

Teoría – Tema 5

Teoría - 9 - Grado numerador mayor o igual que grado del denominador

Grado del numerador $P(x)$ mayor o igual que Grado del denominador $Q(x)$

Si dividimos el polinomio $P(x)$ entre $Q(x)$, obtenemos un cociente $C(x)$ y un resto $R(x)$.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Si la división es exacta, el resto es cero $\rightarrow R(x)=0 \rightarrow$ La integral de la división de polinomios queda reducida a la integral de un polinomio $C(x)$, que es inmediata.

Si la división no es exacta $\rightarrow R(x) \neq 0 \rightarrow$ La integral de la división de polinomios queda reducida a la integral de un polinomio $C(x)$ más la integral del cociente $\frac{R(x)}{Q(x)}$. Y el grado del resto $R(x)$ es

menor que el grado de $Q(x)$, por lo que estaremos ante uno de los casos desarrollados en el apartado anterior: división de polinomios con grado en el numerador menor que el grado en el denominador.

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1 resuelto

$$\int \frac{x^3+3}{x^2-1} dx \rightarrow \text{Hacemos la división de polinomios}$$

Dividendo (numerador) $\rightarrow x^3+3$

Divisor (denominador) $\rightarrow x^2-1$

$$\begin{array}{r} x^3+3 \\ -x^3+x \\ \hline x+3 \end{array} \quad \begin{array}{l} | \\ x^2-1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ x \end{array}$$

Cociente $\rightarrow x$

Resto $\rightarrow x+3$

$$\frac{x^3+3}{x^2-1} = x + \frac{x+3}{x^2-1} \rightarrow \int \frac{x^3+3}{x^2-1} dx = \int \left(x + \frac{x+3}{x^2-1}\right) dx = \int x dx + \int \frac{x+3}{x^2-1} dx$$

Es decir, hemos convertido la integral de partida en la suma de dos integrales (una polinómica y otra un cociente de polinomios, con el grado del numerador menor que el grado del denominador).

$$\int x dx + \int \frac{x+3}{x^2-1} dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x+3}{(x+1)(x-1)} dx$$

Aplicamos el método de los coeficientes indeterminados.

$$\frac{x+3}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \rightarrow x+3 = A(x-1) + B(x+1)$$

$$\text{si } x=1 \rightarrow 4=2B \rightarrow B=2$$

$$\text{si } x=-1 \rightarrow 2=-2A \rightarrow A=-1$$

$$\frac{x^2}{2} + \int \frac{x+3}{(x+1)(x-1)} dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{-1}{x+1} dx + \int \frac{2}{x-1} dx = \frac{x^2}{2} - \ln|x+1| + 2\ln|x-1| + C$$