

# GEOMETRIA AMB BOMBOLLES DE SABÓ

**Anton Aubanell Pou**

**Yo amo los mundos sutiles,  
ingrávidos y gentiles  
como pompas de jabón.**

Antonio Machado.

Espero que d'aquí a una estona, vosaltres també els estimeu... però no tan sols per raons estètiques o lúdiques sinó també perquè descobrim que darrera d'aquestes innocents i divertides figures s'hi amaga un formidable entramat matemàtic que pot aprofitar-se com a eina didàctica en diversos nivells. En aquestes activitats convergeixen dos aspectes especialment importants:

- **Els components recreatius, lúdics, divertits,...** que ofereixen un gran efecte motivador. Els experiments a classe de matemàtiques no són una moda més o menys recent sinó que entronquen amb una línia didàctica de la qual a casa nostra podem trobar brillants exemples.
- **La constatació de les possibilitats que ofereix la Matemàtica per explicar, descriure i predir fenòmens naturals.** És un bon àmbit per tal que els nostres alumnes s'apropin al poder modelitzador de les matemàtiques i compreguin millor les paraules de Galileo: *“El llibre de la naturalesa està escrit amb els caràcters de la geometria”*.

Fer geometria amb bombolles de sabó té un encant especial: l'encant de la incertesa! És una geometria aventurera i una mica trapella, a més de mullada.

Es tracta d'una geometria meravellosa però efímera! De fet això ja passa. Sovint les coses belles són efímeres: el vol d'una papallona, una flor, una mirada càlida, una posta de sol,....

## **Precedents**

En Dumbo que va aprendre a volar fent bombolles de sabó,... amb alguna cosa més. I el Pokémon Squirtle que es defensa amb el perillós “raig bombolla”.

Des del punt de vista científic cal citar els treballs del físic belga Joseph A. F. Plateau (1801-1883). Una curiositat: a l'any 1843 va perdre la vista degut a l'observació directa d'un eclipsi.

Els matemàtics Richard Courant i Herbert Robbins dediquen a la geometria de les bombolles de sabó quasi un capítol del seu famós llibre “¿Qué es la Matemática?” (1941).

Les experiències amb bombolles de sabó estan presents en diversos museus de la Ciència: Barcelona, Madrid, la Villette de París,...

Llibre de C.V. Boys. Science Saturday Morning.

Des de la perspectiva més didàctica cal citar el llibre “Ciencia Recreativa” de Josep Estalella, publicat a principis del segle passat i on ja descriu experiències amb bombolles de sabó per portar a l'escola.

## **Materials necessaris i breu descripció de l'experiment**

Partirem de diversos elements:

- El líquid format per aigua (50%), sabó (40%) i glicerina (10%). Convé ajustar una mica les proporcions per tempteig.

- Estructures planes.
- Estructures polièdriques.

Podeu fer-vos-les amb fil de coure o palletes de beure! però és bo que no sobrepassin els 10-12 cm de diàmetre.

- Segons l'experiència que vulguem fer usarem altres elements: palletes de beure, trossos de fil, tabac,...

L'experiment s'inicia submergint una estructura a la mescla..... *"al retirarlo se obtendrán bellísimas combinaciones de láminas líquidas planas e irisadas que se cortarán según rectas de exquisita finura. Rompiéndose algunas láminas para destruir el trabazón del conjunto se obtendrán interesantes superficies alabeadas"* (Josep Estalella, 1918).

A partir de les figures inicials n'obtidrem d'altres trencant làmines, *semblant* bombolles, inflant-les,.....

Per què surt això?

## Fonament físic

Els **líquids** presenten una tendència a reduir la superfície exterior que mostren ja que la mínima superfície correspon al menor valor possible de l'energia potencial deguda a la tensió superficial. Així doncs, si un volum de líquid es deixa lliure a l'aire prendrà una forma tal que tingui la mínima superfície exterior possible compatible amb el seu volum. Tanmateix les gotes dels líquids són esfèriques per què, per a un volum donat, la esfera és la figura que presenta menor superfície exterior.

## Rugby

El **sabó** té l'efecte de disminuir la tensió superficial dels líquids i de permetre la seva laminació en superfícies minimal (mínims relatius). És a dir, de menor àrea que qualsevol altra superfície propera que pugui inscriure's en la mateixa estructura. Poden haver-hi varies solucions minimal i

podrem saltar d'una a l'altra comunicant energia (movent, bufant,...).

Posarem de manifest aquesta tendència del líquids mitjançant un petit però vistós experiment en el qual es **tensa un fil unit a una petita estructura de filferro**.

### **Filferro i fil**

### **Gots i pols de talc.**

### **Insectes.**

Un exemple arquitectònic d'aquest tipus de figures el trobem a la coberta de **l'Estadi Olímpic de Munic** (1972). Està formada per...

- 5 unitats de superfícies mínimes amb
- 8 punts de suport,
- 135 m de llum màxima,
- 55 m d'altura màxima,
- 2 punts de suspensió amb tres tensors que surten de cadascun i
- 29 punts d'ancoratge.

En les activitats que farem a continuació aprofitarem aquesta propietat per tal de produir figures tridimensionals amb pel·lícules sabonoses, treballar, a partir d'elles, conceptes de geometria i, sobretot, deixar-nos fascinar per la seva bellesa.

### **Breus observacions didàctiques**

En veure aquestes experiències és natural preguntar-se: *Això està molt bé, però... realment es pot fer amb grups d'alumnes concrets?*

Us hi proposo una resposta rotunda: **SI!!!!!!!!!!**

I unes consideracions al respecte:

1. Els materials no són difícils de construir. Cal ser una mica curós en preparar la mescla però això també pot incorporar-se a la dinàmica de la sessió! Qui obtindrà la mescla millor?
2. Es tracta d'un conjunt d'activitats molt polivalent en dos sentits:
  - Pot realitzar-se a diferents nivells: del parvulari a la universitat per que es presta a lectures diverses. En cada nivell podem tractar aspectes específics: les formes, el vocabulari, els angles, les distàncies, les posicions relatives entre plans i rectes, les simetries, les representacions gràfiques, l'optimització, etc.
  - Pot tractar-se des de diverses matèries: Matemàtiques, Ciències Experimentals, Tecnologia, Educació Visual i Plàstica, etc.
3. L'enorme contingut lúdic d'aquestes activitats els atorga un especial efecte motivador però ens obliga a certes consideracions metodològiques:
  - Convé incorporar-les en un marc de treball científic tot evitant que l'alumne les contempli com a mers espectacles.
  - Convé realitzar-les amb varies sessions de duració limitada tenint en compte que, passat un temps, l'activitat "explotarà" i caldrà permetre cert marge de joc lliure.
  - En determinats nivells pot ser interessant que l'alumne tingui un qüestionari o hagi d'elaborar un petit informe que el faci reflexionar sobre allò que ha observat i que hagi d'expressar-ho.

Convé no oblidar mai que, aquest tipus d'experiències, són elements que permeten apropar-nos de manera natural a les autèntiques motivacions que varen donar origen als problemes matemàtics.

Tanmateix aquestes activitats, com a eines de comunicació didàctica en Matemàtiques, permeten donar diferents nivells de missatges:

- A nivell **explícit** que poden anar de *conceptes molt concrets i elementals* (vocabulari: arestes, cares, vèrtexs,..., distàncies, angles de  $120^\circ$ ,...) fins a *idees més generals o avançades* (idea de optimització o minimització, figura reglada, curvatura,...).
- A nivell **implícit**: unicitat o no de solucions, dinàmica conjectura – experimentació – modificació, visió experimental de les Matemàtiques,...

- A nivell **emocional**: gaudir de la bellesa d'unes formes tot descobrint el rerafons matemàtic que les explica i les condiona.

## Activitats proposades en dues dimensions

- **Punt de Fermat.**

Treballarem amb una estructura formada per dues plaques planes i transparents unides per tres claus metàl·liques que formen un triangle acutangle.

Primerament farem **una conjectura** sobre la figura que obtindrem, després farem l'experiment i projectarem el resultat amb el projector de transparències. Era correcta la conjectura que havíem formulat? Per què?

Observarem que els **angles** lliures entre les superfícies de sabó són tots de  $120^\circ$  i presentarem el punt de Fermat tot indicant **mètodes de construcció amb regla i compàs**: es proposarà un triangle acutangle a l'atzar i un grup dels assistents calcularà el seu punt de Fermat amb regla i compàs i un altre grup construirà una estructura amb plaques planes. Finalment comprovarem que el resultat que dóna el sabó sobre l'estructura real coincideix amb l'obtingut amb regla i compàs.

Acabarem fent una simulació del punt de Fermat estirant una **corda**.

- **Problema de Steiner per 4 a punts**

Ara treballarem amb una estructura formada per dues plaques planes i transparents unides per quatre claus metàl·liques que formen un rectangle.

De nou farem una **conjectura** sobre el resultat que obtindrem i probablement el sabó ens tornarà a sorprendre. Per què passa?

Comprovarem que, un cop més els **angles** són de  $120^\circ$ .

Farem una simulació mitjançant una estructura de fusta amb **cordes**.

**Mesurarem les longituds amb un regle.**

▪ **Hexàgon.**

Treballarem amb una estructura formada per dues plaques planes i transparents unides per sis claus metàl·lics situats en els vèrtexs d'un hexàgon regular (d'angles interiors ja de 120°!). Què passarà?

Posem una bombolla dins de l'hexàgon fins a obtenir un cercle a l'exterior:

$$\text{Àrea cercle exterior} - \text{àrea hexàgon} = \text{àrea cercle interior.}$$

Deixem baixar la bombolla i a mesura que surt l'exterior recupera la forma d'hexàgon.

**Absorbim aire i obtenim un hexàgon dins:**

**Es mantenen els angles de 120°**

**Es manté el perímetre.**

## **Activitats proposades en tres dimensions**

▪ **Tetraèdre**

Ara submergirem una estructura en forma de tetraèdre i obtindrem sis làmines planes i triangulars que es tallen en quatre arestes que convergeixen en el baricentre del tetraèdre, si és regular. L'angle entre les cares és de 120° i l'angle entre les arestes que convergeixen en el baricentre és de 109° 28'. Si tallem alguna de les làmines obtindrem un bonic **paraboloide hiperbòlic**.

Resulta interessant col·locar una bombolla sobre el baricentre i bufar amb l'ajut d'una palleta: apareix una figura tetraèdrica amb les cares lleugerament corbades sostinguda per sis làmines planes. Si ho fem amb fum la imatge és molt bonica!

- **Cub**

En el cas de una estructura cúbica apareixerà una làmina plana i quadrada en el centre sostinguda per dotze làmines planes en forma de trapezi. La simetria del cub ens permet observar que hi haurà **tres solucions** que tindran la làmina central amb orientacions diferents. **Passarem d'una a l'altra movent l'estructura!**

**Bufant** amb una palleta (si pot ser amb fum!) en el pla central obtindrem un cub sostingut per les dotze làmines líquides.

Podrem trencar cares fins deixar les làmines de sabó inscrites tan sols en una poligonal tridimensional tancada. Dóna una bonica superfície que soluciona, en un cas particular, el **problema de Plateau**.

- **Prisma recte de base triangular**

Observarem els angles diedres i triedres i potser farem una petita “escultura” amb sabó i fum!

**Farem un rellotge de sorra.**

- **Octàedre**

En aquest cas poden obtenir-se diferents formes (segons la qualitat del líquid, el moviment d'extracció,...). Sovint per passar d'una configuració a una altra convindrà bufar o moure l'estructura. Totes les figures que s'obtenen són molt maques però resulta especialment fascinant una rosa dels vents tridimensional d'extraordinària bellesa.

**Experiment de la bombolla de fum sobre un objecte foradat.**

- **Cercles i altres figures**

Movent a l'aire una anella es formaran grans bombolles. Són molt boniques! Amb dues anelles podrem treballar amb vàries d'aquestes bombolles i generar curioses figures

tridimensionals com **un cilindre o una catenoide**.

Resulta molt interessant col·locar **un fil fi, lligat formant un cercle**, sobre la pel·lícula de sabó que queda suspesa a l'anella. En principi el fil queda arrugat però, en trencar la part interna de la pel·lícula, el fil es tensa formant un cercle buit perfecte suspès a la làmina de sabó.

**Raquetes de tenis.**

**Poema.**

A partir d'aquí gaudiu-ne! Deixeu-vos seduir per l'encant d'aquestes figures, poseu-hi creativitat, inventeu-ne de noves i exploreu, amb imaginació, l'immens camp de possibilitats didàctiques que ofereixen!