Ein dynamischer Zugang zum Satz des Thales & Satz des Pythagoras

Hans-Jürgen Elschenbroich
7.1.2021

Agenda

Vorspann Thales

- GeoGebra Book **Satz des Thales**
  https://www.geogebra.org/m/**dvuxcvfe**

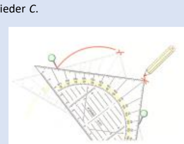
1. Der Satz des Thales im Schulbuch

- Typisch: Starre Formulierung, Fokussierung auf rechten Winkel.
- „Im Kreise ist der Winkel im Halbkreis ein Rechter“. (Euklid, Drittes Buch § 31)
- „Den Kreis über dem Mittelpunkt einer Strecke $\overline{AB}$ nennt man Thales-Kreis. Wenn *C* auf dem Thaleskreis über der Strecke $\overline{AB}$ liegt, so hat das Dreieck *ABC* bei *C* einen rechten Winkel.“ (Lambacher-Schweizer 2013)
- Beweis: Typische Lehrer-Aktivität an der Tafel.

2. Handlungsorientierter Zugang

- **Aufgabe**

Stecke in geeignetem Abstand zwei Heftzwecke von unten durch ein dickes Blatt Papier.
Schiebe das Geodreieck ein und markiere den Eckpunkt *C*.
Verändere mehrfach die Lage des Geodreiecks und markiere wieder *C*.
Auf welcher Linie liegen wohl die markierten Punkte?
(Elschenbroich 2020a).

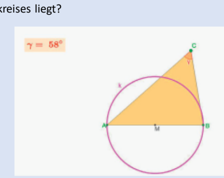


- Auch in Schulbüchern zu finden (Lambacher-Schweizer 2013).
- Achtung: Das führt genau genommen zum **Umkehrsatz**!

3. Dynamische Satzfindung

- Fixierung auf die Rechtwinkligkeit aufgeben!
- **Aufgabe**

a) Was stellst du für den Winkel γ fest, wenn *C* außerhalb des Thaleskreises liegt?
b) Was stellst du für γ fest, wenn *C* innerhalb des Thaleskreises liegt?
c) Was passiert, wenn *C* auf dem Thaleskreis liegt?
(Elschenbroich 2020a)



- Drei Fälle, Thaleskreis als Grenzlinie. Satz des Thales als Spezialfall für $\gamma = 90°$, Verallgemeinerung qualitativ.
- Idee schon bei Euklid angelegt (!), aber in Vergessenheit geraten.

4. Dynamisierter Schulbuchbeweis

- **Aufgabe**

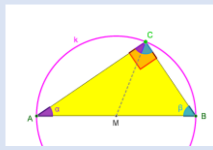
a) Was fällt dir bei den blau markierten, bei den lila markierten Winkeln auf? Warum muss das so sein?

b) Wie groß sind die blau und lila markierten Winkel zusammen?

c) Was folgt daraus für die Größe des Winkels *γ* bei *C*?

Eigentlich 1:1 Übertragung nach GeoGebra.

Aber: Beweis-Aktivitäten dann nicht mehr in Lehrerhand (Tafel), sondern in Schülerhand (Maus, Touchscreen)!



5. Umkehrsatz

- Handlungsorientierten Ansatz mit einem rechtwinkligen (Geo-) Dreieck aufgreifen.
- Spur-Modus von GeoGebra nutzen.

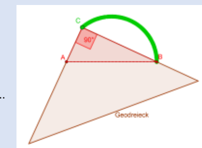
Aufgabe

a) Auf welcher Linie bewegt sich *C, wenn man daran zieht?*

b) Klicke auf die Schaltfläche *Spur zeigen* und ziehe an *C*. Hast du in a) richtig vermutet?

c) Konstruiere diese Linie mit den Konstruktionswerkzeugen. Ergänze den Satz: Wenn das Dreieck *ABC* bei *C einen rechten Winkel hat, dann …*

(Elschenbroich 2020a)



6. Verallgemeinerung

- Allgemeine Aussage mit 3 Fällen: (innerhalb, außerhalb, auf dem Thaleskreis). Qualitative Erkenntnis.
- Welche Linien erhalten wir, wenn wir zwischen *A* und *B* spitzwinklige bzw. stumpfwinklige Dreiecke bewegen?
- Der Umfangswinkelsatz präzisiert das in einer quantitativen Aussage (Elschenbroich & Seebach 2011).

Vorspann Pythagoras

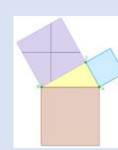
- GeoGebra Book **Satz des Pythagoras**
  https://www.geogebra.org/m/**xrvx5p99**

7. Der Satz des Pythagoras im Schulbuch

- Typisch: Starre Formulierung, Fokussierung auf rechten Winkel.
- „Am rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite den Quadraten über der den rechten Winkel umfassenden Seiten zusammen gleich.“ (Euklid, Erstes Buch, § 47)
- Euklids Beweis: Scherungen.
- „Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist mit den Katheten *a* und *b* und der Hypotenuse *c*, dann gilt $a^2 + b^2 = c^2$. (Lambacher-Schweizer 2013b)
- LS-Beweis: Flächenzerlegung und Flächenvergleich (‚Puzzle‘).

8. Handlungsorientierter Zugang

- Flächenzerlegungen (‚Puzzles‘)
  z. B. Perigal Zerlegung.
  Kopiervorlage, Schere und Klebestift.

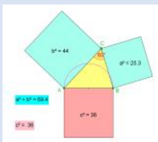


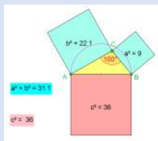
- Alt-ägyptische Seilspanner (Harpedonapten). 3-4-5-Regel. Führt genau genommen zum Umkehrsatz.

Beispiel:
Schon vor mehr als 3000 Jahren wurden in Ägypten bei der Landvermessung rechte Winkel von sogenannten Seilspannern wie in Fig. 162.1 hergestellt. An einem geschlossenen Seil sind in gleichen Abständen 12 Knoten angebracht. Wird das Seil wie in Fig. 162.1 gespannt, so ist das entstehende Dreieck wegen
$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
bei C rechtwinklig.

9. Dynamische Satzfindung (1)

- Fixierung auf die Rechtwinkligkeit aufgeben: beliebiges γ.
  Propädeutischer Ansatz: Beim Flächenvergleich nur qualitativ (größer, kleiner, gleich) argumentieren!





9. Dynamische Satzfindung (2)

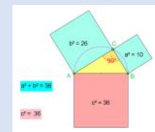
- **Aufgabe**

Zu einem beliebigen Dreieck *ABC* sind die Quadrate über den Seiten eingezeichnet.
Ziehe an *C* und vergleiche $a^2 + b^2$ mit c^2.

a) Was stellst du fest, wenn *C* außerhalb des Thales-Kreises liegt, also γ spitzwinklig ist?
b) Was stellst du für γ fest, wenn *C* innerhalb des Thales-Kreises liegt, also γ stumpfwinklig ist?
c) Was passiert, wenn *C* auf dem Thales-Kreis liegt, wenn γ also rechtwinklig ist?

(Elschenbroich 2020b)

- Drei Fälle, Thaleskreis als Grenzlinie.
  Satz des Pythagoras als Spezialfall für $\gamma = 90°$,
  Verallgemeinerung qualitativ.



10. Dynamisierter Schulbuchbeweis

- Klassischer Scherungsbeweis heute nicht mehr schulüblich.
- Option: Zerlegungsbeweise oder Ähnlichkeitsbeweise.
- **Aufgabe**

Jetzt betrachten wir nur noch Dreiecke mit einem rechten Winkel bei *C*. Die Höhe *h* von *C* auf die Seite *c* zerteilt das Dreieck *ABC* in zwei rechtwinklige Teildreiecke, die Seite *c* in zwei Teilstrecken *p* und *q* und c^2 in zwei Teilrechtecke.

a) Ziehe an *C* und beobachte die Veränderung der Flächen.
Was stellst du fest?
b) Begründe: Warum sind die Teildreiecke ähnlich zum Dreieck *ABC*?
c) Begründe: $a^2 = q \cdot c$ und $b^2 = p \cdot c$.
d) Wieso folgt daraus der Satz des Pythagoras?

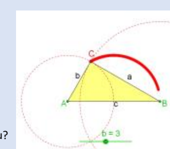
(Elschenbroich 2020b. Siehe auch Euklid, Sechstes Buch § 8)

11. Umkehrsatz

- Handlungsorientierten Ansatz vom Satz des Thales mit einem rechtwinkligen Dreieck aufgreifen.
- Spur-Modus nutzen
- **Aufgabe**

Das Dreieck *ABC* ist so konstruiert, dass immer $a^2 + b^2 = c^2$ ist.
Hier kann die Seitenlange *b* verändert werden und es ist $a = \sqrt{c^2 - a^2}$.
Verändere b am Schieberegler und beobachte.

a) Wie groß ist der Winkel γ bei *c*?
b) Lasse *C* eine Spur (oder Ortslinie) zeichnen. Welche Linie erhältst du?
c) Ergänze den Satz: Wenn $a^2 + b^2 = c^2$ ist, dann ...



12. Verallgemeinerung

- Verallgemeinerung in 3 Fällen: Qualitative Erkenntnis (offensichtlich).
- Wenn man die qualitative Aussage quantitativ fassen will, kommt man zum Cosinussatz.
- Ansatz: Was ist im spitzwinkligen Fall gegenüber dem rechtwinkligen Fall bei *a* und *b* bzw. a^2 und b^2 ‚zuviel'?
  (Elschenbroich & Seebach 2013).
- Auch schon in der Sek I machbar ohne Skalarprodukt!

13. Didaktische Aspekte

- Dynamisierung durch Weglassen von Bedingungen ($\gamma = 90°$)
- Unterscheidung Satzfindung – Satzbeweis
- Unterschied Satz – Umkehrsatz
- Lokale Vernetzung (hier: Thales und Pythagoras)
- Dynamisierung ermöglicht Verallgemeinerung
- Kognitive Aktivierung: Verbindung mit Handlungsorientierung, Erhöhung der Schüleraktivität durch dynamische Arbeitsblätter
- Dokumentation digitaler Aktivitäten wichtig
- Verbindung Digitale Werkzeuge – analoge Werkzeuge
- Dynamische Visualisierung (Zugmodus, Schieberegler, Spur) & Systematische Variation (siehe Heintz, Elschenbroich et al., 2017)

Literatur

- Euklid: Die Elemente. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Band 235. Verlag Harri Deutsch
- Elschenbroich, H.-J. (2020b): Den Satz des Pythagoras entdecken. In: digital unterrichten MATHEMATIK 7/2020
- Elschenbroich, H.-J. (2020a): Den Satz des Thales entdecken. In: digital unterrichten MATHEMATIK 5/2020
- Elschenbroich, H.-J. & Seebach, G. (2013): Geometrie entdecken! Mit GeoGebra. Teil 3. Mastertool (vormals coTec)
- Elschenbroich, H.-J. & Seebach, G. (2011): Geometrie entdecken! Mit GeoGebra. Teil 2. Mastertool (vormals coTec)
- Heintz, Elschenbroich et al. (2017): Werkzeugkompetenzen. Kompetent mit digitalen Werkzeugen Mathematik betreiben. MNU, Verlag Medienstatt.
- Lambacher-Schweizer (2013b). LS 9. Klett Verlag
- Lambacher-Schweizer (2013a). LS 7. Klett Verlag
- Lambacher-Schweizer (1996). LS 9. Klett Verlag
- Lambacher-Schweizer (1990). Geometrie Eins. Klett Verlag

Kontakt

elschenbroich@t-online.de