



Altura arbre pitagòric.

El creixement d'un arbre de Pitàgores té el patró següent:

En el primer any, l'arbre creix el seu tronc, que és un quadrat.

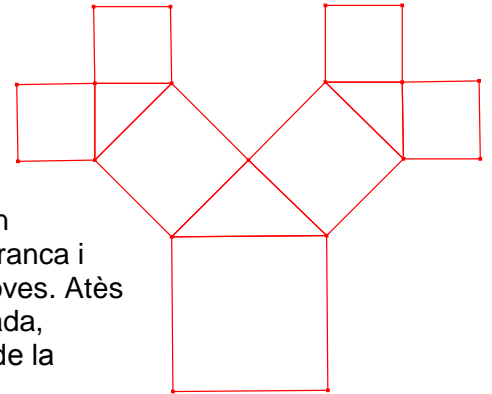
En el segon any, un vèrtex d'un triangle rectangle i isòsceles creix a la part superior, tal que la hipotenusa és la part superior del quadrat, i llavors les dues primeres branques,

també de forma quadrada, creixen des dels catets del triangle.

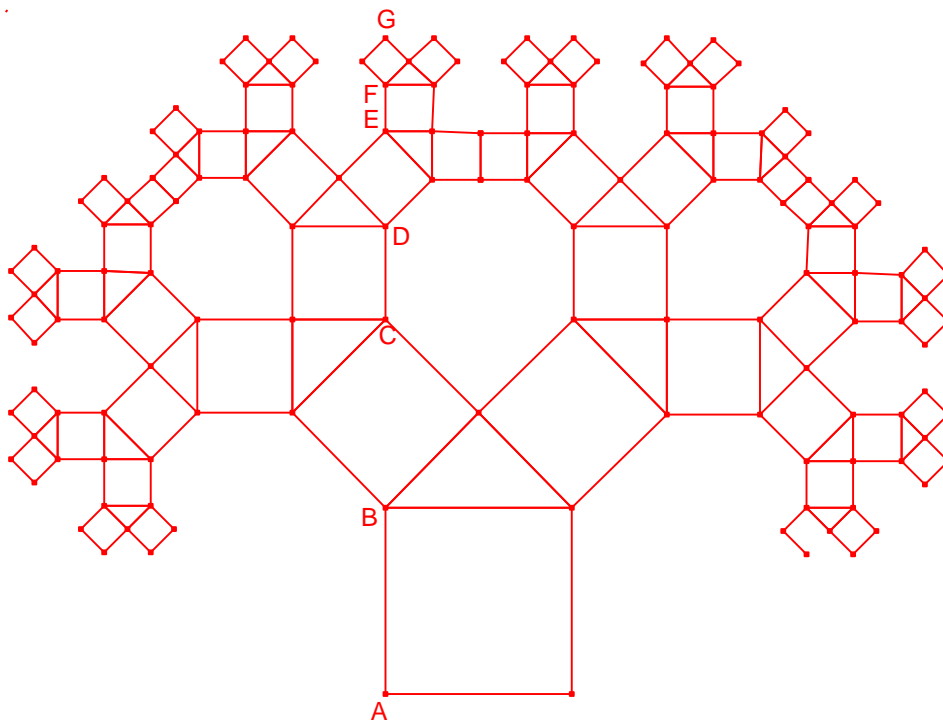
Llavors aquest patró es repeteix cada any, és a dir, un triangle rectangle isòsceles creix en la part superior de cada branca i les seues bases creixen dues branques de forma quadrada noves.

Atès que el tronc (és a dir, el primer quadrat) és de 1 metre d'amplada, calculeu l'altura de l'arbre al final de 4 anys i 16 anys. L'arbre de la imatge té tres anys.

Generalitzeu el resultat.



Solució:



Hem dibuixat l'arbre amb 6 anys de vida.

L'altura al cap de quatre anys de vida és igual a la mesura del segment \overline{AE} .

Les longituds que creix l'arbre cada anys és:

\overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DE} , \overline{EF} , \overline{FG} ,

$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \dots$

Siga $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ els anys transcorreguts.

L'altura de l'arbre pitagòric a cada any és:

$$H_{2n-1} = 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{1}{2^{n-1}} \cdot H_{2n} = 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$H_4 = 2\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3\text{m}$$

$$H_{16} = H_{2 \cdot 8} = 2\left(\sum_{x=1}^8 \frac{1}{2^{x-1}}\right)$$

Utilitzarem la funció de sumatoris de la calculadora Casio 991 classwiz, per calcular l'altura al cap de 16 anys:

2 \times SHIFT Σ 1 ∇ 2 x^{\square} x - 1 \blacktriangleright \blacktriangleright \blacktriangleright 1 \blacktriangleright 8 \equiv S+D

$$2 \times \sum_{x=1}^8 \left(\frac{1}{2^{x-1}} \right)$$

$$2 \times \sum_{x=1}^8 \left(\frac{1}{2^{x-1}} \right) = \frac{255}{64}$$

$$2 \times \sum_{x=1}^8 \left(\frac{1}{2^{x-1}} \right) = 3.984375$$

L'altura aproximada és 3.98m.