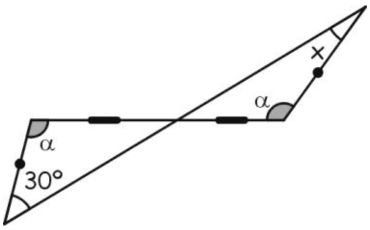
Rpta.

2. Hallar el valor del ángulo”α” en



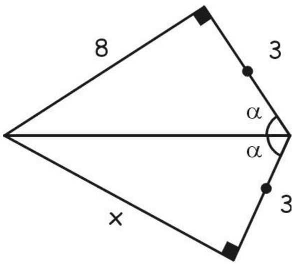
Rpta.

3. Hallar “x” en



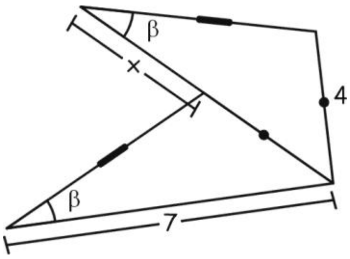
Rpta.

4. Hallar el valor de “x”



Rpta.

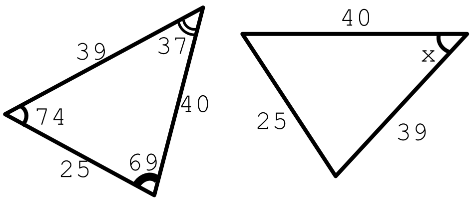
5. Hallar el valor de “x” en



Rpta.

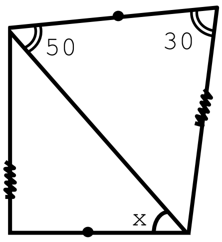
NIVEL II

6. Hallar el valor de “x” en



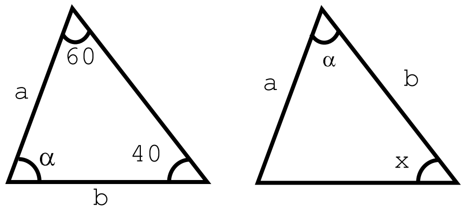
Rpta.

7. Hallar el valor del ángulo “x”



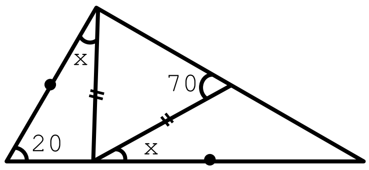
Rpta.

8. Calcular “x”



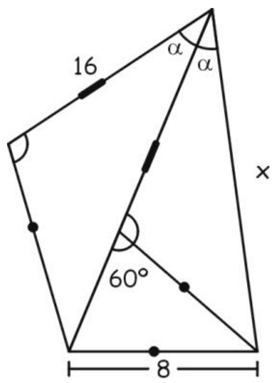
Rpta.

9. Hallar el valor de “x” en



Rpta.

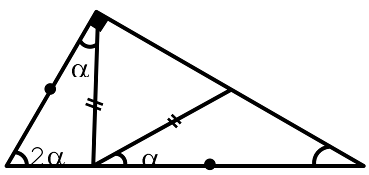
10. Hallar el valor de “x” en



Rpta.

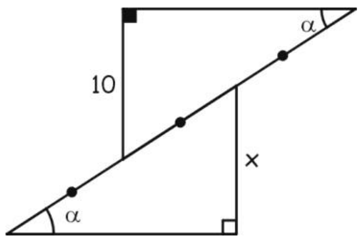
NIVEL III

11. Hallar el valor de “α ” en:



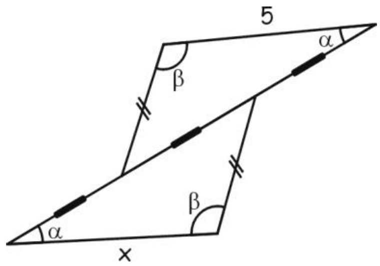
Rpta.

12. Hallar el valor de “x” en



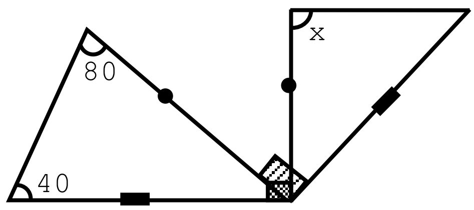
Rpta.

13. Hallar el valor de “x” en



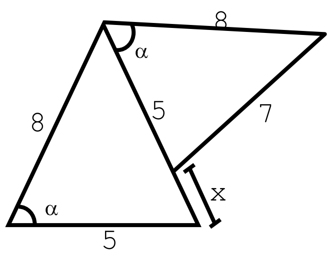
Rpta.

14. Hallar el valor de “x” en



Rpta.

15. Hallar el valor de “x”

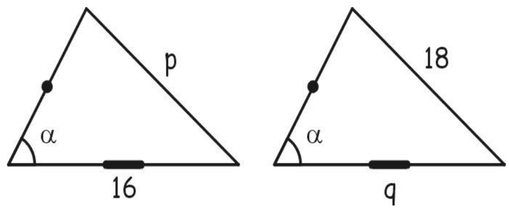


Rpta.

“

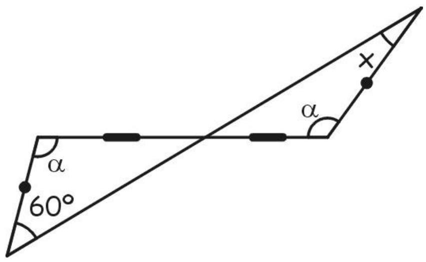
PROBLEMAS PARA LA CASA

1. Hallar “P + Q” en:



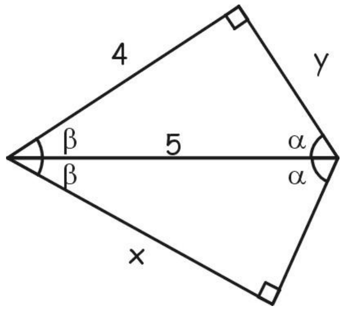
A) 24 **B)** 14 **C)** 34
D) 44 **E)** 54

2. Hallar “x” en:



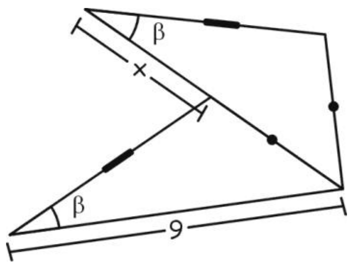
A) 30º **B)** 60º **C)** 50º
D) 35º **E)** 40º

3. Hallar el valor de “x + y” en



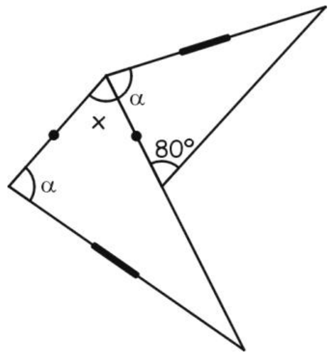
A) 7 **B)** 8 **C)** 9
D) 10 **E)** 11

4. Hallar el valor de “x” en



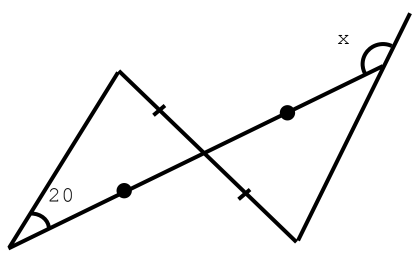
A) 6 **B)** 7 **C)** 8
D) 9 **E)** 10

5. Hallar el valor del ángulo “x” en



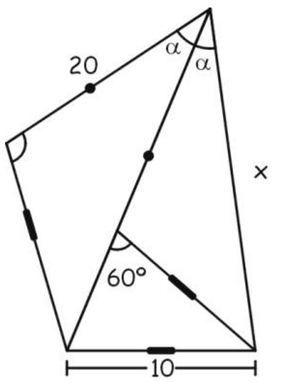
A) 50º **B)** 30º **C)** 80º
D) 70º **E)** 90º

6. Hallar el valor de “x” en



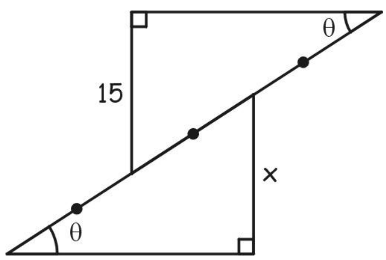
A) 20º **B)** 160º **C)** 80º
D) 60º **E)** NA

7. Hallar el valor de “x” en



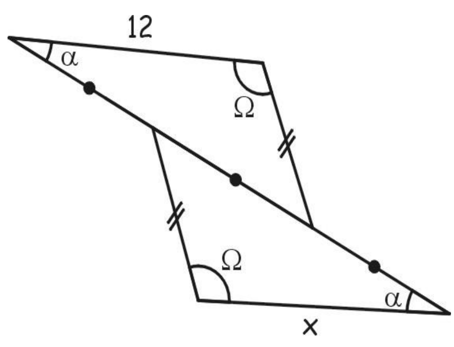
A) 20 **B)** 10 **C)** 30
D) 40 **E)** 15

8. Hallar el valor de “x” en



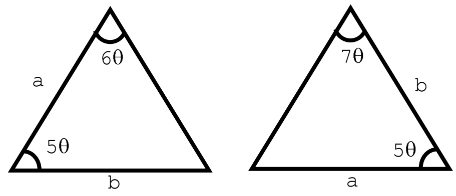
A) 12 **B)** 13 **C)** 14
D) 15 **E)** 16

9. Hallar el valor del ángulo “x” en



A) 11 **B)** 12 **C)** 13
D) 14 **E)** 15

10. Hallar el valor de “x” en



A) 10º **B)** 20º **C)** 15º
D) 13º **E)** NA

Euclides:

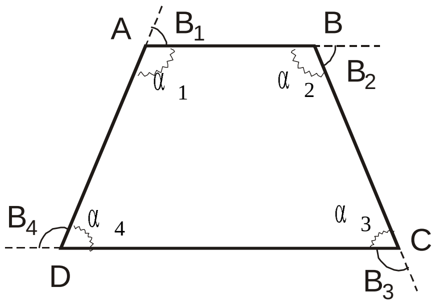
Los Elementos

Euclides en el libro más famoso de la Historia de las Matemáticas recoge gran parte de los conocimientos Pitagóricos sobre los números y define los números primos y compuestos de forma geométrica: un número entero es compuesto cuando tiene divisores distintos de él mismo y de la unidad, es decir cuando se puede dibujar como un rectángulo numérico.

CUADRILÁTEROS

DEFINICION.-

Es aquel polígono que tiene 4 lados, teniendo dos a dos un extremo común.



ELEMENTOS.-

1) **LADOS** $(\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ y $\overline{DA})$

Son los segmentos rectilíneos que lo limitan. Los lados que no tiene vértice común recibe el nombre de lados opuestos.

Ejm: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, son lados opuestos como $\overline{BC}$ y $\overline{DA}$.

2) **VERTICES: (A, B, C y D)**

Son las intersecciones de dos lados consecutivos. En todo cuadrilátero, el número de lados es igual al número de vértices.

3) **ÁNGULOS INTERIORES (α1, α2, α3 y α4)**

Son los ángulos que se forman por dos lados consecutivos, la suma de $\measuredangle$ s interiores en un cuadrilátero es = 360°. Se cumple que:

$$\boxed{\alpha 1 + \alpha 2 + \alpha 3 + \alpha 4 = 360°}$$

4) **ÁNGULOS EXTERIORES (B1, B2, B3 y B4)**

Son los ángulos formados en un vértice por un lado y la prolongación del lado consecutivo.

Los ángulos exteriores son adyacentes a los interiores.

La suma de sus ángulos exteriores en un cuadrilátero es igual a 360°

$$\boxed{B1 + B2 + B3 + B4 = 360°}$$

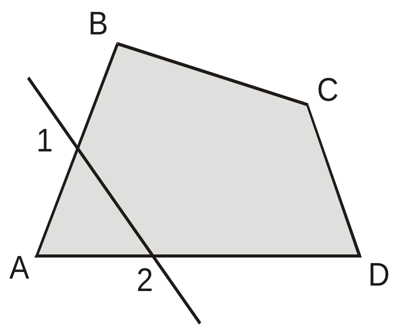
5) **DIAGONALES** $\left(\overline{AC} \text{ y } \overline{BD}\right)$

Son los segmentos de recta que unen dos vértices no consecutivos.

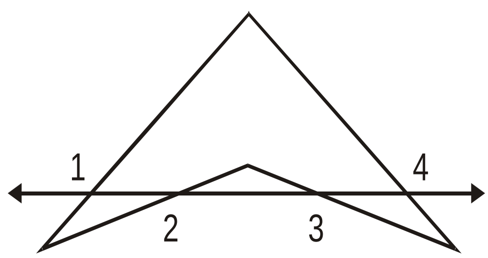
CLASIFICACIÓN DE LOS CUADRILÁTEROS

Por la forma de su contorno

Convexos.- Son aquellos cuadriláteros en los que cualquier recta secante, determina 2 puntos de corte.



Cóncava.- Son aquellos cuadriláteros en los que existe al menos una secante que determina más de dos puntos de corte.

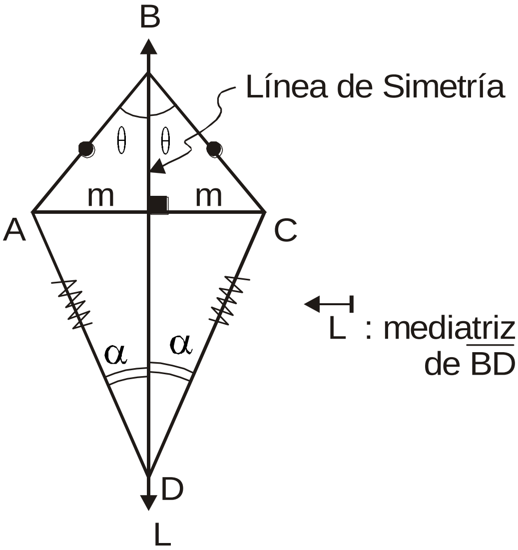


CLASIFICACIÓN DE LOS CUADRILÁTEROS CONVEXOS

De acuerdo al paralelismo de sus lados los cuadriláteros se dividen en: Trapezoide, Trapecio y Paralelogramo.

A. Trapezoides.- Son aquellos cuadriláteros que no tienen lados opuestos, ningún lado paralelo al otro paralelo.

a. Simétrico.- Es aquel en el que una de sus diagonales es mediatriz de la otra.



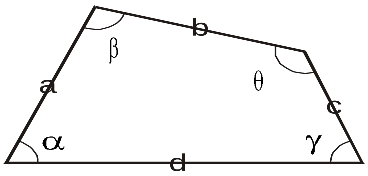
Propiedades:

$\overline{AB} = \overline{BC};\ \overline{AD} = \overline{CD}$

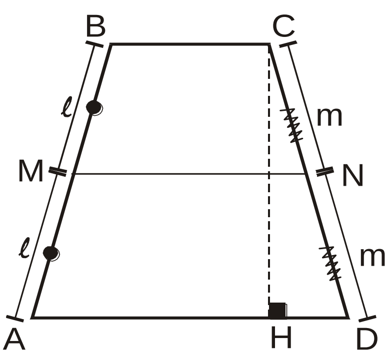
$A\hat{B}D = D\hat{B}C = \theta$

$A\hat{D}B = B\hat{D}C = \alpha$

b. Asimétrico: Es aquel que no tiene ninguna simetría. También llamado trapezoide irregular.



B. Trapecios.- Es el cuadrilátero que solo tiene dos lados paralelos denominados bases.



BASES: $\overline{BC}$; $\overline{AD}$

$\overline{BC} \parallel \overline{MN} \parallel \overline{AD}$

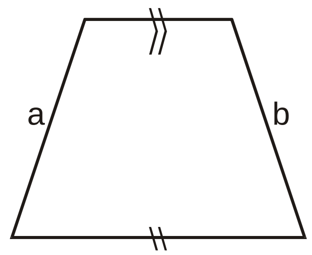
“

$\overline{MN}$: Mediana del trapecio. Es el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos. Se le conoce también como “base media”.

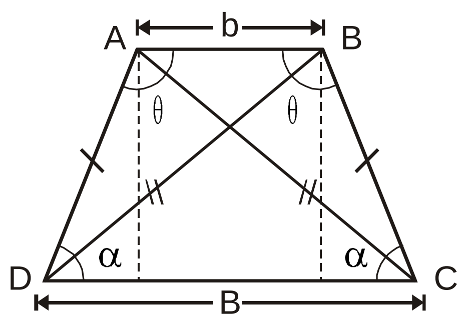
$\overline{CH}$: Altura del trapecio. Es la distancia entre sus dos bases.

CLASIFICACIÓN DE LOS TRAPECIOS

a. Escaleno.- Es aquel que tiene sus lados no paralelos desiguales.



b. Isósceles.- Es aquel que tiene sus lados no paralelo iguales.



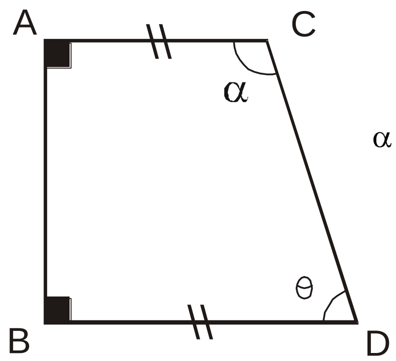
Se cumple

$$\overline{AD} = \overline{BC}$$
$$\hat{A} = \hat{B}\ ;\ \hat{C} = \hat{D}$$
$$\overline{BD} = \overline{AC}$$

→ Las diagonales

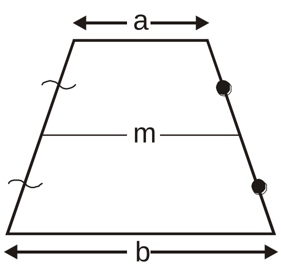
- Los ángulos opuestos son suplementarios $\boxed{\theta + \alpha = 180°}$

c. Rectángulo.- Es aquel trapecio donde uno sus lados no paralelos es perpendicular a sus bases.

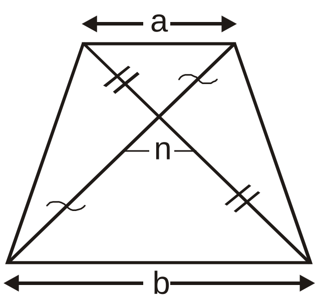


$\alpha + \theta = 180°$

PROPIEDADES DEL TRAPECIO

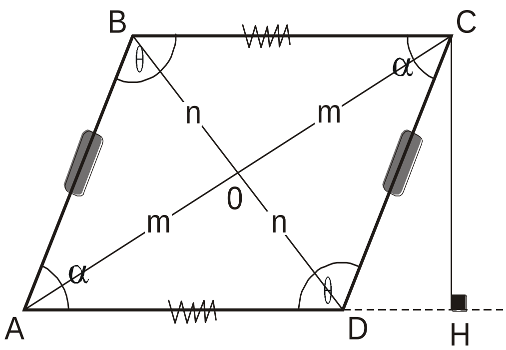


$$m = \frac{b+a}{2}$$



$$n = \frac{b-a}{2}$$

C. PARALELOGRAMOS.- Son aquellos cuadriláteros que tienen sus lados opuestos paralelos y congruentes. Se cumple que los ángulos opuestos son de igual medida y dos ángulos consecutivos siempre suplementarios. Además sus diagonales se bisecan mutuamente.



Se cumple: $\Rightarrow \overline{AB} \,//\, \overline{DC}$ y $\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$

$\Rightarrow AD = BC$; $AB = CD$

$\Rightarrow \overline{AO} = \overline{OC}$ y $\overline{BO} = \overline{OD}$

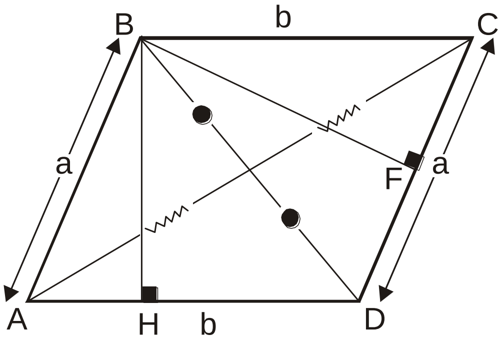
$\Rightarrow$ CH: altura

- Los ángulos opuestos son iguales y los ángulos adyacentes a un mismo lado son suplementarios.

$$\boxed{\hat{B} = \hat{D}\ ;\ \hat{A} = \hat{C}}$$

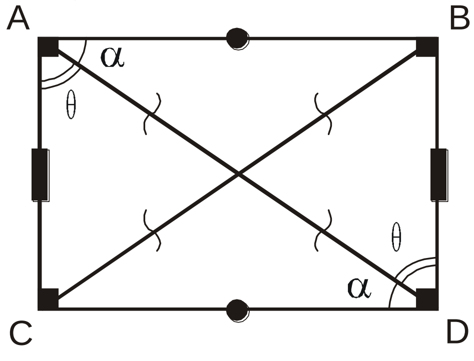
$$\boxed{\begin{array}{l}\hat{A} + \hat{B} = 180 \\ \hat{C} + \hat{D} = 180\end{array}}$$

a. Romboide.- Es el paralelogramo propiamente dicho.



($\overline{BH}$; $\overline{BF}$: Alturas)

b. Rectángulo.- Es el paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos iguales y rectos (equiángulo) y sus lados opuestos iguales dos a dos. Llamado también, cuadrilongo.



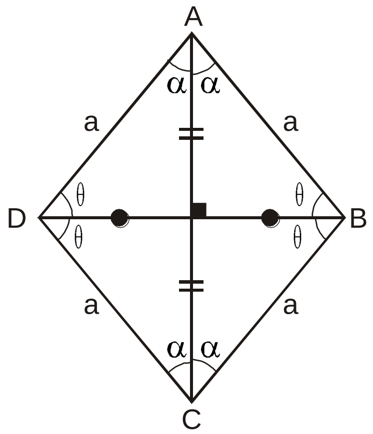
Se cumple: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90°$

$\overline{AC} = \overline{BD}$; $\overline{AB} = \overline{CD}$

- Las diagonales son iguales:

$$\boxed{\overline{AD} = \overline{BC}}$$

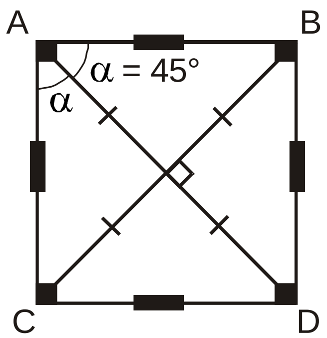
c. Rombo.- Es un paralelogramo que tiene sus cuatro lados iguales y sus ángulos opuestos dos a dos. Es un paralelogramo equilátero.



$$\boxed{\overline{AD} = \overline{AB} = \overline{CD} = \overline{CB}}$$

- Las diagonales son perpendiculares entre si y bisectriz de sus ángulos.

d. Cuadrado.- Es un paralelogramo que tiene sus cuatro lados iguales y sus cuatro ángulos iguales y rectos (es un paralelogramo equiángulo y equilátero)

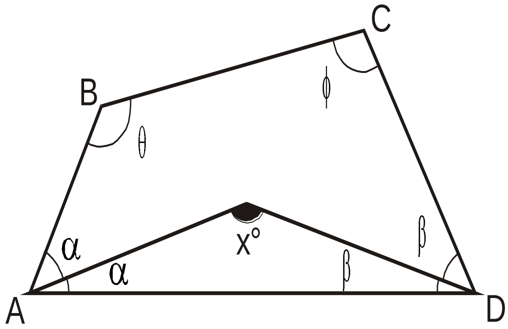


$$\boxed{\overline{AB} = \overline{BD} = \overline{DC} = \overline{CA}}$$

- Sus diagonales son iguales. $\boxed{\overline{AD} = \overline{BC}}$

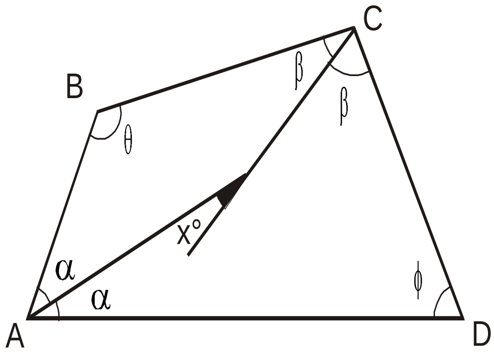
PROPIEDADES GENERALES

1. Ángulo formado por 2 bisectrices.



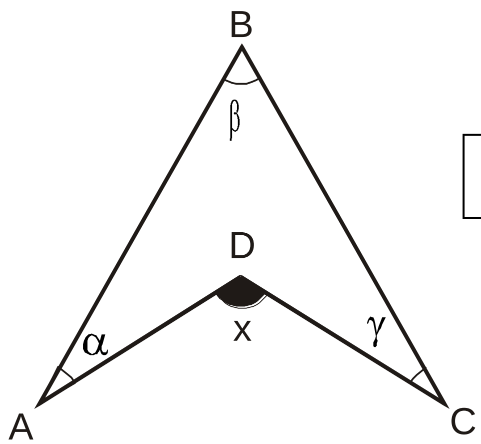
$$x = \frac{\theta + \phi}{2}$$

2. ángulo formado por dos bisectrices interiores no consecutivos.



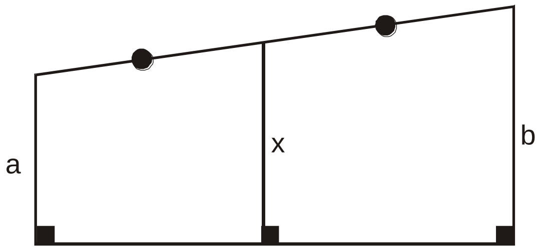
$$x = \frac{\theta - \phi}{2}$$

3. cuadrilátero cóncavo.



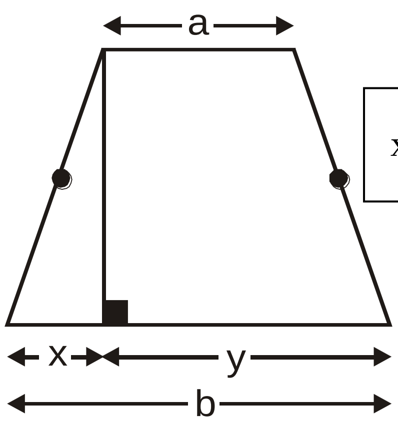
$$\hat{x} = \alpha + \beta + \gamma$$

4.



$$x = \frac{a+b}{2}$$

5.



$$x = \frac{b-a}{2}$$

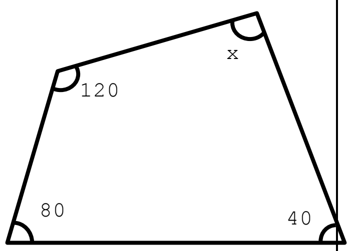
$$y = \frac{b+a}{2}$$

“

PROBLEMAS PARA LA CLASE

NIVEL I

01) Del gráfico. Calcular “x” según corresponda.

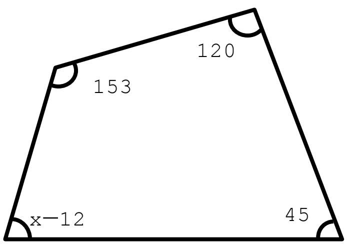


Rpta.:

02) Hallar la base menor de un trapecio, sabiendo la diferencia de la mediana y el segmento que une los puntos medios de sus diagonales es 40.

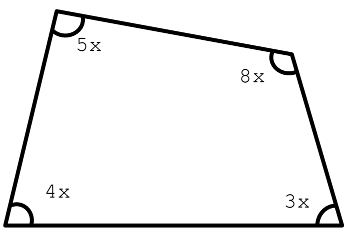
Rpta.:

03) Calcular “x”



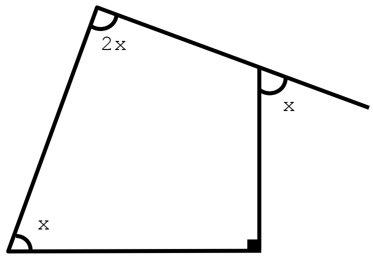
Rpta.:

04) Hallar “x”



Rpta.:

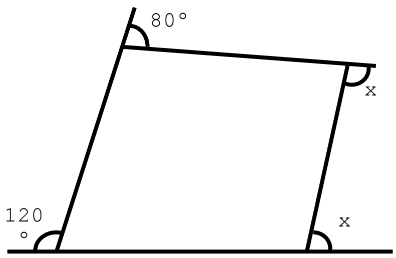
05) Calcular “x”.



Rpta.:

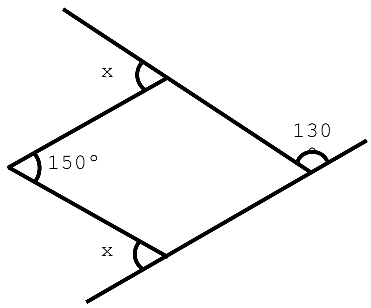
NIVEL II

06) Calcular “x”



Rpta.:

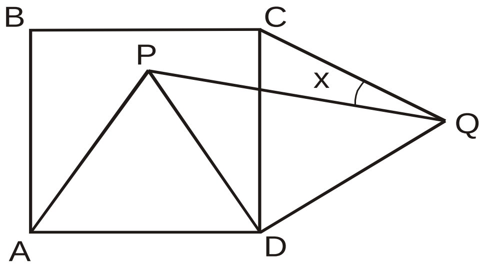
07) Calcular “x”.



Rpta.

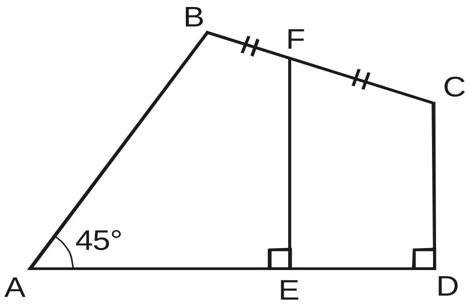
:

08) ABCD: es un cuadrado APD y CQD son triángulo equiláteros. Calcular "x".



Rpta.:

09) Calcular EF, si ED = 4, CD = 7 y AD = 17 (CF = FB).



Rpta.:

NIVEL III

10) Hallar la base menor de un trapecio si la diferencia en la mediana y el segmento que une los puntos medios de las diagonales es igual a 10.

Rpta.:

11) Calcular la relación entre las medidas de las bases de un trapecio en la cual se cumple que las diagonales trisecan a la mediana.

Rpta.:

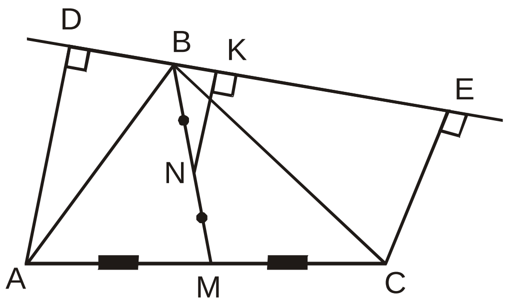
12) En un trapecio, la mediana mide 15 y el segmento que une los puntos medios de las diagonales mide 7. Calcular la medida de la base mayor.

Rpta.:

13) Las bases de un trapecio isósceles son proporcionales a los números 5 y 7. Si la suma de los lados no paralelos es 14 y su perímetro es 38. Calcular la longitud de la mediana.

Rpta.:

14) Si AD = 7 y CE = 5. Calcular NK, sabiendo además que $\overline{BN}$ es mediana y BN = MN.



Rpta.:

15) En un trapecio ABCD ($\overline{BC}$: base menor) la medida del ángulo $\hat{A}$ = 60° y la medida del ángulo $\hat{D}$ = 60º. Si BC = 4 y CD = 6. Calcular la mediana del trapecio.

Rpta.

PROBLEMAS PARA LA CASA

01) Las bases y la mediana de un trapecio suman 66. Hallar la mediana.

a) 11 b) 22
c) 33 d) 44
e) 45

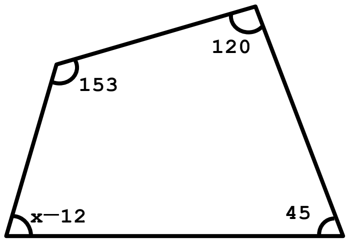
02) En un cuadrilátero ABCD los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ tienen igual medida. Si la medida del ángulo $\hat{B} = 70°$ y la medida del ángulo $\hat{C} = 60°$. Calcular la medida del ángulo $\hat{A}$.

a) 60 b) 75
c) 85 d) 80
e) 100

03) En un trapecio isósceles ABCD ($\overline{BC} // \overline{AD}$) la medida del ángulo $\hat{A}$ =la medida del ángulo $\hat{D}$ = 60°. Calcular la medida del segmento que une los puntos medios de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, si AB = 6.

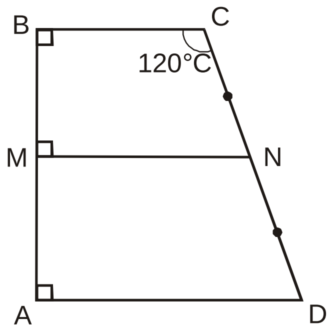
a) 3 b) 4
c) 5 d) 5
e) 7

04) Calcular “x”



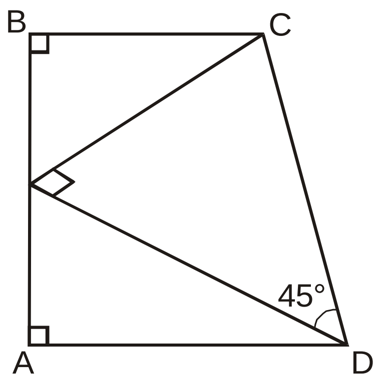
a) 30° b) 54°
c) 42° d) 120°
e) NA°

05) Del gráfico BC = y CD = 12, calcular “MN”.



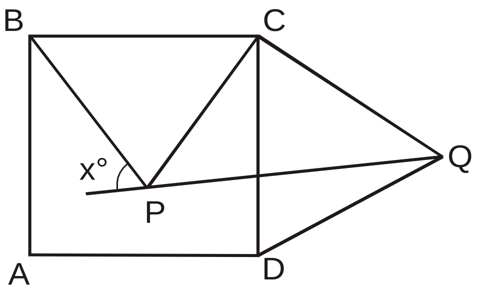
a) 1 b) 3
c) 5 d) 7
e) NA

06) La mediana del trapecio mostrado mide 10. Calcular AB.



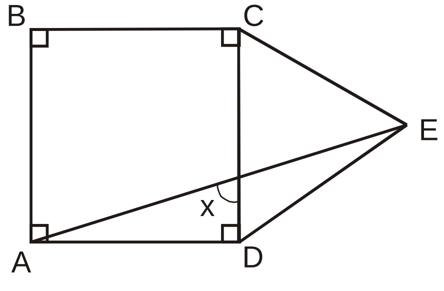
a) 10 b) 20
c) 30 d) 40
e) 50

07) Si ABCD es un cuadrado BPC y CQD son triángulos equiláteros, calcular “x”.



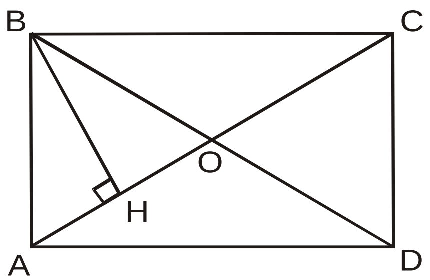
a) 60 b) 65
c) 70 d) 75
e) 80

08) En la figura calcular la medida del ángulo “x” si ABCD es un cuadrado y CDE es un triángulo equilátero.



a) 75 b) 65
c) 35 d) 15
e) 45

09) En la figura ABCD es un rectángulo: calcular la medida del ángulo ABH, si la medida del ángulo BOC = 130.

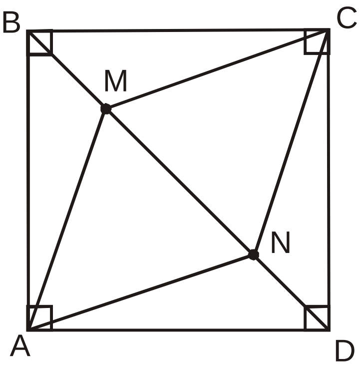


a) 20 b) 25
c) 30 d) 35
e) 40

10) Las diagonales de un rombo miden 24 y 10 calcular su perímetro.

a) 50 b) 51
c) 52 d) 53
e) 54

11) En la figura ABCD es un cuadrado de lado $4\sqrt{2}$. Hallar el perímetro del rombo AMCN. Si BM = 1.

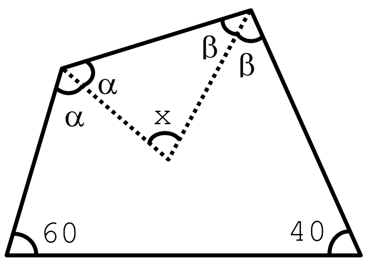


a) 10 b) 16
c) 18 d) 20
e) 22

12) En un rectángulo ABCD por un punto “P” de la diagonal $\overline{BD}$ se prolonga $\overline{CP}$ hasta un punto medio “M” de modo que $\overline{PM} = \overline{PC}$ y además BD=20 y BP = 6. Hallar AM.

a) 4 b) 6
c) 8 d) 10
e) 12

13) Calcular “x”



a) 40º b) 50º
c) 60º d) 35º
e) NA

14) En un trapecio ABCD $\overline{BC} // \overline{AD}$, la medida del ángulo BAD = 82, la medida del ángulo ADC = 16. Calcular la longitud de la mediana si BC = 6 y CD = 10.

a) 5 b) 8
c) 9 d) 10
e) 11

15) En un trapezoide ABCD la diagonal BD es perpendicular al lado AB y AB = BC = BD. Calcular la medida del ángulo ACD.

a) 30 b) 35
c) 40 d) 45
e) 50

“

Línea de Tiempo

c. 300? a.C.
Herófilo revoluciona la anatomía
El médico griego Herófilo es el primero en basar sus conclusiones anatómicas en la disección del cuerpo humano. Reconoce el cerebro como centro del sistema nervioso. Diferencia los nervios motores de los sensoriales y es el primero en conocer que las arterias contienen sangre y no aire.

c. 300? a.C.
Euclides escribe ***Elementos de geometría***
El matemático griego Euclides escribe Elementos de geometría, un extenso tratado de matemáticas en 13 volúmenes, sobre geometría plana, proporciones en general, propiedades de los números, magnitudes inconmensurables y geometría del espacio.

c. 300? a.C.
Zenón de Citio funda el estoicismo
Aproximadamente en el 300 a.C. el griego Zenón de Citio fundó la escuela filosófica del estoicismo. Mantenía que los individuos deben vivir de acuerdo con las leyes de la naturaleza.

c. 300? a.C. - d.C. c. 300
Periodo Yayoi
El periodo Jomon en Japón da paso al periodo Yayoi, una nueva cultura, que comienza en Kyûshû, se va extendiendo lentamente hacia el este y se impone de forma gradual. La cultura Yayoi es más avanzada, introduce el cultivo encharcado del arroz, el tejido, utilitarias cerámicas cocidas a altas temperaturas y herramientas de hierro .

“

MISCELÁNEA DE EJERCICIOS PROPUESTOS I

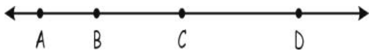
1. En una recta se toman los puntos consecutivos P, Q y R, PR =32; QR=8.
Hallar PQ

Rpta.

2. Hallar BC, si AC = 12; BD = 15, AD= 20

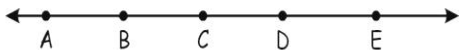
Rpta.

3. Si: 3AB = 4BC = 6CD = 72, Hallar AC



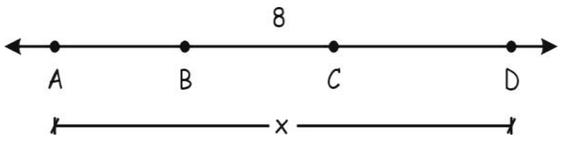
Rpta.

4. Si: AB = CD = 24; BC = DE = 20. Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$



Rpta.

5. Si: AC + BD = 48. Hallar AD



Rpta.

6. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B y C tal que AB – BC = 14 y AB + BC = 32
Hallar AB

Rpta.

7. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B y C, siendo AC = 84. Calcule la longitud del segmento cuyos extremos son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente

Rpta.

8. En una recta se ubican los puntos A, B, C y D tal que $\frac{AB}{4} = BC = \frac{CD}{3}$, siendoAD = 64.
Calcule BC.

Rpta.

“

9. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B y C tal que AB = 4BC y AC = 15.Calcule: BC

<u>Rpta</u>.

10. Si: M es punto medio de $\overline{AE}$ y AC – CE = 64.
Hallar MC

<u>Rpta</u>.

11. Si: AB = 16, BC = 28.
Hallar BM, siendo M punto de $\overline{AC}$

<u>Rpta</u>

.

12. Si M es punto medio de $\overline{BC}$ y AB + AC = 62.
Hallar AM

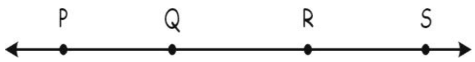
<u>Rpta</u>.

MISCELÁNEA DE EJERCICIOS PROPUESTOS II

1. En una recta se toman los puntos consecutivos A, B y C; AC = 48, BC= 25.
Hallar AB

F) 20 **G)** 21 **H)** 22
I) 23 **J)** 24

2. Hallar QR, si. PR = 20; QS = 24, PS = 36



K) 8 **L)** 9 **M)** 10
N) 11 **O)** 12

3. Si: 2PQ = 4QR = 3RS = 120.
Hallar PS

P) 140 **Q)** 120 **R)** 130
S) 160 **T)** 150

4. Si: PQ = RS = 18; QR = ST = 14.
Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{PQ}$ y ST.

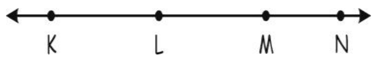
U) 44 **V)** 46 **W)** 49
X) 48 **Y)** 47

5. Si: N es punto medio de PR y PQ – QR = 56.
Hallar NQ

Z) 25 **AA)** 28 **BB)** 29
CC) 24 **DD)** 27

“

6. Si M es punto medio de LN y KL + KN = 72.
Hallar KM



EE) 16 **FF)** 26 **GG)** 36
HH) 40 **II)** 50

7. Si N es punto medio de QR y además PQ + PR = 86. Hallar PN

JJ) 13 **KK)** 23 **LL)** 48
MM) 86 **NN)** 43

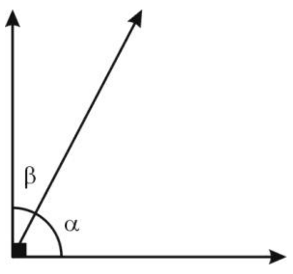
“

REFORZAMIENTO DE ANGULOS

1. Se tiene los ángulos consecutivos $\hat{AOB}$, $\hat{BOC}$ y $\hat{COD}$, m∢A0C = 64º y m∢BOD = 26º, m∢$\hat{BOD}$ = 78º. Hallar m∢$\hat{BOC}$.

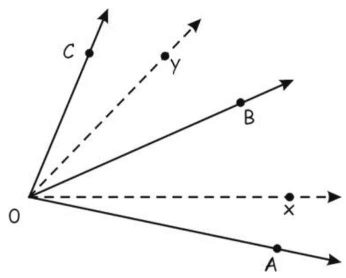
Rpta.

2. En la figura mostrada:
$\alpha = 5x - 25º$
$\beta = 4x + 25º$
Hallar el complemento de “α”



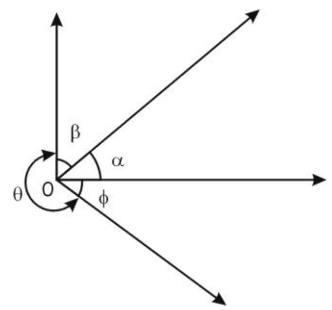
Rpta.

3. En la figura mostrada
$\overrightarrow{0x}$ es bisectriz del ángulo A0B
$\overrightarrow{0y}$ es bisectriz del ángulo B0C
m∢A0C = 66º. Hallar m∢x0y



Rpta.

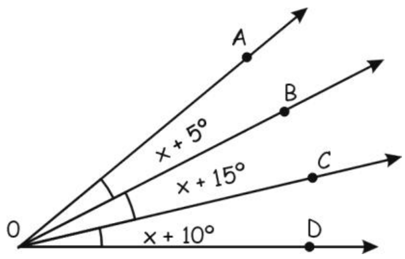
4. En la figura, hallar el valor de “θ”
$\alpha = 2x + 15º$
$\beta = 3x + 20º$
$\theta = 5x + 10º$
$\phi = 45º - x$



Rpta.

“

5. En la figura, m∢A0D = 60º.
Hallar el valor de “x”



Rpta.

6. Hallar el suplemento del complemento de 60º
Rpta.

7. Hallar el complemento de un ángulo que mide el doble de 18º.

Rpta.

8. Halar el suplemento de la mitad de un ángulo que mide 48º.

Rpta.

9. El suplemento de θ es igual a 4θ; hallar “θ”

Rpta.

10. El complemento de “α” más el suplemento de “α” es igual a 145º.
Hallar “α”

Rpta.

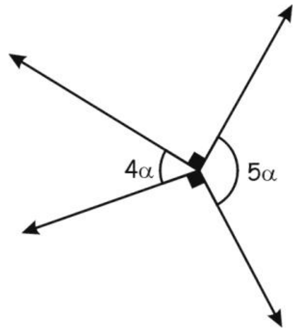
11. Si el suplemento de “x” es igual a “4x”
Hallar “x”

Rpta.

“

PROBLEMAS PARA LA CASA

1. En la figura, hallar “$\frac{3\alpha}{5}$”



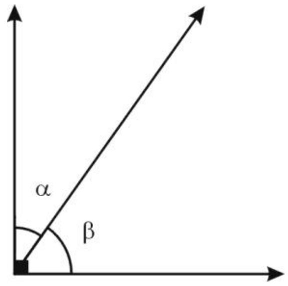
F) 12º **G)** 20º **H)** 10º
I) 15º **J)** 16º

2. Se tienen los ángulos consecutivos $\hat{AOB}$, $\hat{BOC}$ y $\hat{COD}$.m∢A0C = 40º, m∢B0D = 58º. Y m∢A0D = 84º. Hallar m∢B0C

K) 15º **L)** 14º **M)** 16º
N) 20º **O)** 22º

3. En la figura mostrada

$\alpha = 5x - 25º$
$\beta = x - 5$



P) 32º **Q)** 42º **R)** 35º
S) 42º **T)** 52º

4. Hallar el complemento del complemento del complemento de 42º

U) 42º **V)** 54º **W)** 71º
X) 48º **Y)** 24º

"

5. El suplemento de un ángulo es 7θ y el complemento del mismo ángulo es 2θ.
¿Cuál es ese ángulo?

Z) 50º **AA)** 52º30'
BB) 53º **CC)** 53º30'
DD) 54º

6. Hallar el suplemento del complemento del complemento 28º

EE) 59º **FF)** 60º **GG)** 61º
HH) 62º **II)** 28º

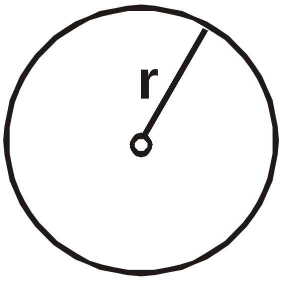
INDICE

III BIMESTRE

CAPÍTULO

LA CIRCUNFERENCIA – PROPIEDADES

Concepto: Es el lugar geométrico de todos los puntos en un plano que equidistan de un punto fijo llamado: centro, la distancia del centro cualquier punto de la circunferencia se llama radio.

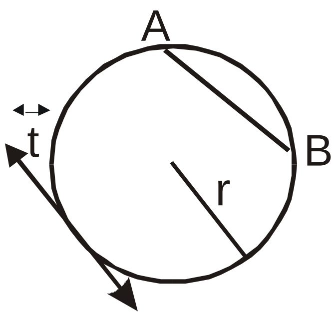


Líneas notables en la circunferencia:

* Radio : r

* $\overline{AB}$: CUERDA.-
Es un segmento que une dos puntos de la circunferencia. Cuando pasa por el centro se llama diámetro (cuerda máxima),

* $\overleftrightarrow{t}$: RECTA TANGENTE.-
Es la recta que toca en un sólo punto a la circunferencia.

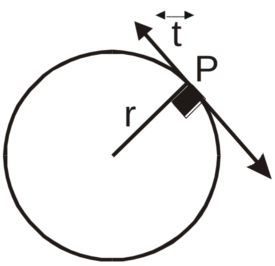


Teoremas Fundamentales

<u>TEOREMA I</u>

TEOREMA DEL RADIO Y LA TANGENTE

Todo radio que llega al punto de tangencia es perpendicular a la recta tangente.



P: punto de tangencia

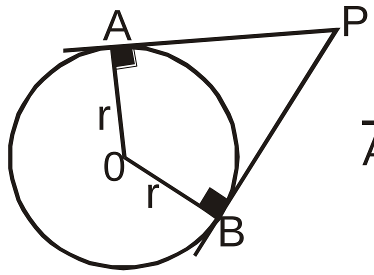
r : radio

T: recta tangente

TEOREMA II

TEOREMA DE LAS DOS TANGENTES.

Si desde un punto exterior se trazan dos tangentes a una misma circunferencia, los segmentos comprendidos entre los puntos de tangencia y el punto exterior son congruentes.

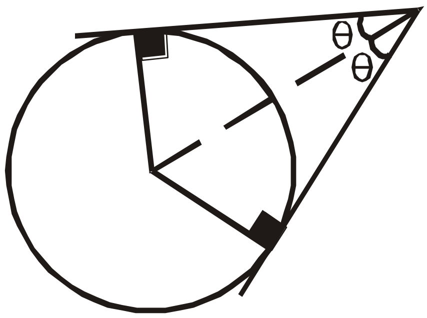


$$\overline{AP} = \overline{BP}$$

TEOREMA III

TEOREMA DE LA BISECTRIZ DEL ÁNGULO FORMADO POR 2 TANGENTES.

El segmento que une el vértice del ángulo formado por dos tangentes con el centro de la circunferencia, es bisectriz del ángulo.

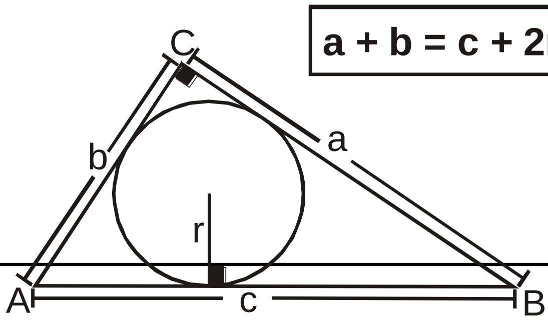


TEOREMA IV

TEORENA DE PONCELET

" En todo triángulo rectángulo: la suma de catetos es igual a la hipotenusa más el doble del radio de la circunferencia inscrita.

$$\boxed{a + b = c + 2r}$$

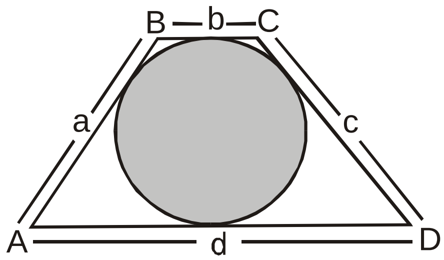


TEOREMA V

TEOREMA DE PITOT

" En todo cuadrilátero circunscrito a una circunferencia se cumple que 2 lados opuestos suman igual que los otros 2"

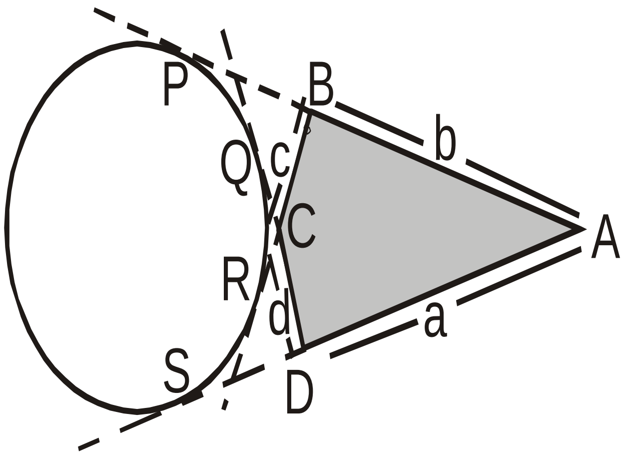
$$\boxed{a + c = b + d}$$



TEOREMA VI

TEOREMA DE STEINER

$$\boxed{a - c = b - d}$$



PROBLEMAS PARA LA CLASE

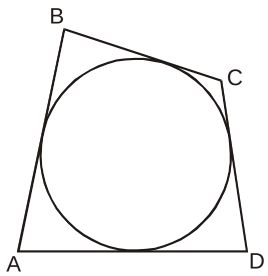
NIVEL I

01) De las siguientes proposiciones cuales son V o F

I. Una cuerda es el segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.
II. El radio es el segmento que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia.
III. Una recta tangente es aquella que tiene un punto en común con la circunferencia.

Rpta.:

02) Si AB = 2CD y BC = 8, AD = 16. Calcular CD.



Rpta.:

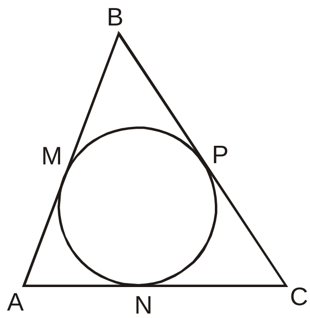
03) Si las bases de un trapecio isósceles miden 16 y 36. Calcular la longitud del radio de la circunferencia inscrita.

Rpta.:

04) El perímetro de un triángulo rectángulo es 60 y el radio de la circunferencia inscrita mide 4. Calcular la longitud de la hipotenusa.

Rpta.:

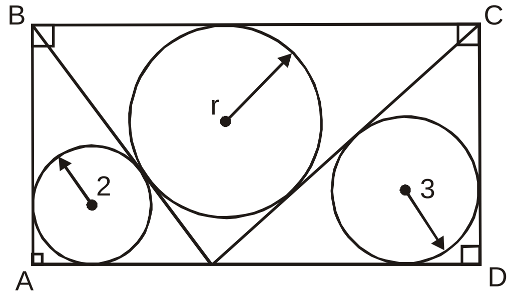
05) Si M, N y P. Son puntos de tangencia y AB = 7, BC = 8, AC = 9. Calcular "BP".



Rpta.:

NIVEL II

06) Si AB = 12. Calcular "r".

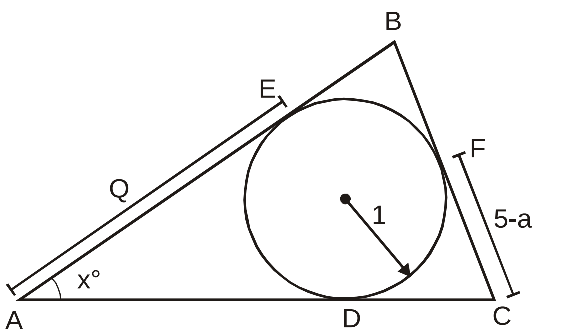


Rpta.:

07) Un rectángulo con lados de 36 y48 se divide por la diagonal en dos triángulos. En cada uno de ellos esta inscrita una circunferencia. La distancia entre sus centros es:

Rpta.:

08) En la figura calcular el perímetro del triángulo ABC. Si "O" es centro.



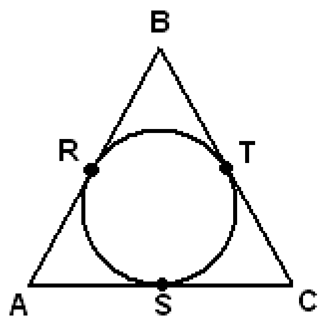
Rpta.:

09) Calcular la longitud de la hipotenusa de un triángulo de perímetro 30, si el radio de la circunferencia inscrita a dicho triángulo mide 2.

Rpta.:

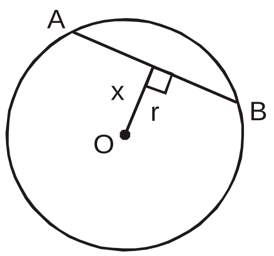
NIVEL III

10) En la figura R, T y S son puntos de tangencia AB = 13, BC = 14 y AC = 15. Calcular AS.



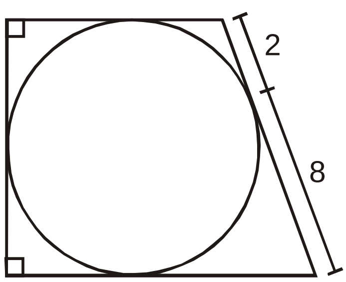
Rpta.:

11) Hallar "x", si AB = 24 y r = 13.



Rpta.:

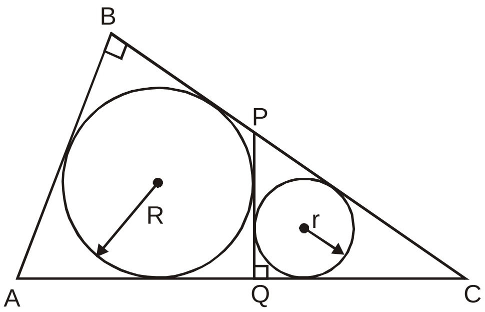
12) Calcular el perímetro del trapecio mostrado.



Rpta.:

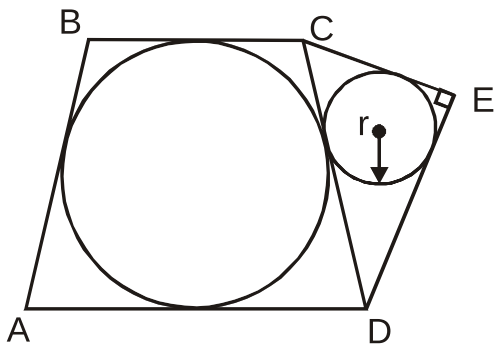
PROBLEMAS PARA LA CASA

01) Del gráfico. Hallar "PQ" y "PC".
Si: R = 2 y r = 1



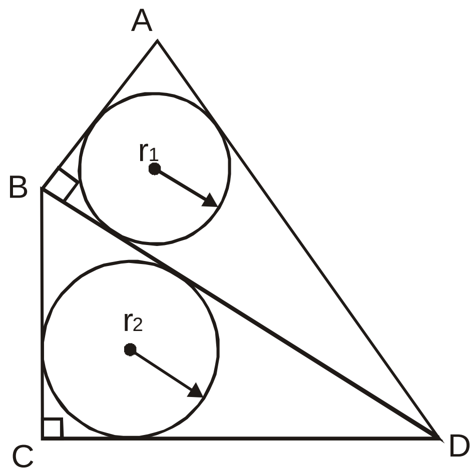
a) 4 y 2 b) 6 y 4 c) 3 y 5
d) 6 y 10 e) 11 y 22

02) Del siguiente gráfico. Calcular "r", si AB = 7, BC = 4, CE = 3 y AD = 8



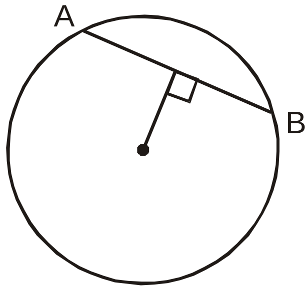
a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

03) En el gráfico. Calcular $r_1 + r_2$. Si AB = 9 y AD = BC + CD



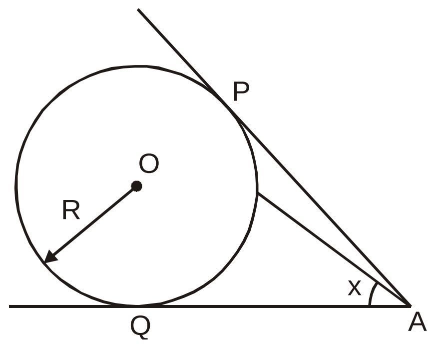
a) 2 b) 3 c) 4.5
d) 6 e) 7

04) Hallar x, si AB = 8, R = 5



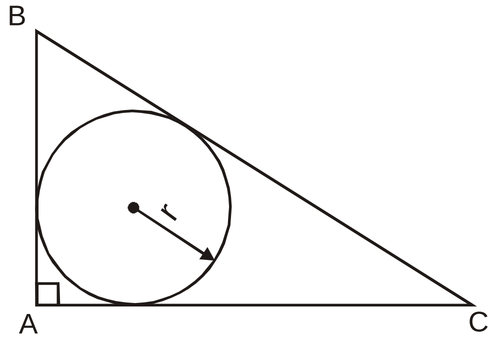
a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

05) Calcular "x", si PA = 7, R = 3



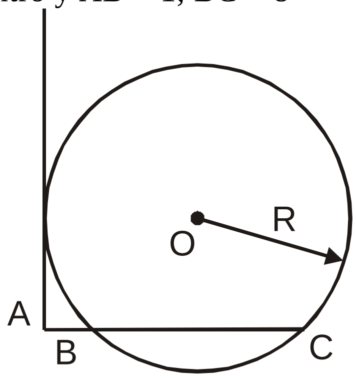
a) 45° b) 37° c) 60°
d) 72° e) 30°

06) Hallar "r", AB = 3, AC = 4



a) 1 b) 2
c) 3 d) 4
e) 5

07) En la figura calcular "x" si "O", es centro y AB = 1, BC = 8

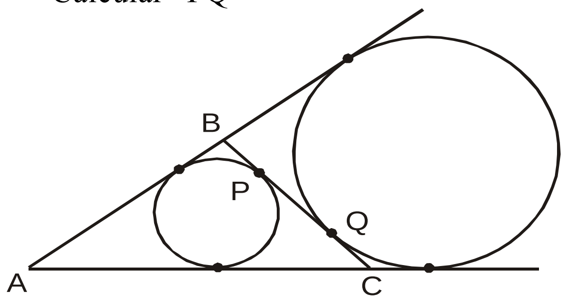


a) 4 b) 5
c) 2 d) 3
e) 6

08) Calcular el área del círculo inscrito en un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 20 cm y la diferencia de las medidas de los catetos es 4 cm.

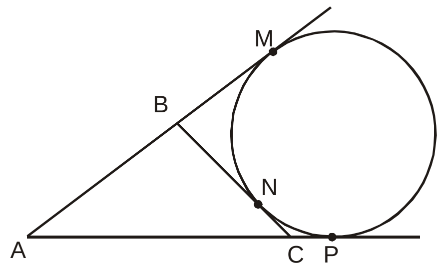
a) $4\pi cm^2$ b) $6\pi cm^2$
c) $8\pi cm^2$ d) $16\pi cm^2$
e) $32\pi cm^2$

09) En la figura AC – AB = 6m. Calcular "PQ"



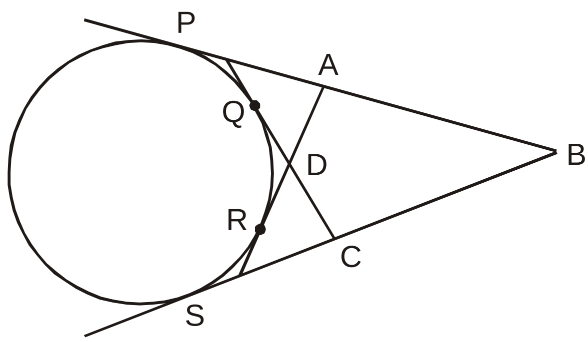
a) 6m b) 3m
c) 12m d) 18m
e) 9m

10) En la figura M, N y P. Son puntos de tangencia. Si AM = 12. Hallar el perímetro del triángulo ABC.



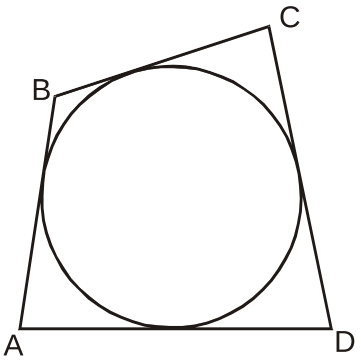
a) 12 b) 24
c) 26 d) 18
e) 30

11) En la figura: P, Q, R y S, son puntos de tangencia. Si AB = 12, BC = 15 y CD = 5. Hallar "AD".



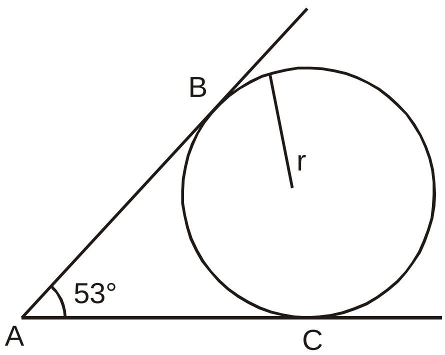
a) 7 b) 6
c) 8 d) 10
e) 9

12) Hallar AB. Si BC = 4, CD = 10, AD = 15



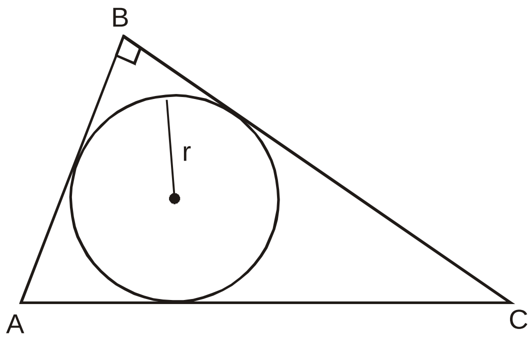
a) 1 b) 3
c) 5 d) 7
e) 9

13) Si AB = 8. Calcular r.



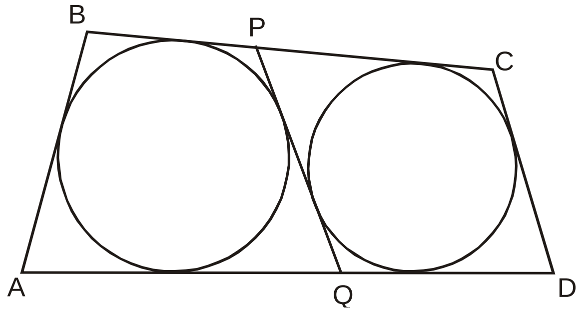
a) 1 b) 2
c) 3 d) 4
e) 5

14) Calcular "r", AB = 5, BC = 12



a) 1 b) 2
c) 3 d) 4
e) 5

15) En la figura: AB + CD = 24 y BC + AD = 40. Calcular "PQ"

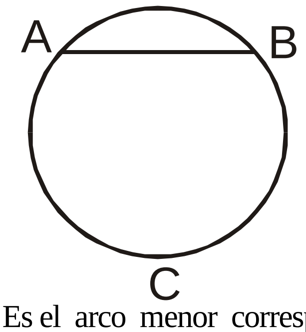


a) 16 b) 14
c) 12 d) 10
e) 8

CIRCUNFERENCIA - ÁNGULOS

DEFINICIONES PREVIAS

1.- Arco de circunferencia. Se denomina arco a una parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos de ella. De la figura:

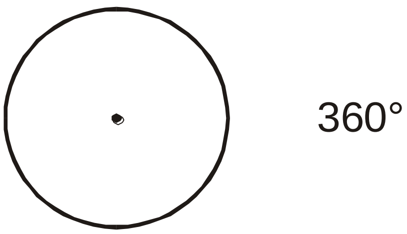


$\overset{\frown}{AB}$: Es el arco menor correspondiente a la cuerda $\overline{AB}$.

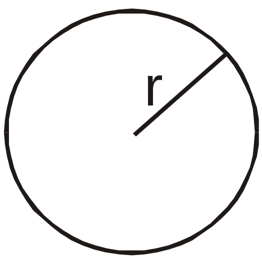
$\overset{\frown}{ACB}$: Es el arco mayor correspondiente a la cuerda AB.

2.- Medida de una circunferencia. Una circunferencia se puede medir tanto en unidades angulares como en unidades lineales.

En unidades angulares.- La medida de una circunferencia es 360°, no interesa cuanto mide el radio.



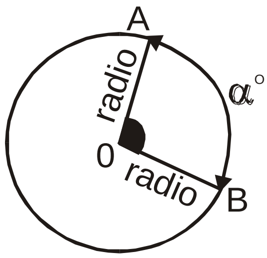
En Unidades Lineales.- Es igual a 2B por el radio. A mayor radio, mayor longitud.



$$\boxed{L_c = 2\pi r}$$

TEOREMAS SOBRE LOS ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

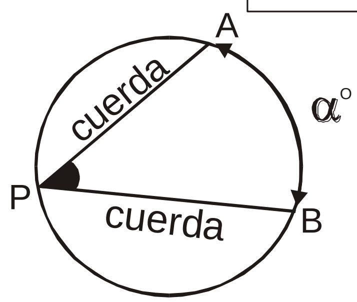
1) Ángulo Central



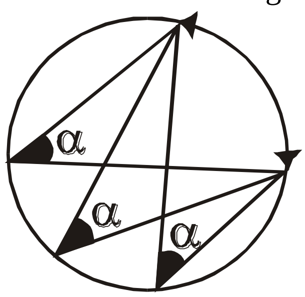
$$\boxed{m\sphericalangle AOB = \alpha°}$$

2) Ángulo Inscrito

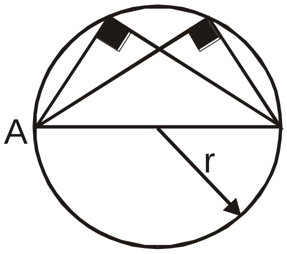
$$\boxed{m\sphericalangle APB = \frac{\alpha°}{2}}$$



Corolario I: Todos los ángulos inscritos en un mismo arco tienen igual medida.

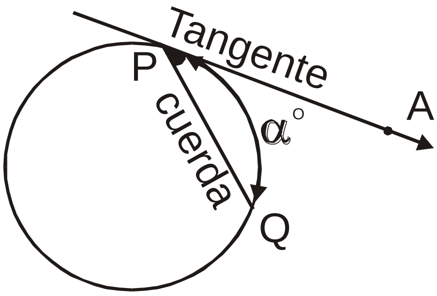


Corolario II.- Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es ángulo recto.



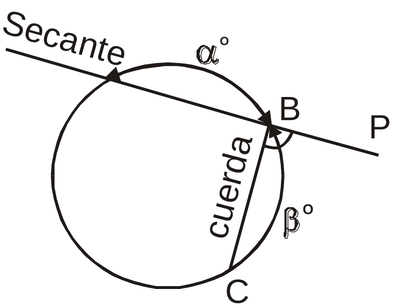
$\overline{AB}$: Diámetro

3) Ángulo Semi – Inscrito



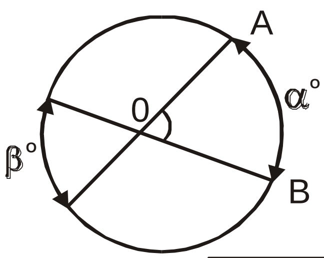
$$m\measuredangle APQ=\frac{\alpha°}{2}$$

4) Ángulo Ex-inscrito



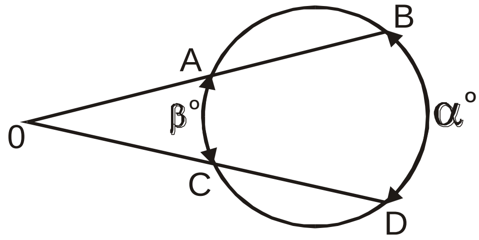
$$m\measuredangle PBC=\frac{\alpha°+\beta°}{2}$$

5) Ángulo Interior



$$m\measuredangle AOB=\frac{\alpha°+\beta°}{2}$$

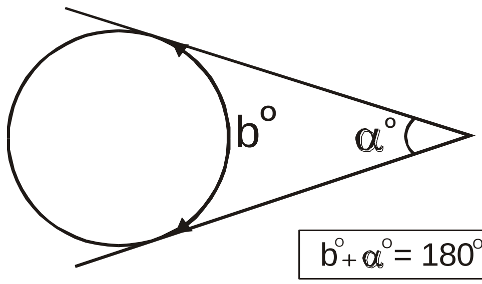
6) Ángulo Exterior



$$m\measuredangle AOC=\frac{\alpha°-\beta°}{2}$$

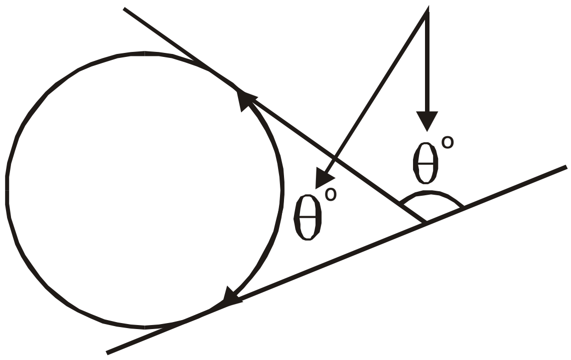
CASO PARTICULAR

TEOREMA DEL ÁNGULO CIRCUNSCRITO



$$\boxed{b^\circ + \alpha^\circ = 180^\circ}$$

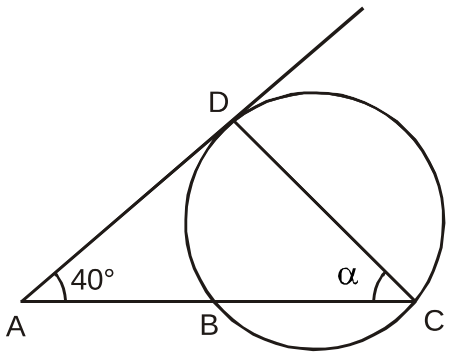
Consecuencia   Son iguales



PROBLEMAS PARA LA CLASE

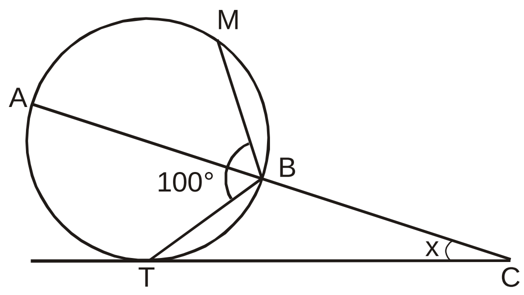
NIVEL I

01) En la siguiente figura calcular "α", si la medida del ángulo "A", es igual a 40° y la medida del arco $\overset{\frown}{BC}$ = 100°



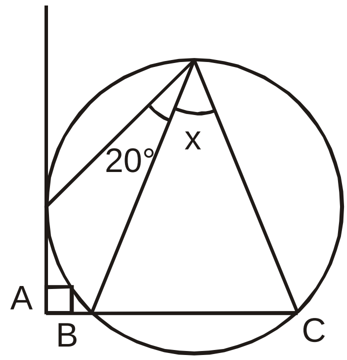
Rpta.:

02) Del gráfico si: $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$; calcular "x"



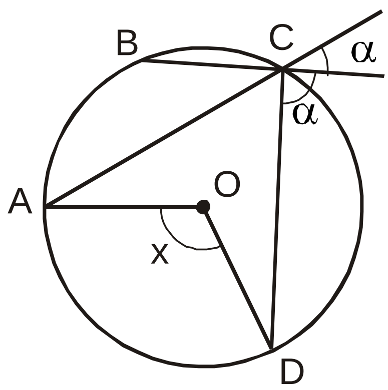
Rpta.:

03) De la figura mostrada. Hallar "x"



Rpta.:

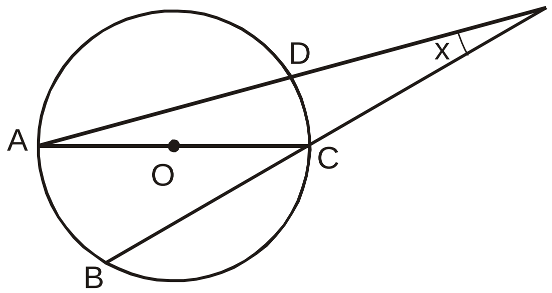
04) Si $\overset{\frown}{AB}$ = 110°, "O" es el centro. Hallar "x"



Rpta.:

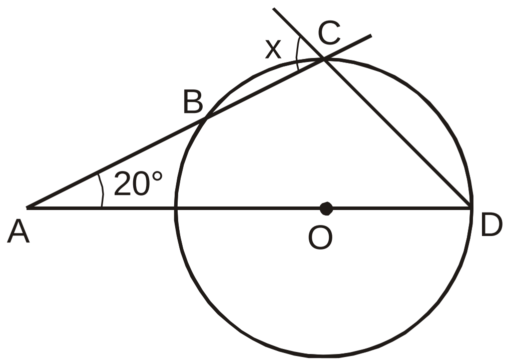
NIVEL II

05) En la figura $\overset{\frown}{AD} = 170°$, $\overset{\frown}{BC} = 2AB$. Hallar "x"



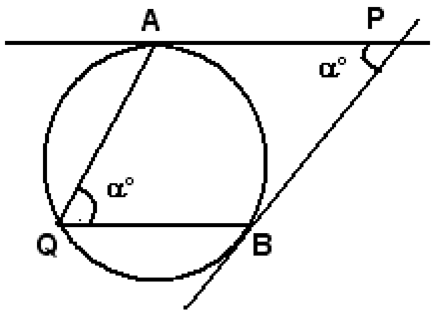
Rpta.:

06) En la figura OD = BC; la medida del ángulo BAD, es 20°. Calcular "x"



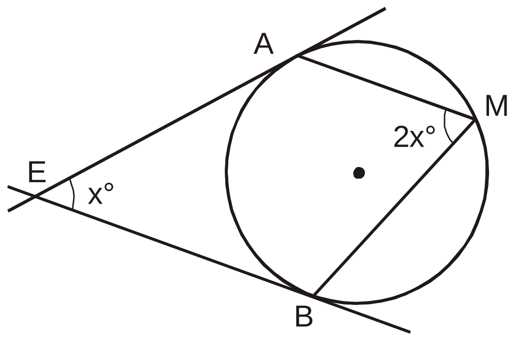
Rpta.:

07) Calcular "α".



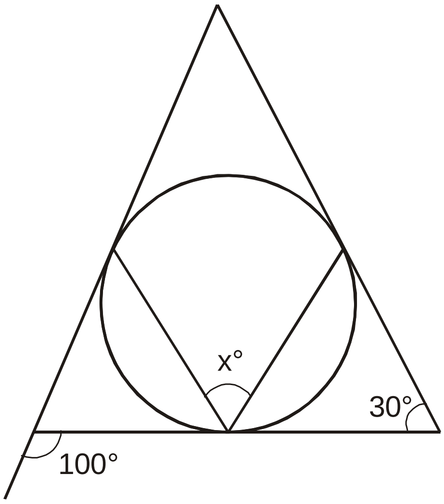
Rpta.:

08) Calcular "x"



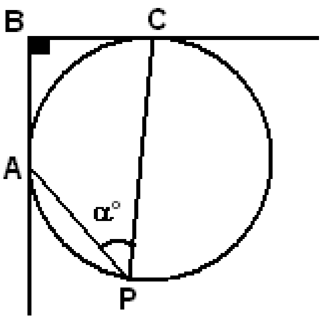
Rpta.:

09) Calcular "x"



Rpta.:

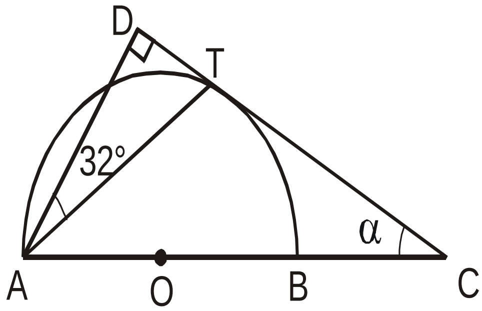
10) Calcular "α".



Rpta.:

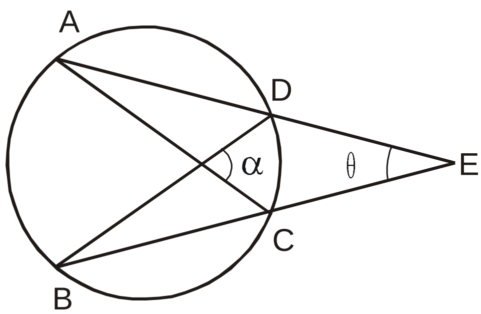
NIVEL III

11) Calcular "α". "T" es punto de tangencia y "O" es centro.



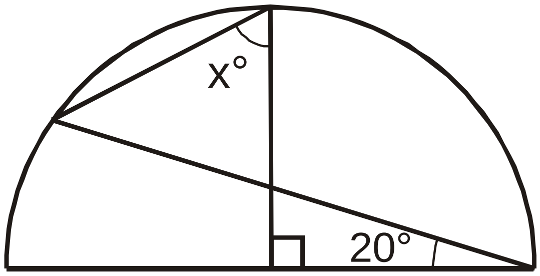
Rpta.:

12) En el gráfico: la medida del arco AB = 100°. Calcular "α + θ"



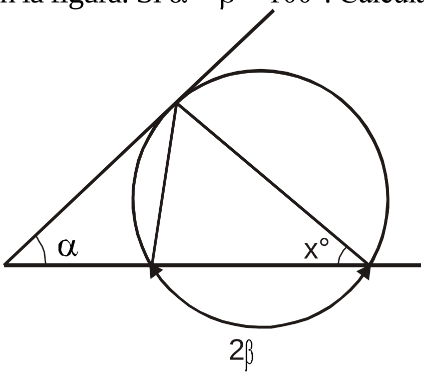
Rpta.:

13) "O" es centro, calcular "x"



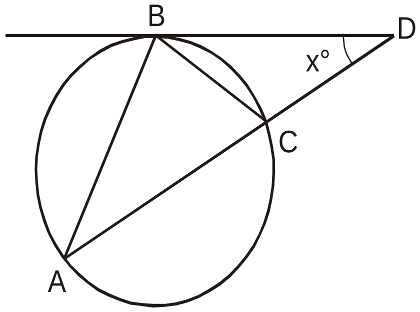
Rpta.:

14) En la figura: Si $\alpha + \beta = 100°$. Calcular "x"



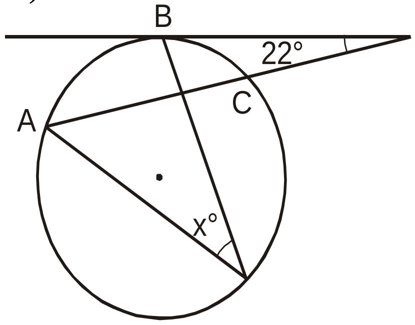
Rpta.:

15) En la figura hallar "x", si AB = BC; la medida del arco AC = 140°



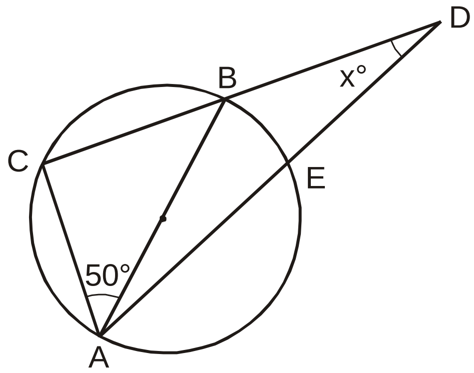
Rpta.:

16) Hallar "x" si la medida del arco $\overset{\frown}{BC} = 28°$



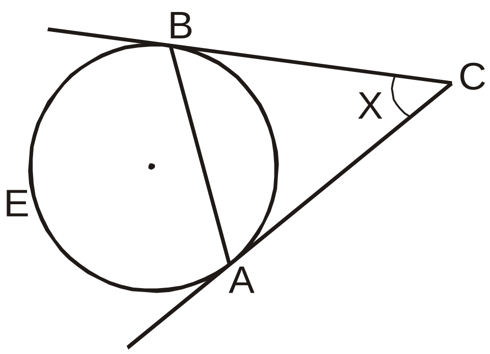
Rpta.:

17) Si, AB = BD; la medida del arco AE = 86°. Hallar "x"



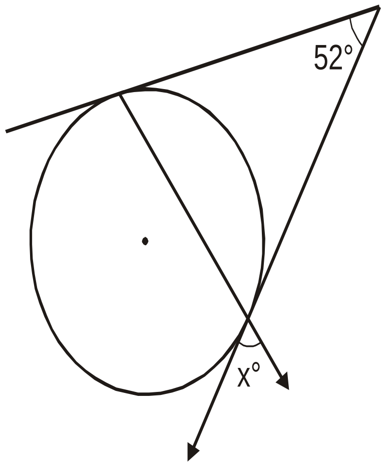
Rpta.:

18) La medida del arco $\overset{\frown}{AEB}$ = 242° y la medida del ángulo ABC = x



Rpta.:

19) Hallar "x"



Rpta.:

20) $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son dos cuerdas congruentes de una circunferencia. Calcular la medida del arco AB, si la medida del ángulo ABC = 48°.

Rpta.:

PITAGORAS

La figura de Pitágoras está envuelta en un halo de leyenda, misticismo y hasta de culto religioso. Y no es tan extraño si pensamos que fue contemporáneo de Buda, de Confucio y de Lao-Tse (los fundadores de las principales religiones orientales)

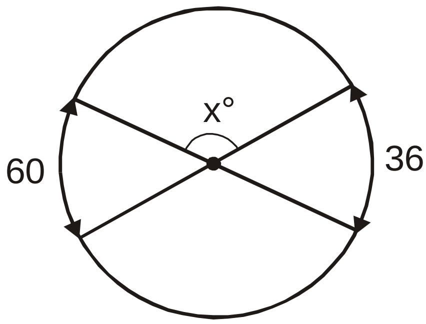
El término "matemática", al igual que el de filosofía, se le debemos a él.

¿Cuáles son las principales aportaciones matemáticas de la escuela pitagórica?...

La primera y quizás la más importante el introducir la necesidad de demostrar las proposiciones matemáticas de manera inmaterial e intelectual, al margen de su sentido práctico. Los pitagóricos dividieron el saber científico en cuatro ramas: la aritmética o ciencia de los números - su lema era "todo es número" -, la geometría, la música y la astronomía.

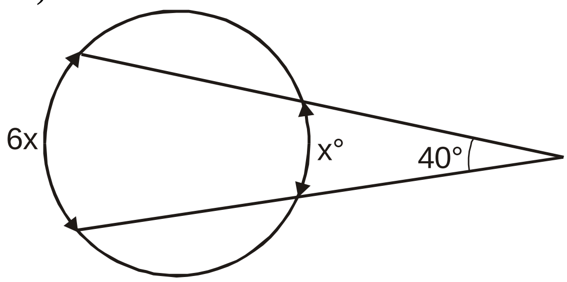
PROBLEMAS PARA LA CASA

01) Hallar "x"



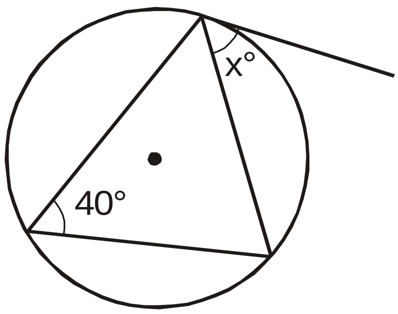
a) 1 b) 100
c) 132 d) 64
e) 64

02) Hallar "x"



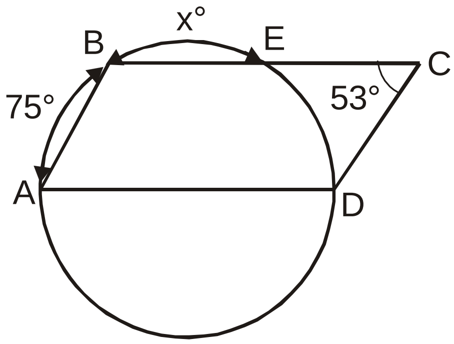
a) 16 b) 32
c) 64 d) 128
e) 526

03) Hallar "x"



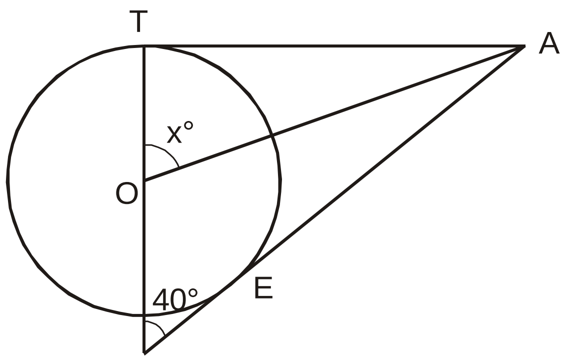
a) 30 b) 60
c) 40 d) 50
e) 70

04) ABCD es un paralelogramo. Hallar "x"



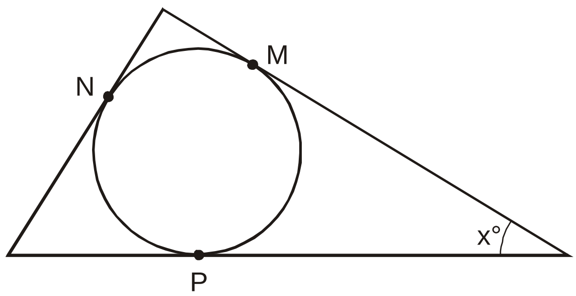
a) 37° b) 53° c) 60°
d) 51° e) 52°

05) Si "O" es centro $\overline{AT}$ y $\overline{AE}$ son tangentes.



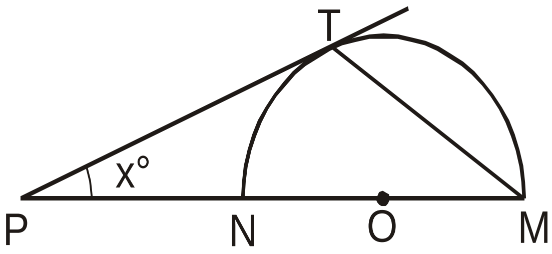
a) 35° b) 45° c) 55°
d) 65° e) 75°

06) La medida del arco MNP = 210°



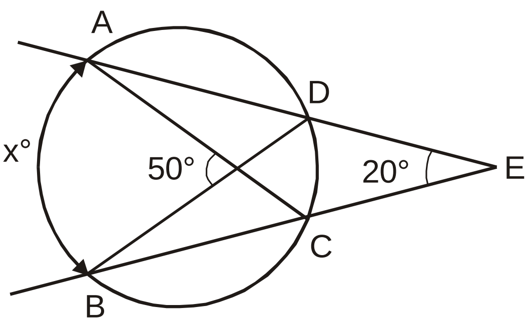
a) 30° b) 60° c) 50°
d) 80° e) 90°

07) La medida del arco $\overset{\frown}{TM}$ = 100°



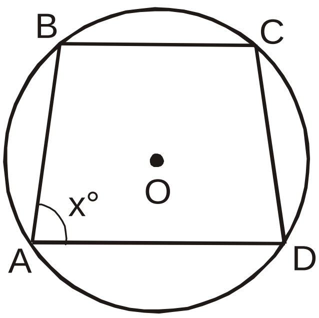
a) 10° b) 20° c) 30°
d) 40° e) 50°

08) Hallar "x"



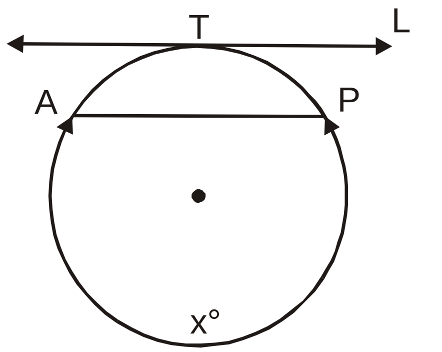
a) 50° b) 70° c) 30°
d) 60° e) 49°

09) ABCD: trapecio, la medida del arco $\overset{\frown}{ABC}$ = 160°



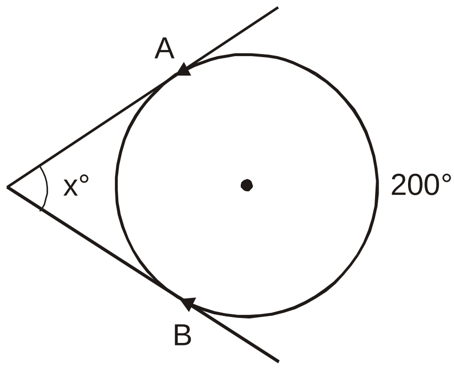
a) 10° b) 20°
c) 80° d) 45°
e) 70°

10) Si $\overleftrightarrow{L} // \overleftrightarrow{AP}$; la medida de arco $\overset{\frown}{AT}$ = 75°



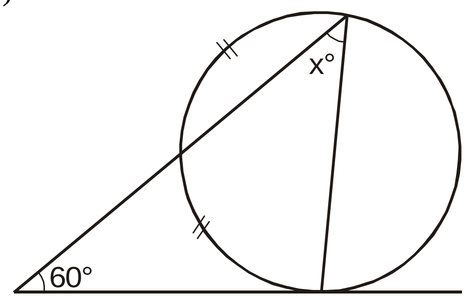
a) 500° b) 400°
c) 218° d) 200°
e) 100°

11) Hallar "x"



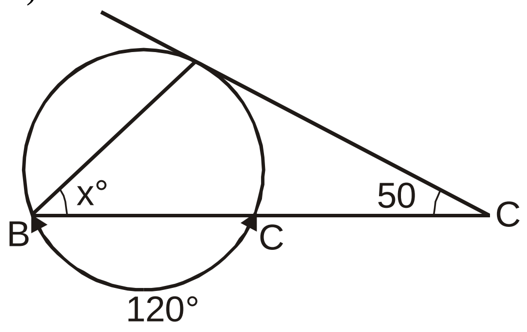
a) 10° b) 20°
c) 30° d) 40°
e) 50

12) Hallar "x"



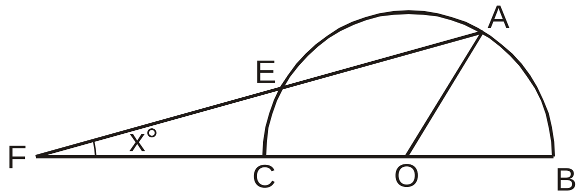
a) 80° b) 70°
c) 60° d) 40°
e) 30

13) Hallar "x"



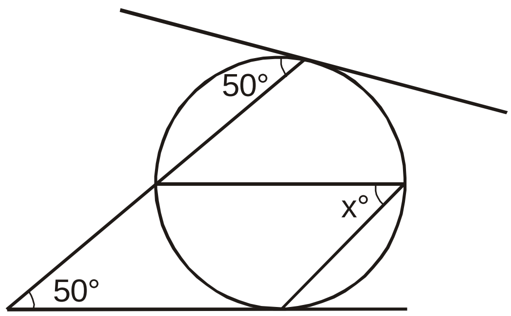
a) 25 b) 40
c) 35 d) 30
e) 45

14) Si "O" es centro: la medida del ángulo AOB = 60°, EF = OC. Calcular "x".



a) 10 b) 15
c) 20 d) 5
e) 30

15) Hallar "x"



a) 80 b) 40
c) 50 d) 20
e) 70

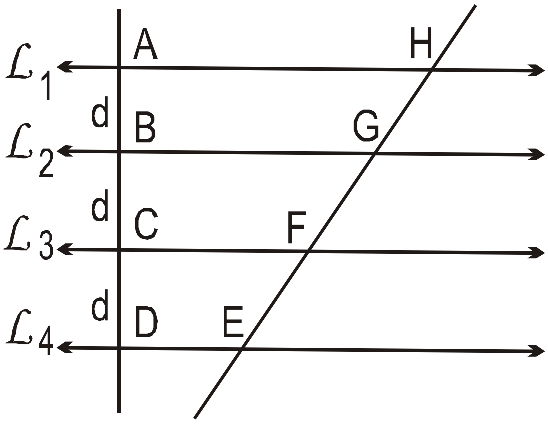
SEMEJANZA Y PROPORCIONALIDAD

PROPORCIONALIDAD:

PRINCIPALES TEOREMAS:

1. TEOREMA DE LAS PARALELAS EQUIDISTANTES

"Tres o más rectas paralelas y equidistantes determinan sobre cualquier recta secante, segmentos congruentes ".

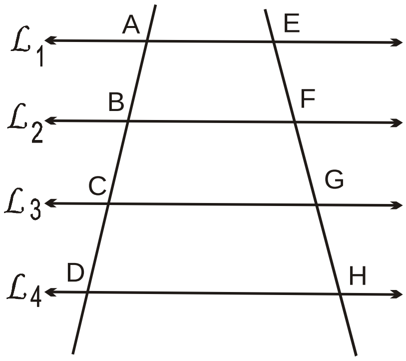


Si $L_1 // L_2 // L_3 // L_4$

Entonces: $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD}$
$\overline{EF} \cong \overline{FG} \cong \overline{GH}$

2. TEORIA DE THALES DE MILETO.-

"Si tres o más rectas paralelas son cortadas por 2 rectas secantes, los segmentos determinados en la primera secante secante son proporcionales a los segmentos determinados en la segunda secante".



Si $L_1 // L_2 // L_3 // L_4$

Entonces

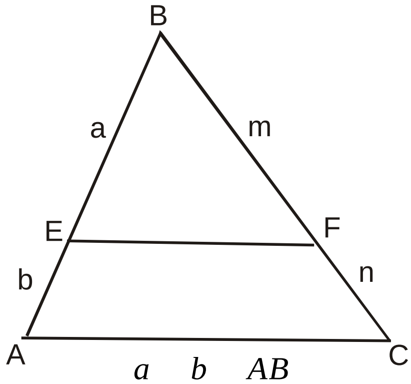
$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH}$$

También podría ser:

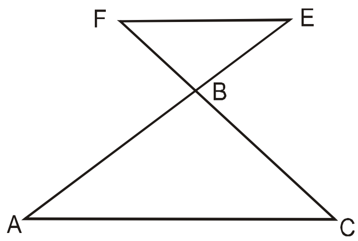
$$\frac{AC}{CD} = \frac{EG}{GH}; \frac{AB}{BD} = \frac{EF}{FH}$$

Casos Particulares

A) En el Triángulo ($\overline{EF} \,//\, \overline{AC}$)

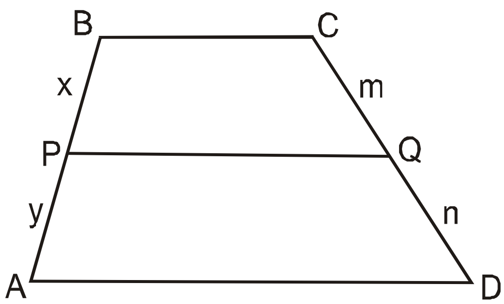


$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{AB}{CB}$$



$$\frac{FB}{BC} = \frac{EB}{BA};\frac{FB}{FC} = \frac{EB}{EA}$$

B) En el Trapecio



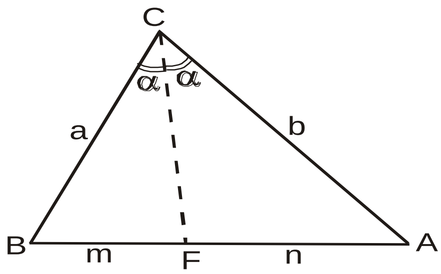
Si $\overline{PQ} \,//\, \overline{BC} \,//\, \overline{AD}$

Entonces

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{AB}{DC}$$

16. TEOREMA DE LA BISECTRIZ INTERIOR

"En todo triángulo, los lados laterales a una bisectriz son proporcionales a los segmentos determinados por la bisectriz del lado opuesto".



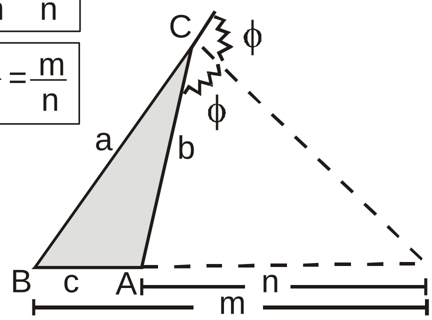
$$\boxed{\frac{a}{m}=\frac{b}{n}} \qquad \boxed{\frac{a}{b}=\frac{m}{n}}$$

5. TEOREMA DE LA BISECTRIZ EXTERIOR

"En todo triángulo una bisectriz exterior determina sobre la prolongación del lado opuesto, segmentos proporcionales a los lados laterales a dicha bisectriz".

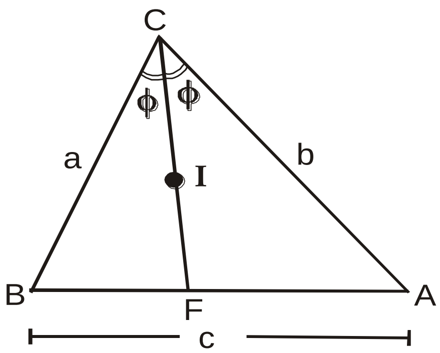
$$\boxed{\frac{a}{m}=\frac{b}{n}}$$

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{m}{n}}$$



6. TEORÍA DEL INCENTRO

"En todo triángulo, el incentro divide a cada bisectriz en 2 segmentos que son proporcionales a la suma de las longitudes de los lados laterales y al lado donde cae la bisectriz".

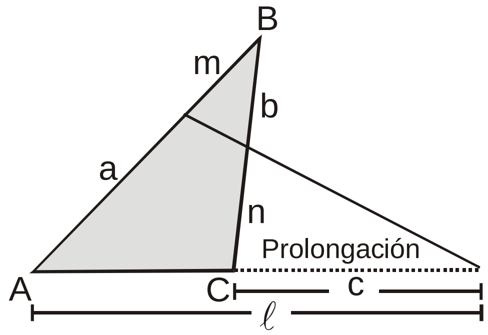


I: Incentro del $\triangle$ABC

$$\boxed{\frac{CI}{IF}=\frac{a+b}{c}}$$

7. TEOREMA DE MENELAO

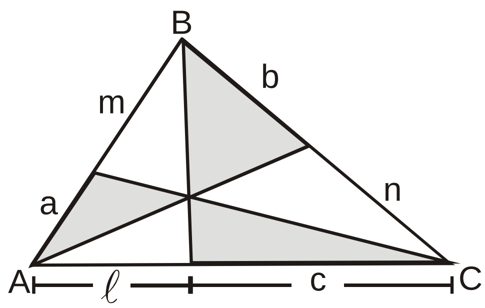
"En todo triángulo al trazar una recta secante a dos lados pero no paralela al tercer lado, se forman seis segmentos consecutivos. Empezando."



$\boxed{a.b.c = m.n.\ell}$

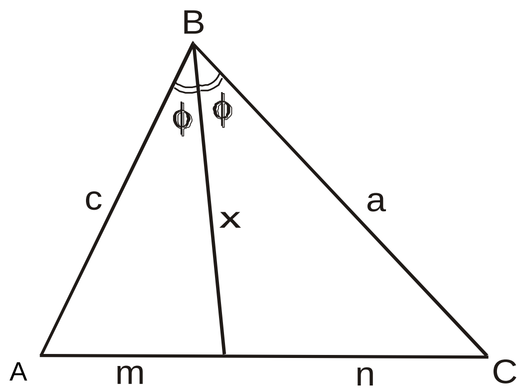
8. TEOREMA DE CEVA

"En todo triángulo al trazar tres cevianas concurrentes, empezando por cualquier vértice, se cumple que: El producto de las longitudes de tres segmentos no consecutivos es igual al producto de las longitudes de los otros tres".



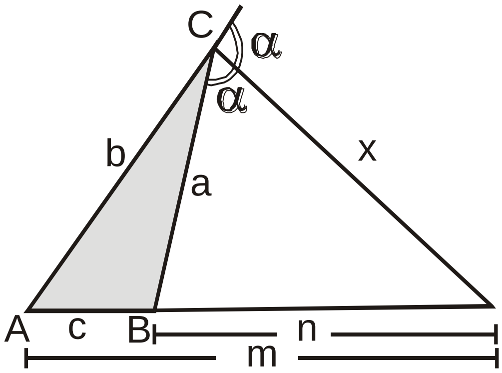
$\boxed{a.b.c = m.n.\ell}$

8. TEOREMA PARA CALCULAR LA LONGITUD DE UNA BISECTRIZ INTERIOR.



$\boxed{x^2 = a.c - m.n}$

9. TEOREMA PARA CALCULAR LA LONGITUD DE UNA BISECTRIZ EXTERIOR.

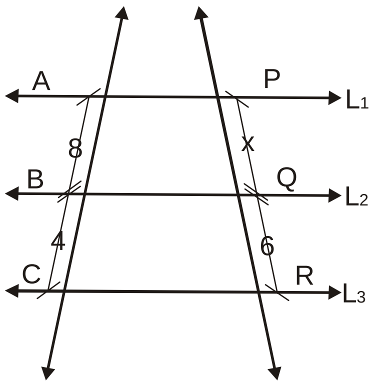


$$\boxed{x^2 = m.n - a.b.}$$

PROBLEMAS PARA LA CLASE

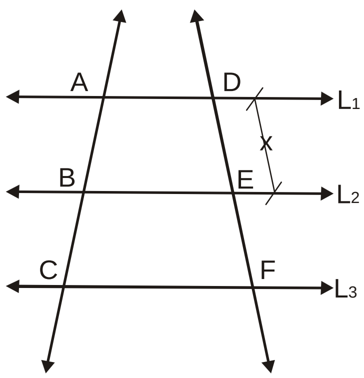
NIVEL I

01) Hallar "x", si L_1 // L_2 // L_3



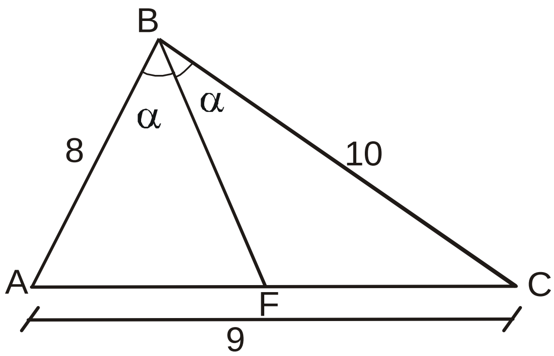
Rpta.:

02) Hallar "x", si L_1 // L_2 // L_3, AC = 10, AB = 4, DF = 5



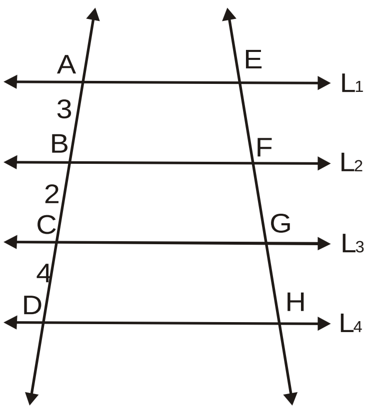
Rpta.:

03) En la figura adjunta, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son proporcionales a $\overline{AF}$ y $\overline{FC}$. Hallar FC – AF.



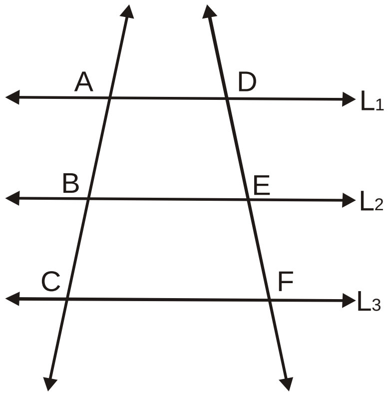
Rpta.:

04) En la figura L_1 // L_2 // L_3 // L_4. Hallar GH, si EH = 27



Rpta.

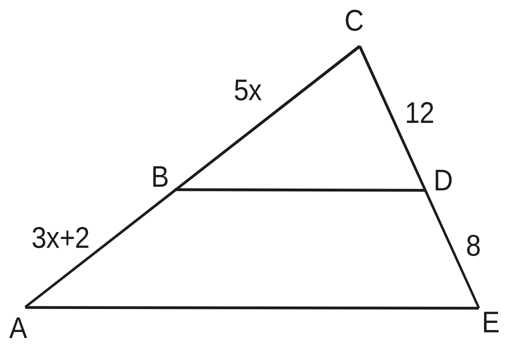
05) En la figura mostrada $L_1 // L_2 // L_3$, si: EF – AB = 3, AC = 16 y DF = 24. Hallar "EF"



Rpta.:

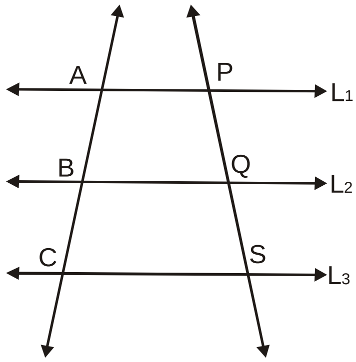
NIVEL II

06) Calcular "x", si $\overline{BD} // \overline{AE}$



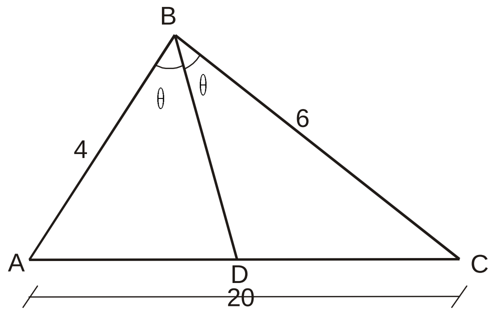
Rpta.:

07) Si $L_1 // L_2 // L_3$, y AB = 6, BC = 18, PQ = 4 y SQ = 2X + 3



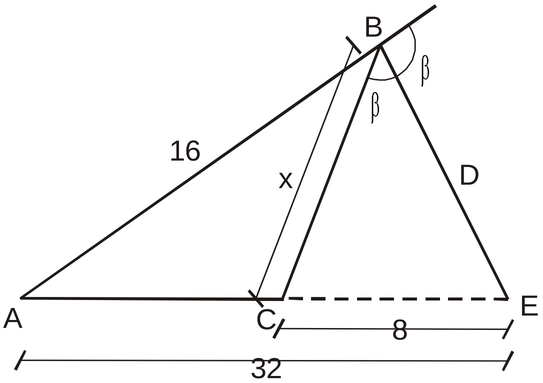
Rpta.:

08) En la figura $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son proporcionales a $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$, hallar AD



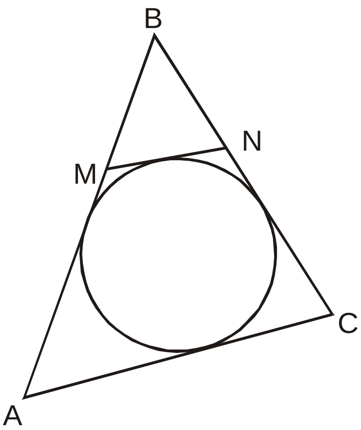
Rpta.:

09) En un triángulo ABC se traza a la bisectriz exterior BE. Si AB = 16, AE = 32, CE = 8. Hallar x.



Rpta.:

10) En la figura mostrada. Si AB = 9, BC = 7, AC = 8 y $\overline{MN} // \overline{AC}$. Hallar "MN"



Rpta.:

NIVEL III

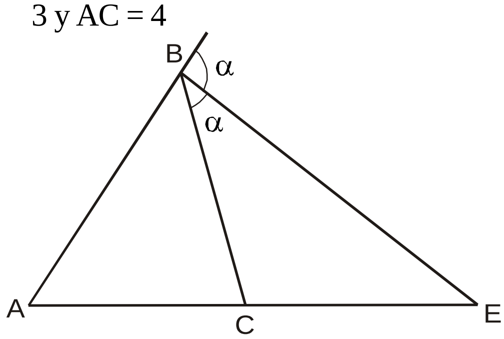
11) Los catetos de un triángulo rectángulo miden 6 y 8. Calcular la distancia del baricentro a la hipotenusa.

Rpta.:

12) En un trapecio isósceles ABCD de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ se inscribe una circunferencia tangente a los lados AB y CD en M y N respectivamente. Calcular $\overline{MN}$, si BC = 8 y AD = 12

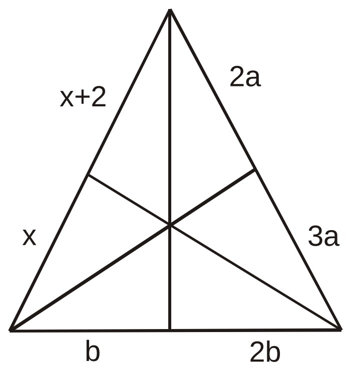
Rpta.:

13) En la figura hallar CE si AB = 6, BC = 3 y AC = 4



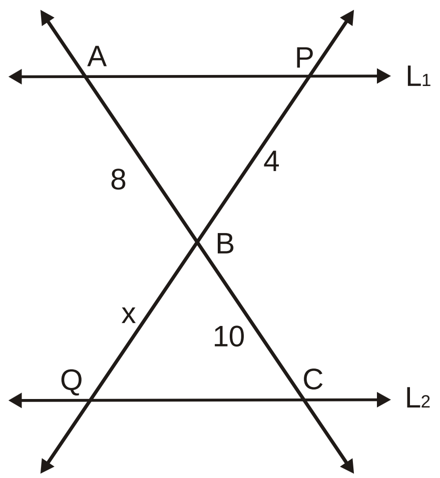
Rpta.:

14) En la figura mostrada, hallar "x"



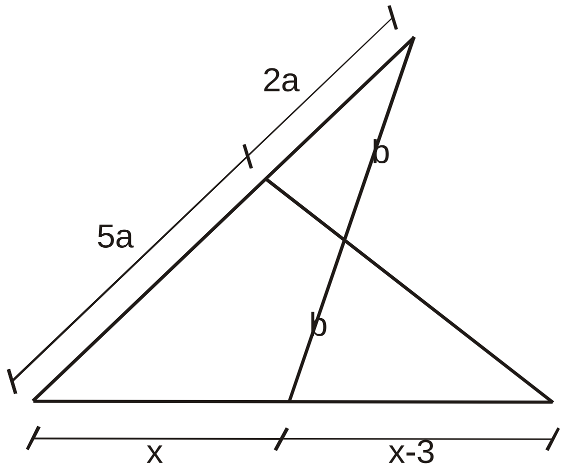
Rpta.:

15) Hallar "x" $L_1 // L_2$



Rpta.:

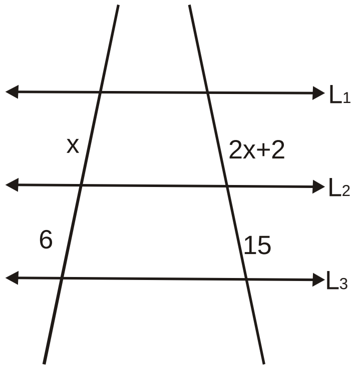
16) En la figura mostrada. Calcular "x"



Rpta.:

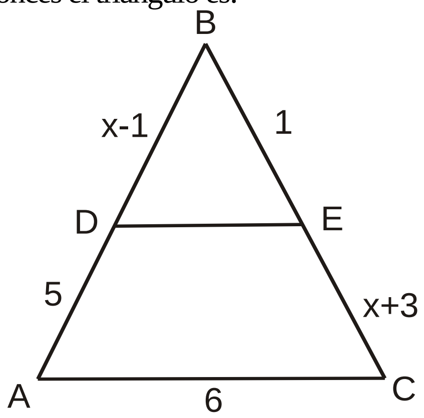
PROBLEMAS PARA LA CASA

01) $L_1 // L_2 // L_3$, son paralelas. Hallar "x"



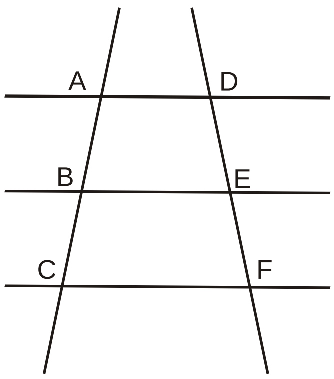
a) 3 b) 4
c) 5 d) 6
e) 7

02) Si el triángulo ABC de la figura $\overline{DE} // \overline{AC}$ entonces el triángulo es:



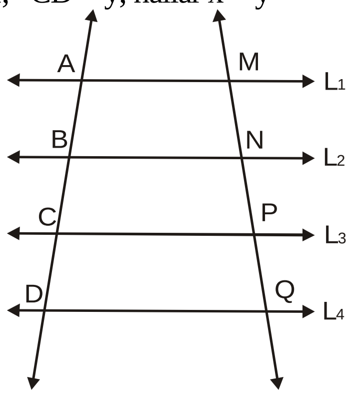
a) Escaleno
b) Isósceles
c) Equilátero
d) Rectángulo
e) Obtusángulo

03) Si $\overline{AD} // \overline{BE} // \overline{CF}$: AB = 36, BC = 6, DE = 4(x + 1) y EF = 10, hallar x



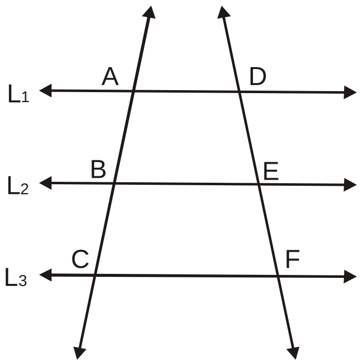
a) 14 b) 15
c) 16 d) 17
e) 18

04) En la figura $L_1 // L_2 // L_3 // L_4$. Si AB = 3, BC = 4, MN = 2x – 2, NP = 2x + 2, PQ = 3x + 1, CD = y; hallar x + y



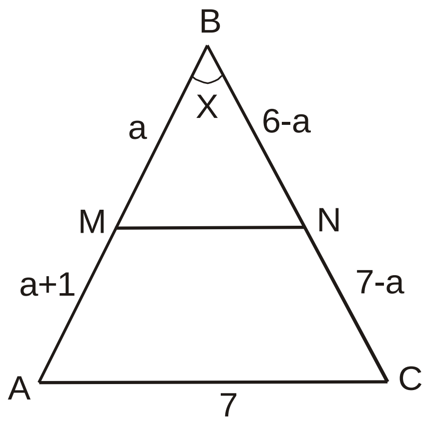
a) 10 b) 15
c) 12 d) 13
e) 14

05) En la figura $L_1 // L_2 // L_3$. BC = 2AB y DF = 12. Hallar DE



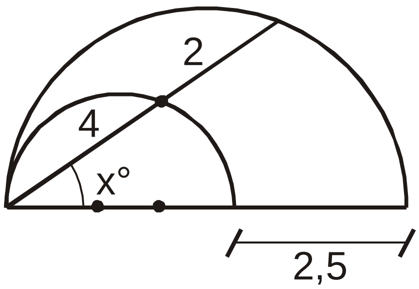
a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

06) En la figura, calcular "x", si $\overline{MN} // \overline{AC}$



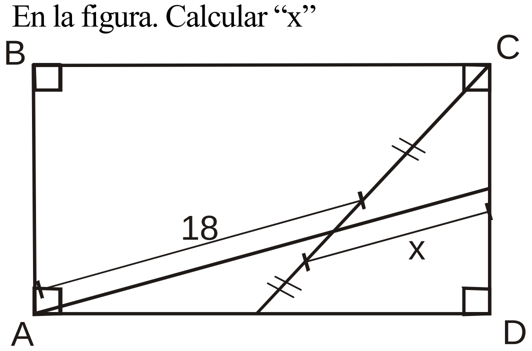
a) 30 b) 90
c) 60 d) 45
e) 37

07) En la figura, se muestran dos circunferencias. Calcular "x"



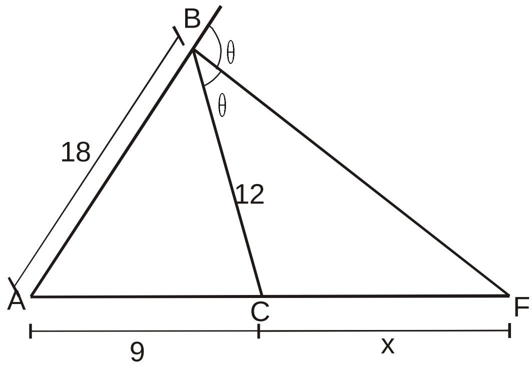
a) 37 b) 45 c) 53
d) 30 e) 60

08) En la figura. Calcular "x"



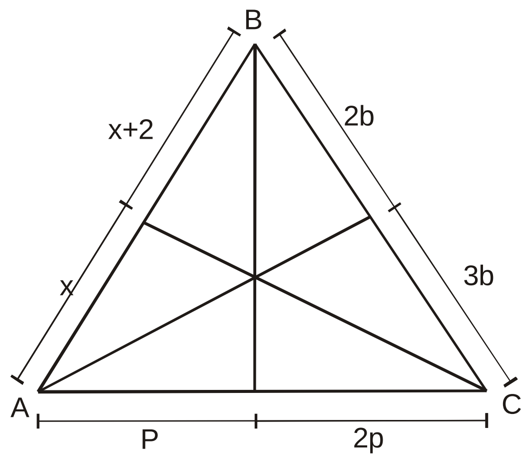
a) 3 b) 5 c) 6
d) 8 e) 10

09) En la figura, hallar el valor de "x"



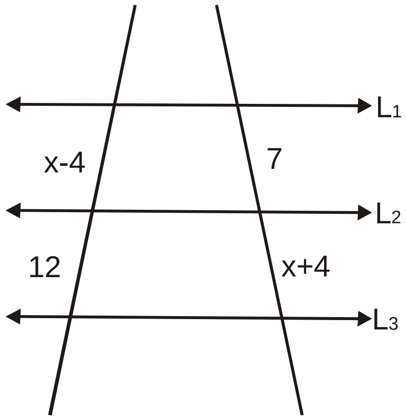
a) 12 b) 14 c) 10
d) 10 e) 18

10) Del gráfico adjunto, calcular "x"



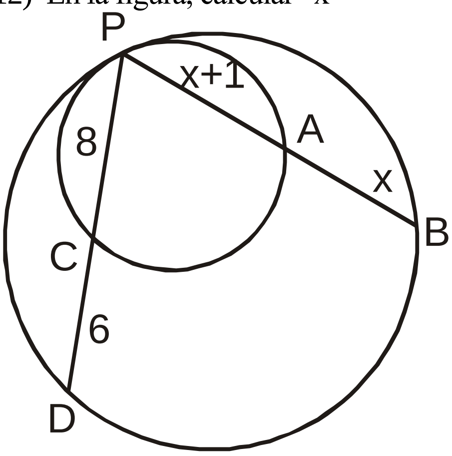
a) 3 b) 4
c) 5 d) 6
e) 7

11) Calcular "x", si $L_1 // L_2 // L_3$.



a) 7 b) 12
c) 8 d) 9
e) 10

12) En la figura, calcular "x"



a) 1 b) 2
c) 3 d) 4
e) 5

ÍNDICE

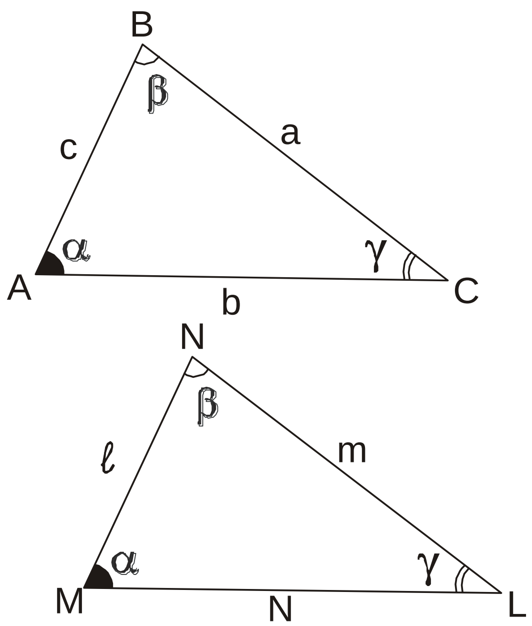
IV BIMESTRE

CAPÍTULO

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus ángulos respectivamente congruentes.

Si dos triángulos son semejantes, sus lados homólogos son proporcionales.



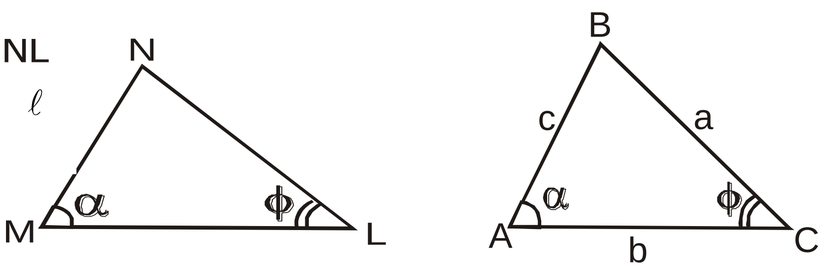
Si $\triangle ABC \sim \triangle MNL \rightarrow \dfrac{a}{m} = \dfrac{b}{n} = \dfrac{c}{\ell} = k$

k: Razón de semejanza.

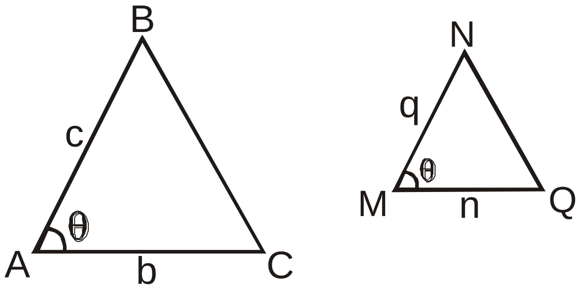
CASOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

1er Caso: (A.A)
Dos ángulos congruentes

$\Delta ABC \sim \Delta MNL$



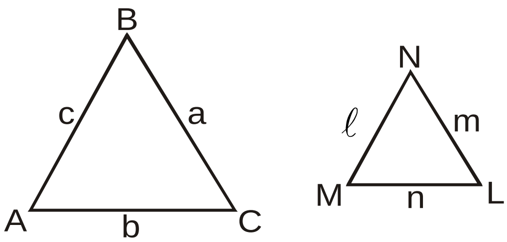
2do Caso: (L.A.L.)
Un ángulo congruente y los lados que lo forman son proporcionales.



Si $\dfrac{c}{b} = \dfrac{q}{n}$ y $m\sphericalangle A \cong m\sphericalangle M$

Entonces $\Delta ABC \sim \Delta MNQ$

3er Caso: (L.L.L.)
Tres lados proporcionales.



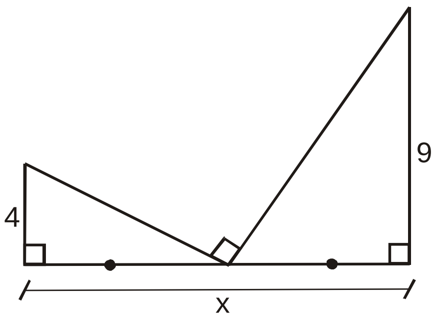
Si $\dfrac{a}{m} = \dfrac{b}{n} = \dfrac{c}{\ell}$

Entonces $\Delta ABC \sim \Delta MNL$

PROBLEMAS PARA LA CLASE

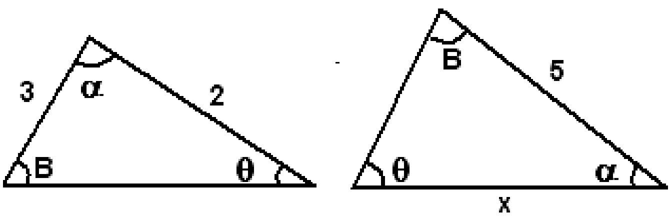
NIVEL I

01) En la figura, calcular "x"



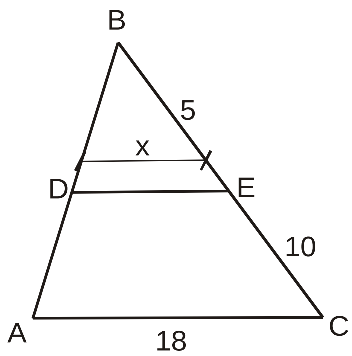
Rpta.:

02) Del gráfico hallar "x"



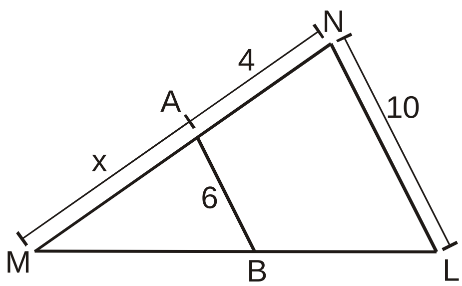
Rpta.:

03) $\overline{DE} // \overline{AC}$, hallar DE



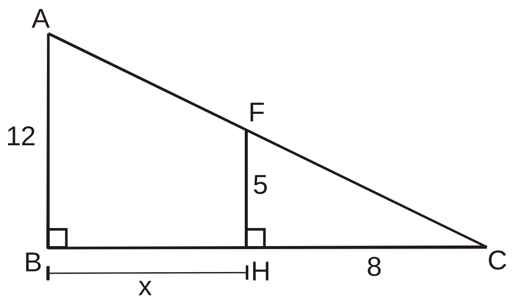
Rpta.:

04) $\overline{AB} // \overline{NL}$, hallar AM



Rpta.:

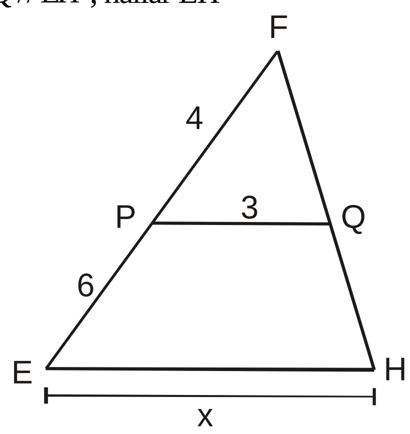
05) Hallar "BH"



Rpta.:

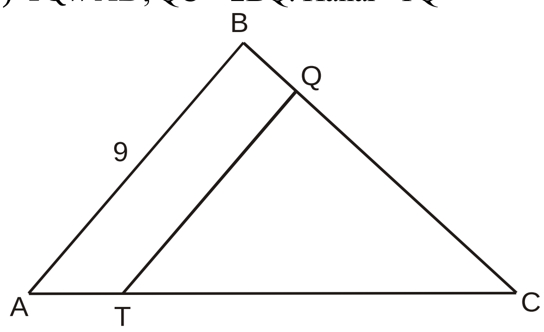
NIVEL II

06) $\overline{PQ} // \overline{EH}$, hallar EH



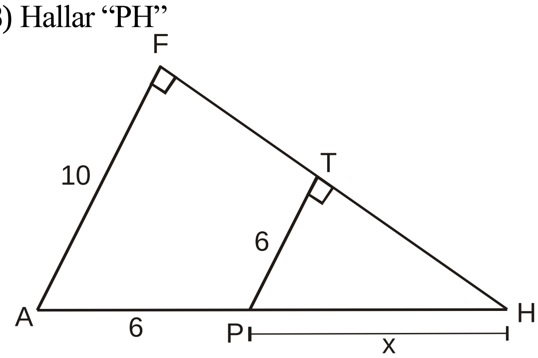
Rpta.:

07) $\overline{TQ} // \overline{AB}$, QC = 2BQ. Hallar "TQ"



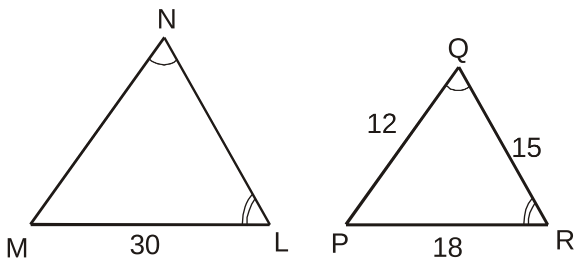
Rpta.:

08) Hallar "PH"



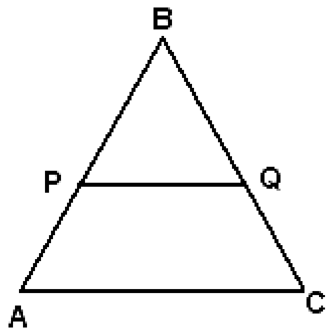
Rpta.:

09) ∢N ≅ ∢Q; ∢L ≅ ∢R. Hallar MN y NL



Rpta.:

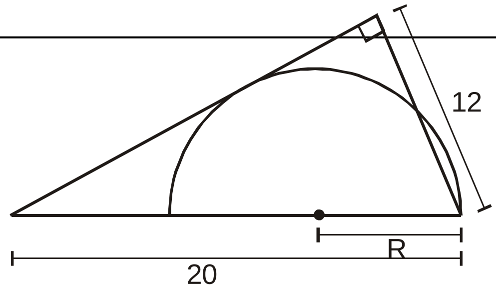
10) Del gráfico $\overline{PQ} // \overline{AC}$; 5BP=3AP; BQ=12; Calcular QC.



Rpta.:

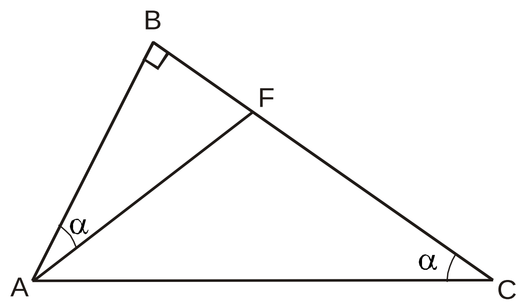
NIVEL III

11) En la semicircunferencia mostrada, calcular "R"



Rpta.:

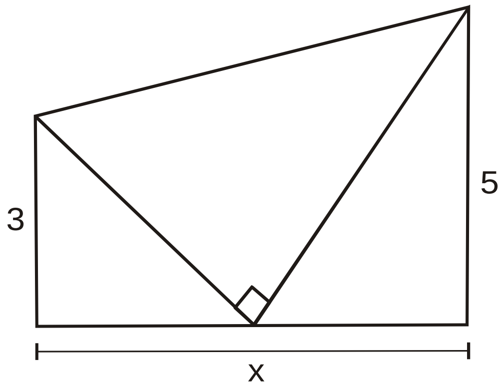
12) En la figura, calcular AB, si BF = 2 y FC = 7



Rpta.:

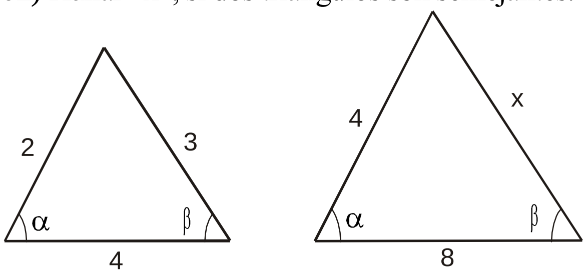
PROBLEMAS PARA LA CASA

01) Hallar "x



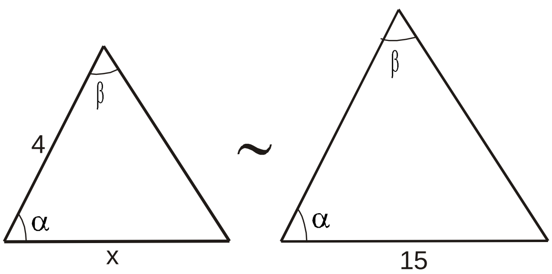
a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10

02) Hallar "x", si dos triángulos son semejantes.



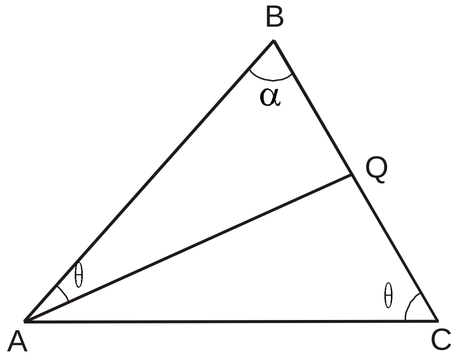
a) 3 b) 6 c) 9
d) 11 e) 13

03) Dos triángulos son semejantes; si la razón de semejanza es 2/3. Hallar "x" e "y"



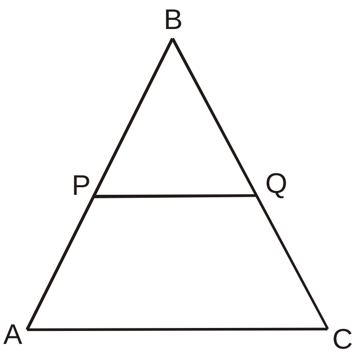
a) 6 y 10 b) 4 y 8 c) 10 y 15
d) 14 y 7 e) 8 y 9

04) En un triángulo ABC sobre BC se toma un punto "Q" tal que AB = 6 y BC = 9. Hallar BQ



a) 1 b) 2 c) 3 d) 4
e) 5

05) Hallar PQ, si BP = 2, PA = 6, AC = 12

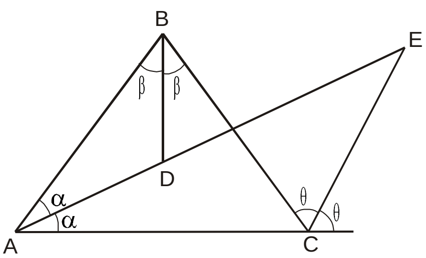


a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

06) Los lados de un triángulo miden 4; 7; 10 y el perímetro de otro triángulo semejante al primero es 147. hallar el lado menor del segundo triángulo.

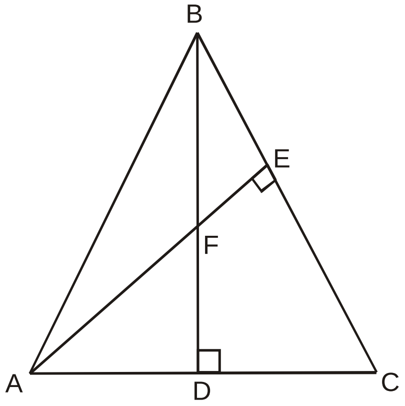
a) 24 b) 25 c) 26
d) 27 e) 28

07) Hallar AC, si AB = 10, AD = 4, DE =11



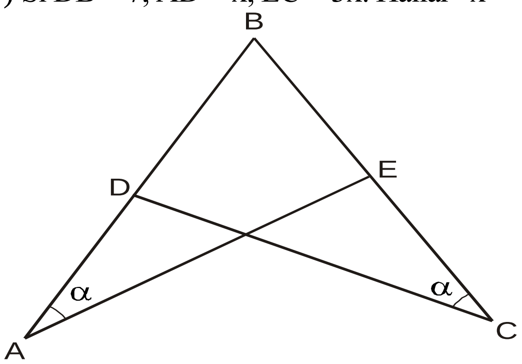
a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10

08) Encontrar DC, si AD = 5, FD = 4, BF = 6



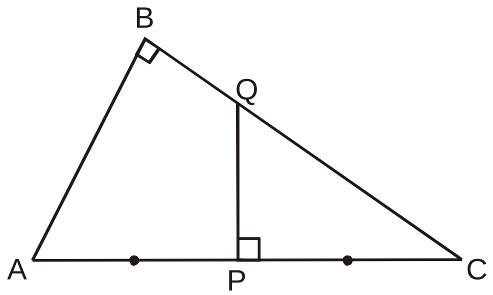
a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10

09) Si DB = 7, AD = x, EC = 3x. Hallar "x"



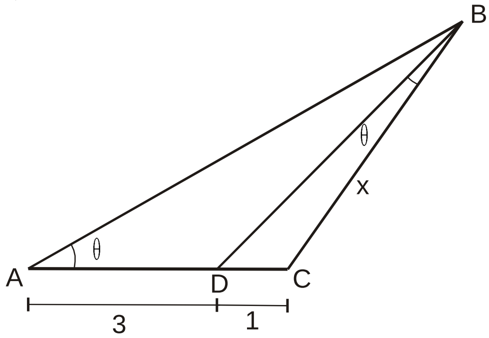
a) 1,2 b) 6,6
c) 4,2 d) 3,2
e) 1

10) Calcular PQ, si AB = 6, BC = 8, AC = 10



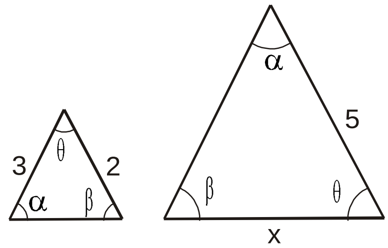
a) 3,7 b) 4,2 c) 3
d) 4 e) 5

11) Encontrar "x"



a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

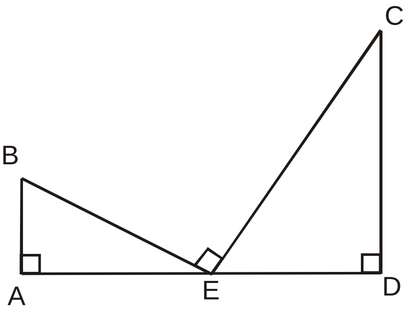
12) Hallar "x"



a) 1 b) 2 c) $\frac{10}{3}$

d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{5}{2}$

13) Calcular AD, si AB = 3, BE = 5, CE = 15



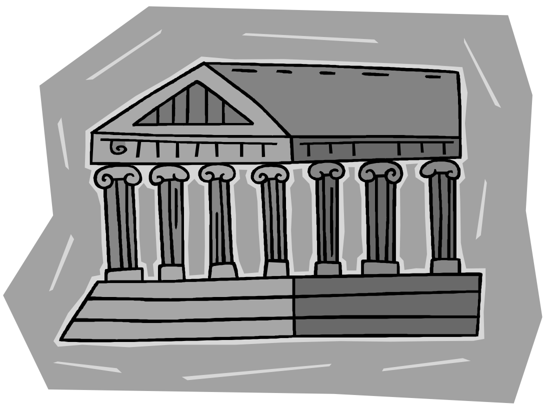
a) 11 b) 12
c) 13 d) 14
e) 15

Línea de Tiempo

c. 586 a.C.
Deportación a Babilonia del pueblo de Israel
En el 586 a.C., el rey babilónico Nabucodonosor II expulsó a los judíos de Palestina. Fueron deportados a Babilonia, donde permanecieron hasta el 538 a.C., en un periodo que constituyó el primer episodio de la diáspora judaica.

c. 586 a.C.
Destrucción de Jerusalén a manos de Nabucodonosor II
El rey Nabucodonosor, después de un asedio a la ciudad de Jerusalén de unos 16 meses, destruye la ciudad. Sedecías es capturado, llevado ante Nabucodonosor, obligado a presenciar la ejecución de sus hijos y después cegado, para más tarde ser enviado encadenado a Babilonia, donde estuvo encarcelado durante el resto de su vida.

mayo 28, c. 585 a.C.
Tales predice un eclipse
El filósofo griego Tales de Mileto predice el eclipse total de Sol que tiene lugar el 28 de mayo del 585 a.C., por lo que se hace famoso también por sus conocimientos de astronomía.



RELACIONES MÉTRICAS

A) RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

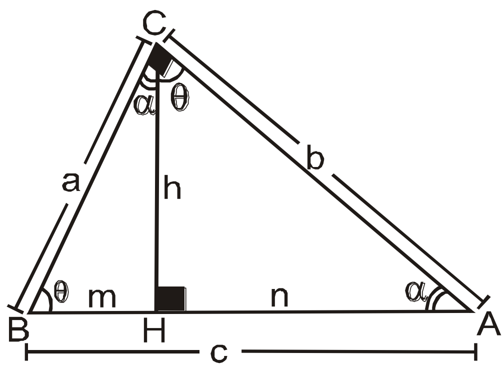
Elementos de un triángulo Rectángulo.

a y b = Son las longitudes de los catetos $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.
c = Es la longitud de la Hipotenusa $\overline{AB}$
h = Es la altura relativa a la Hipotenusa.
m = Es la longitud de la proyección del cateto $\overline{BC}$ sobre la hipotenusa.
n = Es la longitud de la proyección del cateto $\overline{AC}$ sobre la hipotenusa.

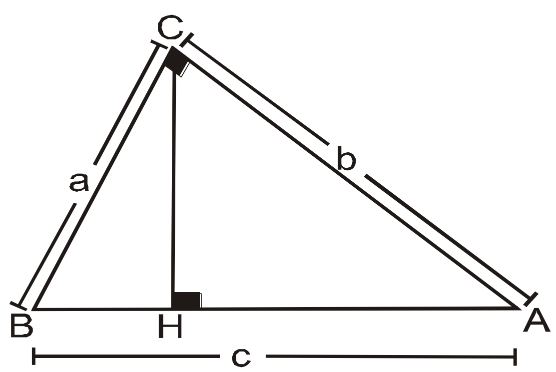
- Los siguientes teoremas nos describen las principales relaciones que hay entre las longitudes de los lados, altura y proyecciones de un triángulo rectángulo.

TEOREMA 1

"En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de un cateto es igual al producto de su proyección por la hipotenusa".
En la figura se cumple que: $\boxed{a^2 = m.\ c}$ $\boxed{b^2 = n\ .\ c}$

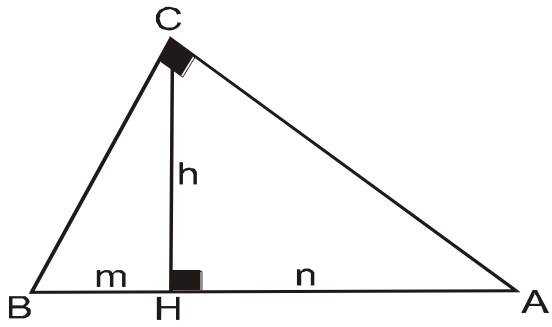


TEOREMA 2 (Teorema de Pitágoras)
"En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa".
En la figura se cumple que: $\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$ o $\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2}}$



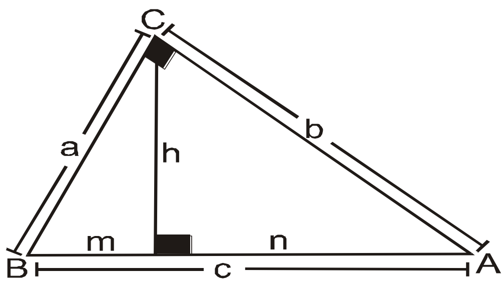
TEOREMA 3
"En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la misma".

En la figura se cumple que: $\boxed{h^2 = m \cdot n}$



TEOREMA 4
En todo triángulo rectángulo, el producto de catetos es igual al producto de la hipotenusa por su altura relativa.

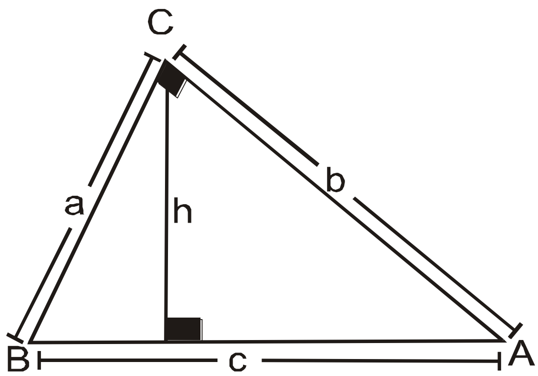
En la figura se cumple que: $\boxed{a \cdot b = c \cdot h}$



TEOREMA 5
"En todo triángulo rectángulo la suma de las inversas de los cuadrados de los catetos es igual a la inversa del cuadrado de la altura relativa a la hipotenusa".

En la figura se cumple que:

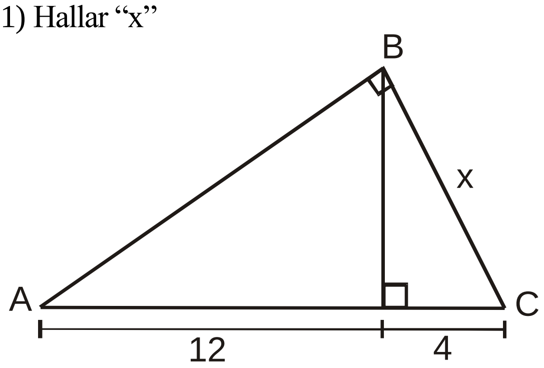
$$\boxed{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}}$$



PROBLEMAS PARA LA CLASE

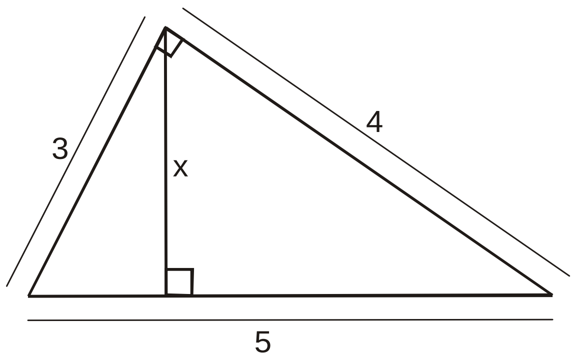
NIVEL I

01) Hallar "x"



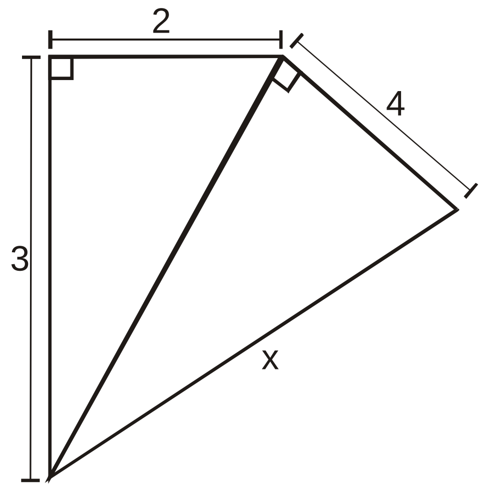
Rpta.:

02) Hallar "x"



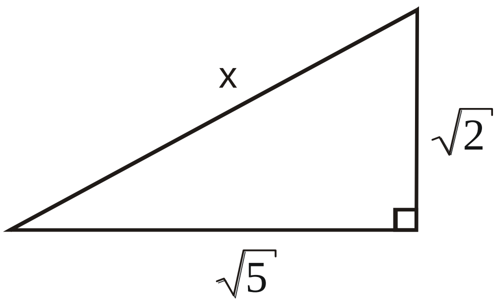
Rpta.:

03) Hallar "x"



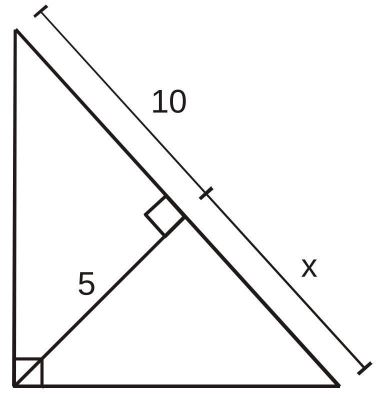
Rpta.:

04) Hallar "x"



Rpta.:

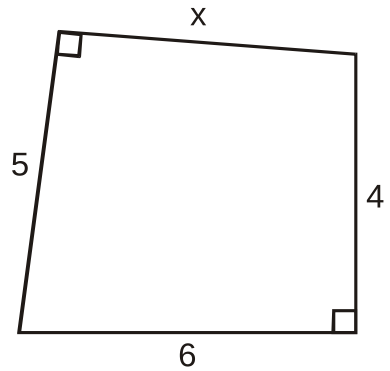
05) Hallar "x"



Rpta.:

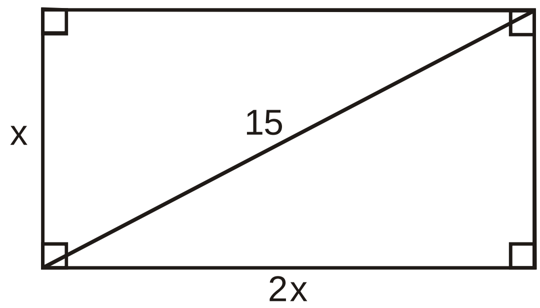
NIVEL II

06) Hallar "x"



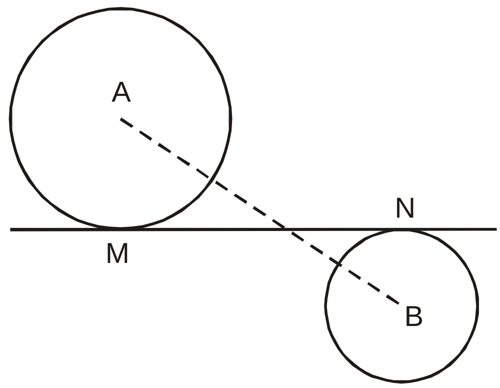
Rpta.:

07) Hallar "x"



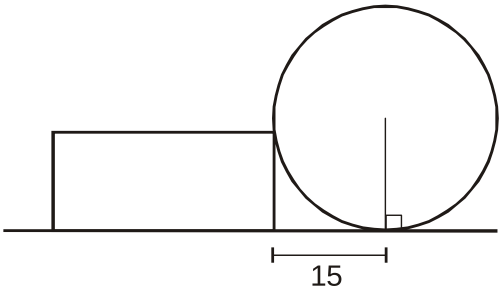
Rpta.:

08) Calcular $\overline{MN}$; si R = 3r; r = 1 y AB = 6



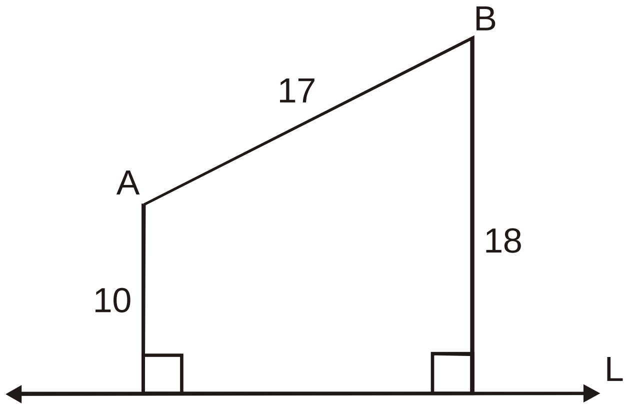
Rpta.:

09) La figura muestra una rueda apoyada en un ladrillo de altura 9, calcular el radio de le rueda.



Rpta.:

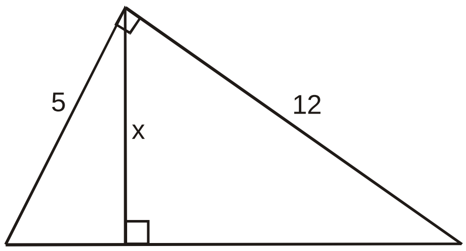
10) En la figura, se pide la proyección de $\overline{AB}$ sobre la recta "L"



Rpta.:

PROBLEMAS PARA LA CASA

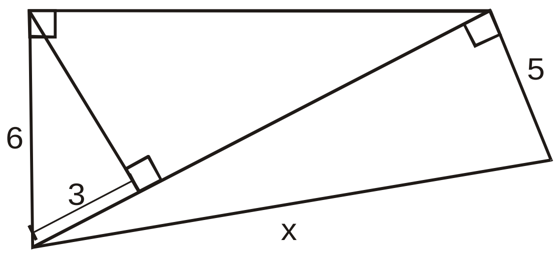
01) Hallar "x"



a) 1 b) 2 c) $\frac{13}{10}$

d) 5 e) $\frac{60}{13}$

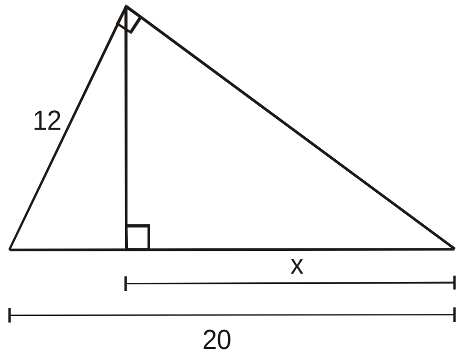
02) Hallar "x"



a) 3 d) 6 c) 9

d) 11 c) 13

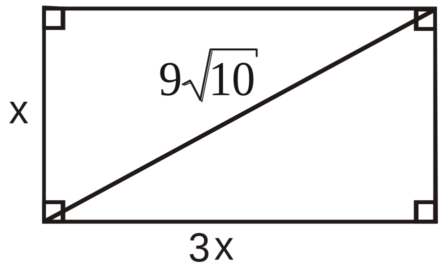
03) Hallar "x"



a) 11 d) 12 c) 12,8

d) 13 c) 14

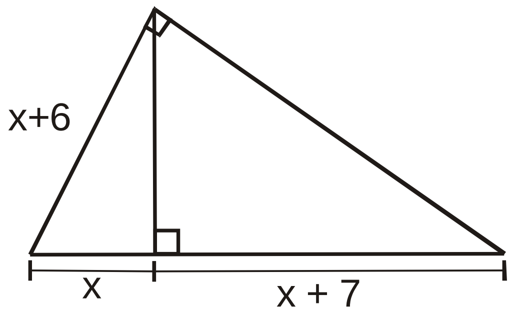
04) Hallar "x"



a) 5 b) 6 c) 7

d) 9 e) 11

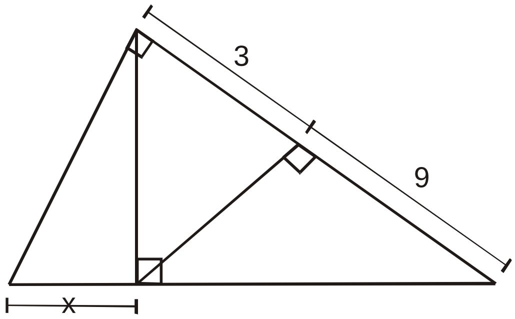
05) Hallar "x"



a) 3 b) 4 c) 5

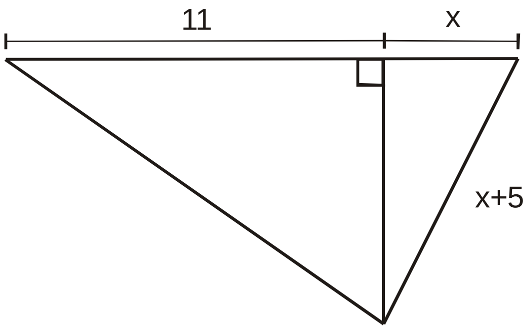
d) 6 e) 9

06) Hallar "x"



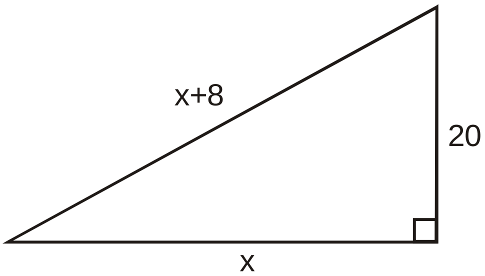
a) $\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{3}$
d) $4\sqrt{3}$ e) $5\sqrt{3}$

07) Hallar "x"



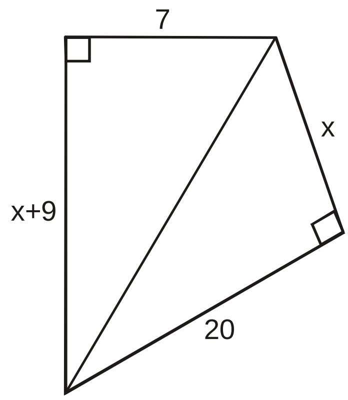
a) 20 b) 21 c) 22
d) 23 e) 25

08) Hallar "x"



a) 20 b) 21 c) 22
d) 23 e) 24

09) Hallar "x"

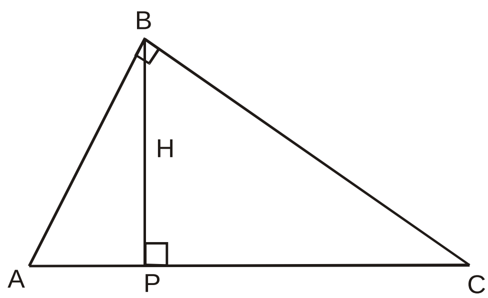


a) 11 b) 12 c) 13
d) 14 e) 15

10) Las diagonales de un rombo mide 12cm y 16cm el lado del rombo mide:

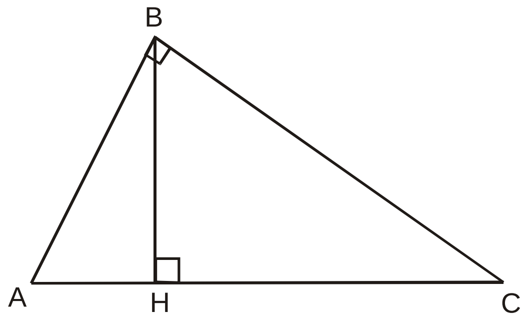
a) 9 b) 10 c) 11
d) 12 e) 13

11) Hallar "H", si AP = 4, PC = 9



a) 4 b) 5 c) 6
d) 7 e) 8

12) Calcular la altura BH del triángulo rectángulo ABC. Si AB = 6 y BC = 8



a) 8,4 b) 4,8 c) 2,8
d) 2,4 e) 4,7

13) Calcular la altura del trapecio ABCD (BC // AD) circunscrito a una circunferencia de centro "O". Si OC = 15 y OD = 20

a) 22 b) 25 c) 23
d) 26 e) 24

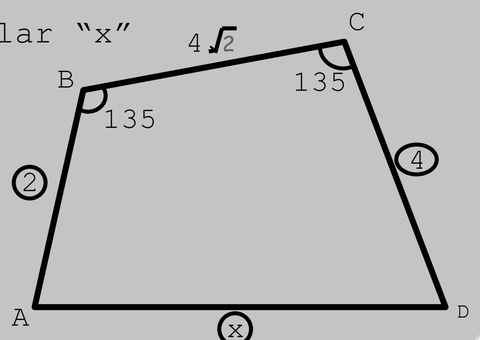
14) Si el lado de un cuadrado inscrito en una circunferencia mide 10. Hallar el perímetro del triángulo equilátero inscrito en la misma circunferencia.

a) $15\sqrt{6}$ b) $12\sqrt{6}$ c) 32
d) 35 e) 36

RETO DE LA SEMANA

15. Calcular "x"

a) 6
b) 8
c) 10
d) 12
e) 9



RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

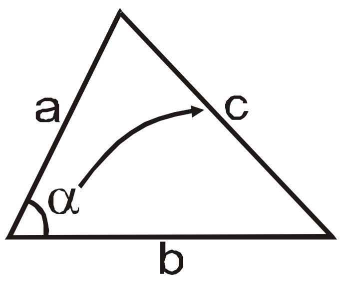
1) TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

Los triángulos que no son rectángulos, son oblicuángulos, luego un triángulo oblicuángulo puede ser acutángulo u obtusángulo.

2) COMO RECONOCER SI UN TRIÁNGULO ES ACUTÁNGULO U OBTUSÁNGULO

Se aplican las siguientes propiedades:

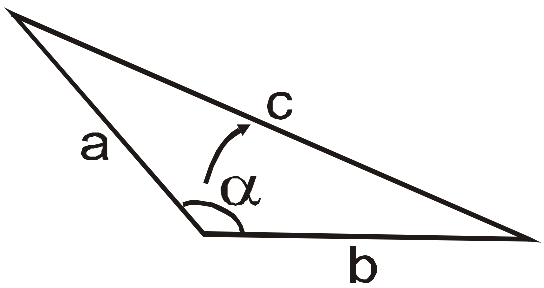
- **Es Acutángulo:** Si el cuadrado de un lado que se opone a un ángulo agudo siempre es **MENOR** que la suma de los cuadrados de los otros dos.



$$\boxed{\alpha < 90^o} \longrightarrow \boxed{c^2 < a^2 + b^2}$$

NOTA: Todos los ángulos del triángulo son menores que 90.

- **Es Obtusángulo:** Si el cuadrado de un lado que se opone a un ángulo obtuso siempre es **MAYOR** que la suma de los cuadrados de los otros dos.



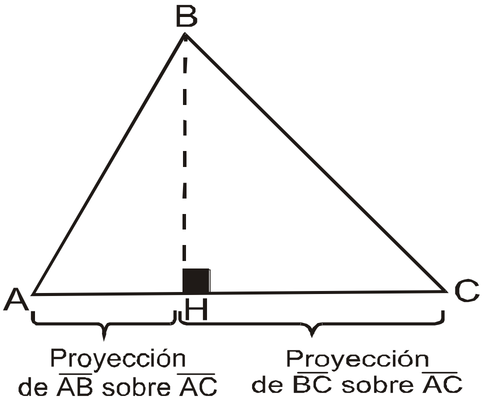
$$\boxed{\alpha > 90^o} \longrightarrow \boxed{c^2 > a^2 + b^2}$$

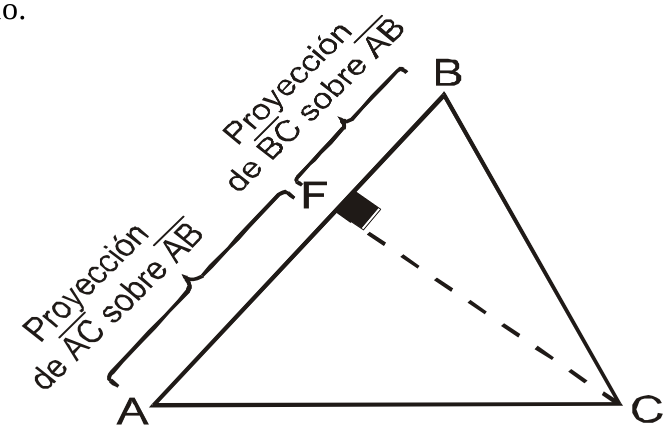
NOTA: Un ángulo de los tres ángulos del triángulo es mayor que 90.

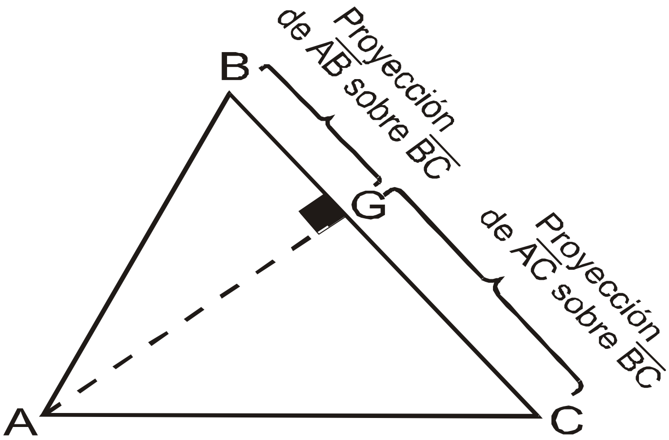
3) PROYECCIÓN DE UN LADO SOBRE OTRO LADO

En el triángulo es importante conocer la proyección de un lado sobre otro, para ello siempre se traza una altura.

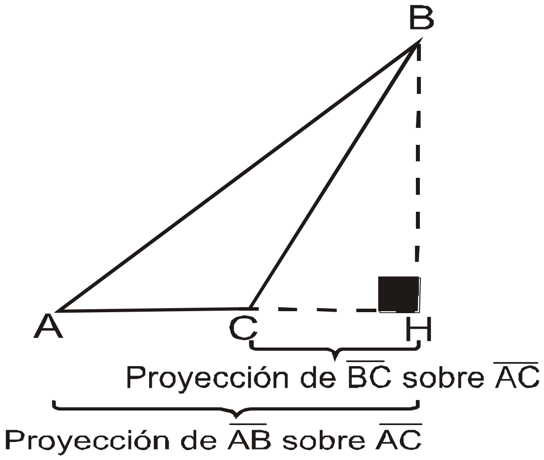
- **En el triángulo acutángulo**: En el triángulo acutángulo, la proyección de un lado sobre otro esta contenido en este último.

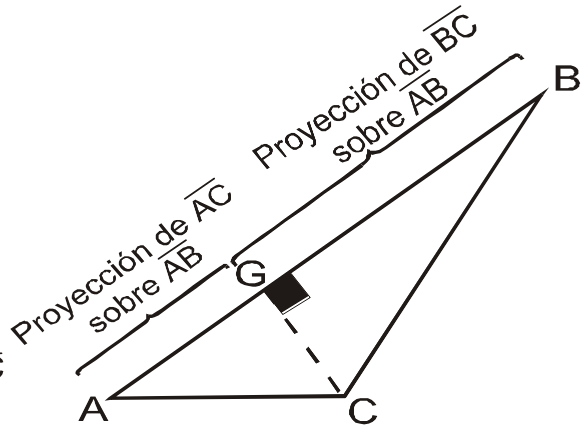






En el triángulo obtusángulo: En el triángulo obtusángulo, para encontrar la proyección de un lado sobre uno de los lados adyacentes al ángulo obtuso, se debe prolongar este último.





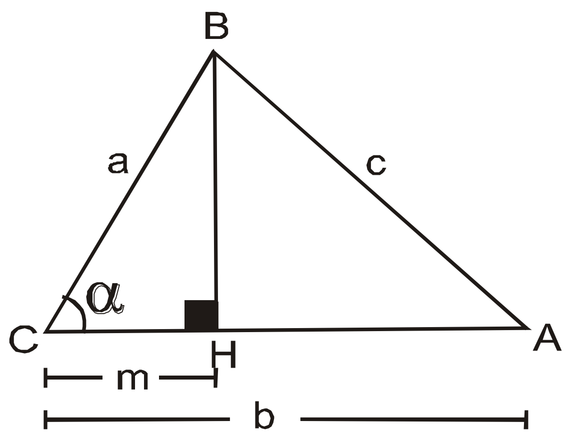
4) TEOREMA DE EUCLIDES

TEOREMA 1

"En todo triángulo, el cuadrado de un lado que se opone a un ángulo Agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre aquel".

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2bm}$$

Si: ∀ < 90º

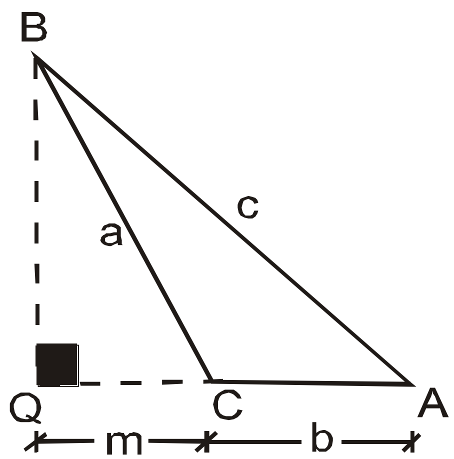


TEOREMA 2

"En todo triángulo, el cuadrado del lado que se opone a un ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, más el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre aquel"

Si ∀ > 90º

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 + 2bm}$$



5) TEOREMA DE LA MEDIANA

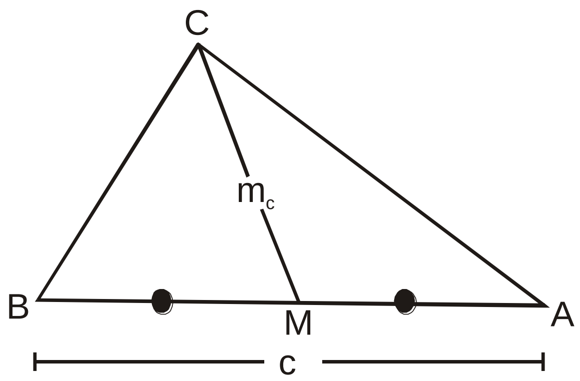
"En todo triángulo la suma de los cuadrados de los lados laterales a una mediana es igual al doble del cuadrado de la mediana más la mitad del cuadrado del lado donde cae la mediana".

Así en la figura:

"m_C" → es la mediana relativa al lado "c".

Entonces:

$$\boxed{a^2 + b^2 = 2m_C^2 + \frac{c^2}{2}}$$

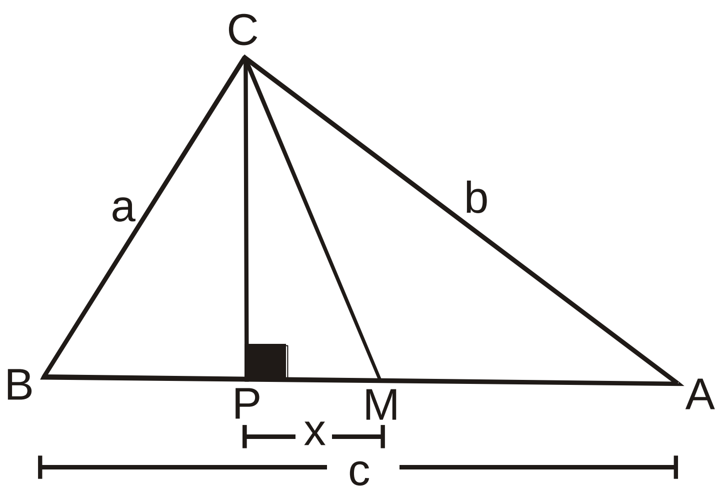


TEOREMA DE LA PROYECCIÓN DE LA MEDIANA

En todo triángulo, se cumple lo siguiente:

Si "x" es la proyección de la mediana $\overline{CM}$, entonces:

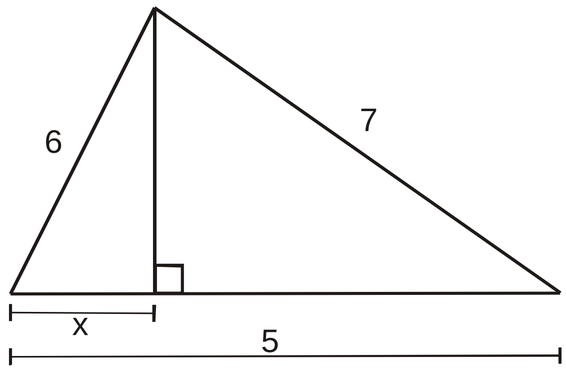
$$\boxed{x = \frac{b^2 - a^2}{2c}}$$



PROBLEMAS PARA LA CLASE

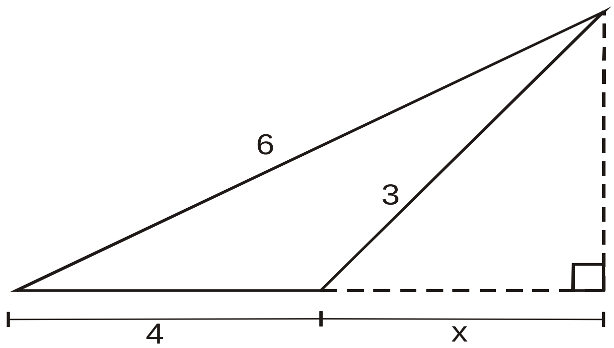
NIVEL I

01) Hallar "x"



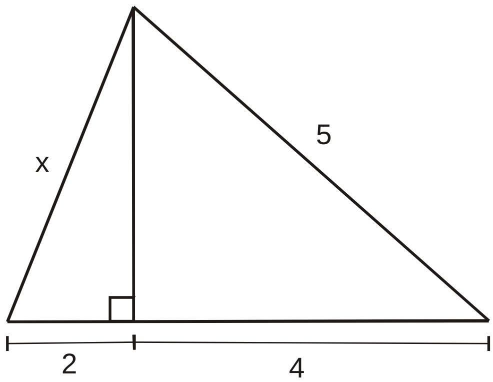
Rpta.:

02) Hallar "x"



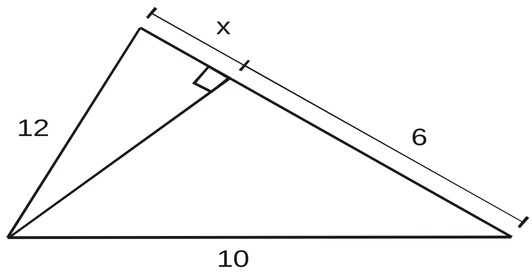
Rpta.:

03) Hallar "x"



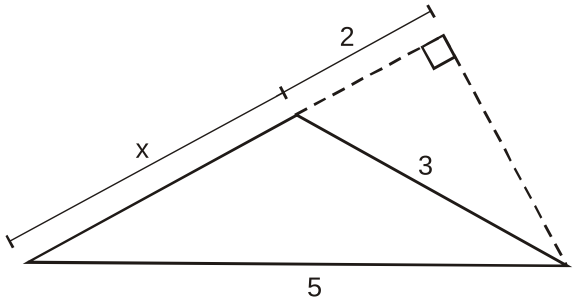
Rpta.:

04) Hallar "x"



Rpta.:

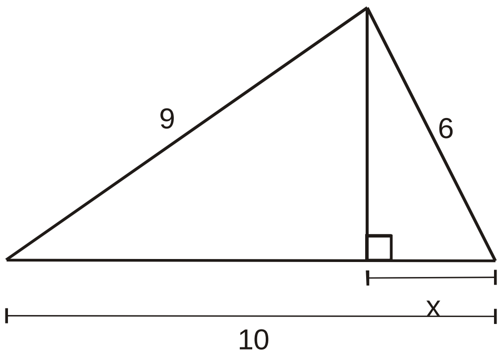
05) Hallar "x"



Rpta.:

NIVEL II

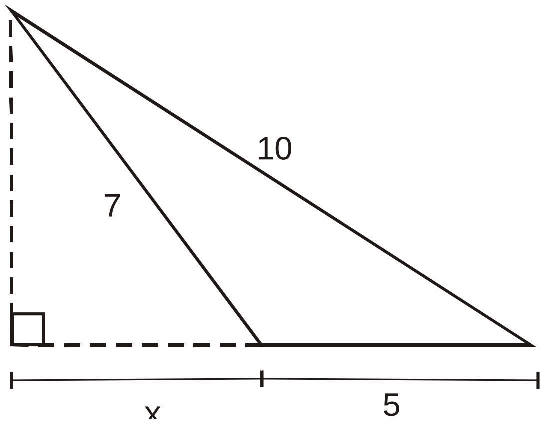
06) Hallar "x"



Rpta.:

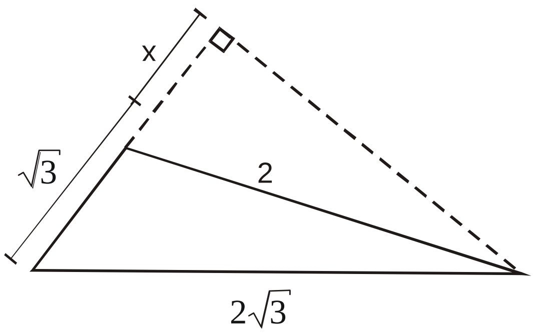
NIVEL III

07) Hallar "x"



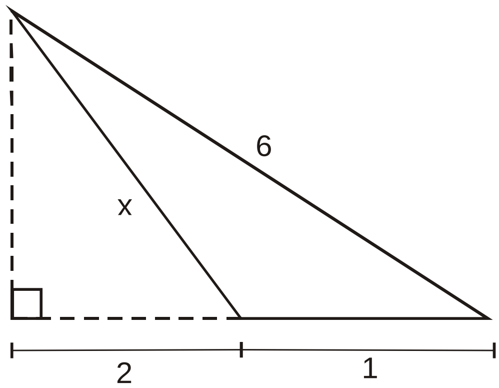
Rpta.:

08) Hallar "x"



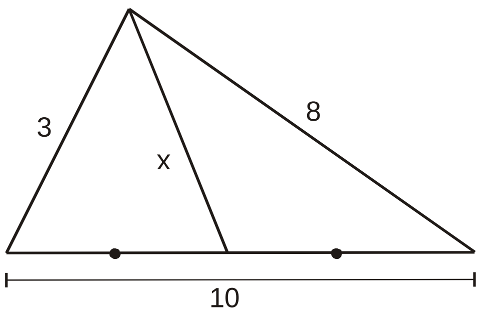
Rpta.:

09) Hallar "x"



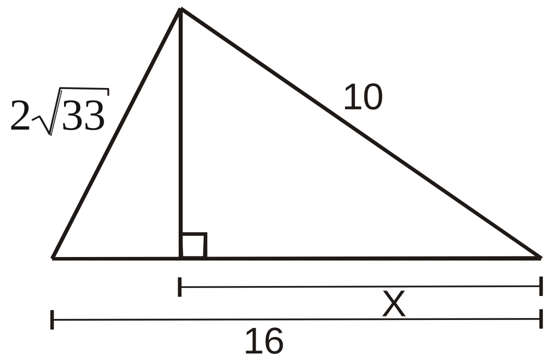
Rpta.:

10) Hallar "x"



Rpta.:

11) Hallar "x"



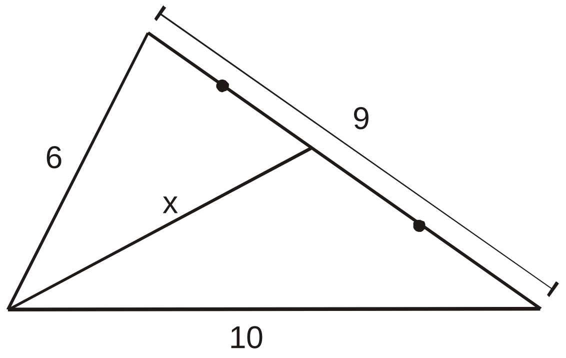
Rpta.:

12) Los lados de un triángulo miden 13, 14, 15 ¿Cuánto mide la altura relativa al lado medio?

Rpta.:

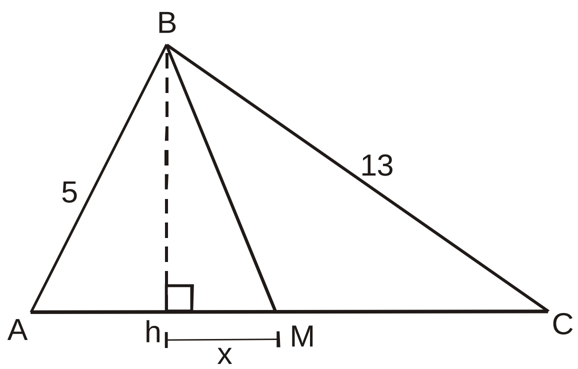
PROBLEMAS PARA LA CASA

01) Hallar "x"



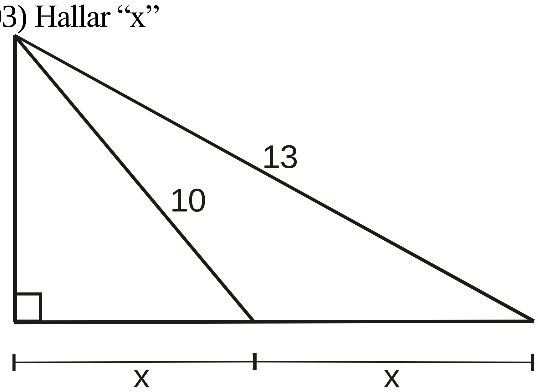
a) $\sqrt{61}$ b) $\sqrt{80}$ c) $\sqrt{\frac{30}{11}}$
d) $\sqrt{5}$ e) $\sqrt{\frac{191}{2}}$

02) $\overline{BM}$ es mediana del triángulo ABC, hallar "x"



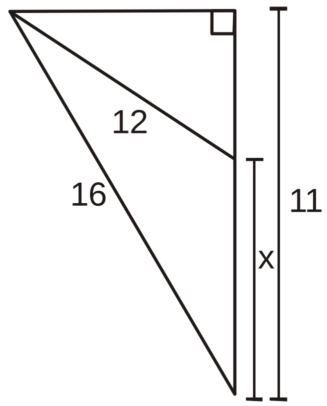
a) 1,2 b) 3,2 c) 4,6
d) 4,5 e) 4,8

03) Hallar "x"



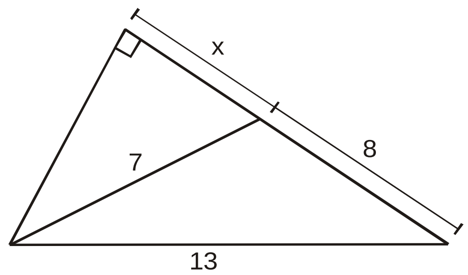
a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{21}$ c) $\sqrt{48}$
c) $\sqrt{27}$ e) $\sqrt{23}$

04) Hallar "x"



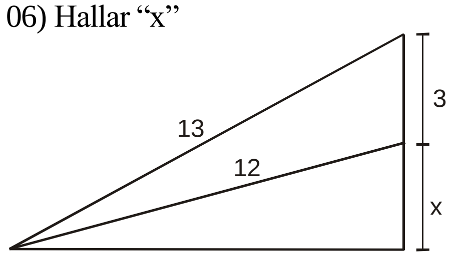
a) 2 b) 4 c) 6
d) 10 e) 8

05) Hallar "x"



a) 3,5 b) 2,5 c) 1,5
d) 4,5 e) 6,5

06) Hallar "x"



a) $\frac{8}{3}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{5}{4}$ d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{1}{2}$