Problemas – Tema 9

Problemas resueltos - 16 - optimización

1. Una compañía de cruceros ofrece un viaje para al menos 100 personas por un precio inicial de 2000 euros por persona.

Para animar las ventas decide rebajar el precio inicial en 10 euros por cada persona que rebase las 100. Así pues, si se apuntaran 120 personas, cada uno pagará 2000 – 20·10 = 1800 euros.

Calcula el número de personas que maximiza los ingresos de la compañía y el valor de dicho ingreso máximo.

El ingreso de la compañía por el viaje es igual al número de personas que viajan multiplicado por el dinero que paga cada uno.

Definimos, pues, una función a trozos donde los ingresos son nulos si el número de viajeros es menor que 100 (ya que no habría viaje). Para un número suficiente de viajeros, debemos recordar restar 10 euros al precio final que paga cada persona por cada uno de los viajeros que supera el número 100.

Si al número final de viajeros lo denominamos x , la función resulta:

$$Ingresos \equiv I = \left\{ \begin{matrix} 0 \quad si \quad x < 100 \\ x[2000-(x-100)\cdot 10] \quad si \quad x \geq 100 \end{matrix} \right\}$$

$$I = \left\{ \begin{matrix} 0 \quad si \quad x < 100 \\ -10x^2+3000x \quad si \quad x \geq 100 \end{matrix} \right\}$$

Esta es la función que debemos optimizar: derivar e igualar a cero, y buscar el máximo relativo para $x \geq 100$.

$$I' = \left\{ \begin{matrix} 0 \quad si \quad x < 100 \\ -20x+3000 \quad si \quad x \geq 100 \end{matrix} \right\}$$

$$I'=0 \quad \rightarrow \quad -20x+3000=0 \quad \rightarrow \quad x=150 \quad viajeros$$

Evaluamos la primera derivada a izquierda y derecha de este punto crítico, para comprobar si es máximo relativo.

$f'(100)>0 \quad \rightarrow \quad f(x)$ estrictamente creciente

$f'(200)<0 \quad \rightarrow \quad f(x)$ estrictamente decreciente

Existe un máximo relativo, que también es absoluto, en $(150, f(150))=(150, \ 225000)$.

El ingreso máximo es de $225000 \quad euros$.

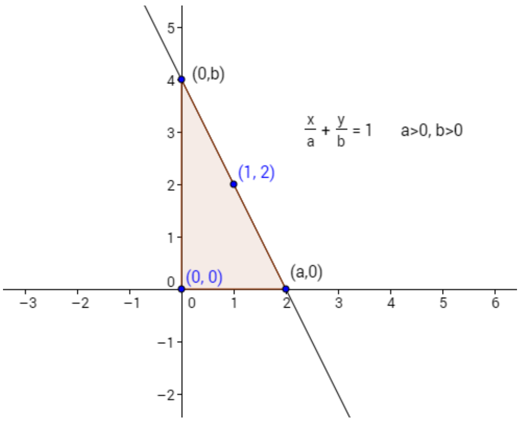
2. Encontrar, de entre todas las rectas que que pasan por el punto $(1,2)$, aquella que forma con la partes positivas de los ejes de coordenadas un triángulo de área mínima. Obtener dicha área mínima.

Podemos resolver este problema a partir de dos formas de expresar la ecuación de la recta.

Un primer procedimiento sería trabajar con la ecuación canónica de la recta, que relaciona entre sí a los puntos de corte de la recta con los ejes de coordenadas.

$$r:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad \rightarrow \quad (a,0),(0,b)\in r$$

Si $a>0, b>0$ la recta sería decreciente y cortaría a los ejes cartesianos en sus partes positivas, tal y como indica la siguiente imagen.



El área del triángulo rectángulo formado por la recta y los ejes cartesianos se expresa:

$$A=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b$$

Y esta es la función que debemos optimizar para buscar su máximo relativo.

La función depende de dos variables. ¿Cómo podemos relacionar ambas variables, para dejar A en función de una sola variable?

Con ayuda de la ecuación de la recta, que pasa por el punto $(1,2)$.

$$r:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad , \quad (1,2)\in r \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a}=1-\frac{2}{b} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a}=\frac{b-2}{b} \quad \rightarrow \quad a=\frac{b}{b-2}$$

Llevamos esta relación a la ecuación del área del triángulo.

$$A=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b \quad \rightarrow \quad A=\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{b-2}\cdot b \quad \rightarrow \quad A=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{b-2}$$

El dominio de la función es $Dom(A)=\mathbb{R}-\{2\}$. Y según la condiciones de nuestro enunciado, solo tienen sentido valores positivos de b , ya que la recta solo corta al eje OY en su semieje positivo.

Derivamos e igualamos a cero la función.

$$A'=\frac{1}{2}\cdot\frac{2b(b-2)-b^2}{(b-2)^2} \rightarrow A'=\frac{1}{2}\cdot\frac{2b^2-4b-b^2}{(b-2)^2} \rightarrow A'=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2-4b}{(b-2)^2}$$

$$A'=0 \rightarrow b^2-4b=0 \rightarrow b=0 \ , \ b=4$$

Tenemos dos puntos candidatos a extremos relativos. Vamos a evaluar la derivada en los siguientes intervalos, para decidir si son máximos o mínimos.

$$(-\infty,0) \rightarrow A'(-10)>0$$

$$(0,2) \rightarrow A'(1)<0$$

$$(2,4) \rightarrow A'(3)<0$$

$$(4,+\infty) \rightarrow A'(5)>0$$

En $b=0$ la función presenta un máximo relativo (aunque este valor no lo contemplamos realmente, según las condiciones de nuestro enunciado), y en $b=4$ aparece un mínimo relativo (que también es absoluto si nos ceñimos a valores positivos de b , que son lo que tienen sentido en nuestro problema).

Por lo tanto, si $b=4 \rightarrow a=2 \rightarrow A=4 \ u^2$

La ecuación de la recta resulta:

$$r:\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1 \rightarrow r:y=-2x+4$$

Otra forma de resolver el problema es partiendo de una ecuación de la recta donde aparezca explícitamente su pendiente. Por ejemplo, la ecuación explícita.

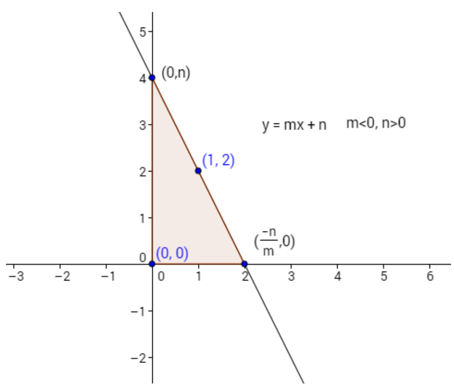
$$r:y=mx+n$$

Los puntos de corte de esta recta con los ejes cartesianos son:

$$x=0 \rightarrow y=n \rightarrow (0,n)$$

$$y=0 \rightarrow x=\frac{-n}{m} \rightarrow (\frac{-n}{m},0)$$

Con $m<0, n>0$ según las condiciones del problema, ya que la recta es de pendiente negativa (ver imagen).



Según esto, el área del triángulo podemos expresarla: $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{|m|}$

Donde hemos tomado valor absoluto en la variable $m<0$ para garantizar un área positiva. Podemos quitar el valor absoluto para $m<0$ añadiendo un signo negativo a la expresión final del área.

$$A=\frac{-1}{2}\cdot\frac{n^2}{m}$$

Llegamos a una función que depende de dos variables. Podemos relacionarlas con la ecuación explícita de la recta.

$$r: y=mx+n \quad , \quad (1,2)\in r \quad \rightarrow \quad 2=m+n \quad \rightarrow \quad m=2-n$$

Llevando este resultado a la expresión del área:

$$A=\frac{-1}{2}\cdot\frac{n^2}{2-n} \quad \rightarrow \quad A=\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{n-2}$$

Esta es la expresión a optimizar, que coincide formalmente con la que trabajamos en el primer método de la ecuación canónica $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{b-2}$. Por lo que los resultados serán análogos, ahora para las variables m y n de la ecuación explícita:

$$n=4 \quad \rightarrow \quad m=-2 \quad \rightarrow \quad A=4\ u^2$$

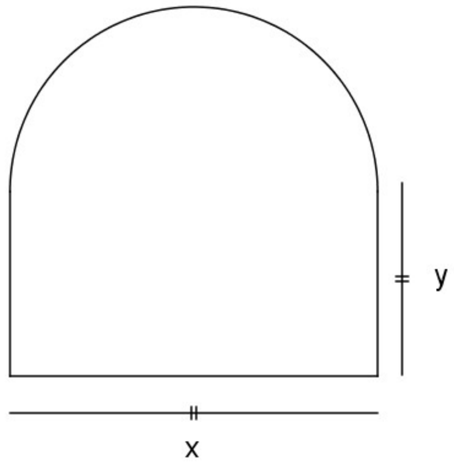
Donde $n=4$ es un mínimo relativo de la función $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{n-2}$.

Y llegamos a la ecuación de la recta solución, que coincide con la obtenida en el primer método.

$$r: y=-2x+4$$

3. Sea una ventana cuya parte inferior es un rectángulo y la superior un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de $6m$, calcula las dimensiones de la ventana para que entre la cantidad de luz máxima.

Un dibujo ayuda mucho en los problemas de optimización.



La luz que entra será máxima si maximizamos el área de la ventana.

$x=2r \;\rightarrow\; r$ es el radio de la semicircunferencia

$A_{rectángulo}=(2r)\cdot y$

$$A_{semicircunferencia}=\frac{\pi\cdot r^2}{2}$$

$$A_{total}=A_{rectángulo}+A_{semicircunferencia}=2\,r\,y+\frac{\pi r^2}{2}$$

Con los datos del enunciado sobre el perímetro buscamos una relación entre las variables $r\,,\,y$.

$$P=6 \quad , \quad P=2r+2y+\pi r \;\rightarrow\; 6=(\pi+2)r+2y \;\rightarrow\; \frac{6-(\pi+2)r}{2}=y$$

Llevamos este resultado a la función área.

$$A=2r\frac{6-(\pi+2)r}{2}+\frac{\pi r^2}{2} \;\rightarrow\; A=6r-(\pi+2)r^2+\frac{\pi r^2}{2} \;\rightarrow\; A=6r-\left(\frac{\pi}{2}+2\right)r^2$$

$A=6r-\frac{\pi+4}{2}r^2$ → Función a optimizar (dominio toda la recta real por ser polinómica).

La condición necesaria de extremo relativo es primera derivada igual a cero.

$A'=0 \quad \rightarrow \quad 6-(\pi+4)r=0 \quad \rightarrow \quad r=\dfrac{6}{\pi+4}$ → punto crítico

Comprobamos si es un máximo evaluando la segunda derivada en el punto crítico.

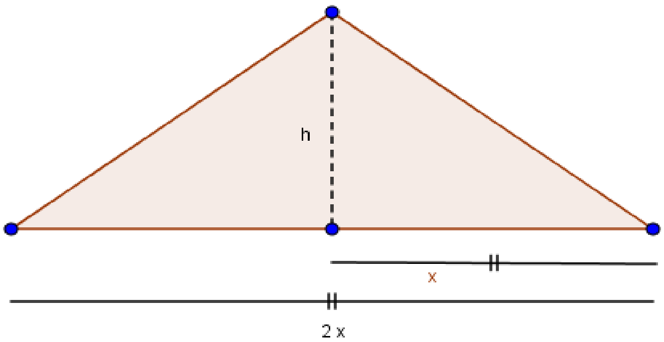
$A''=-(\pi+4)<0 \ \ \forall \ r\in Dom(A) \quad \rightarrow \quad r=\dfrac{6}{\pi+4}$ es un máximo de la función área.

$x=2r \quad \rightarrow \quad x=\dfrac{12}{\pi+4}\simeq 1{,}68\, m$

$\dfrac{6-(\pi+2)r}{2}=y \quad \rightarrow \quad y=\dfrac{6}{\pi+4}\simeq 0{,}84\, m$

4. Encuentra la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro $50\,cm$ que tenga la mayor área posible.

Dibujamos un triángulo isósceles con la base como lado desigual, y los otros dos lados iguales.



La función área a maximizar será → $A=\frac{1}{2}(2x)h=x\cdot h$

Relacionamos la base y la altura con el dato del perímetro, sabiendo que la longitud de los lados iguales podemos obtenerla por Pitágoras en uno de los dos triángulos rectángulos en que la altura divide al triángulo isósceles.

$$lado=\sqrt{x^2+h^2} \rightarrow Perímetro=2x+2\,lado=2x+2\sqrt{x^2+h^2}$$

$$50=2x+2\sqrt{x^2+h^2} \rightarrow 25=x+\sqrt{x^2+h^2} \rightarrow (25-x)^2=x^2+h^2$$

$$625+x^2-50x=x^2+h^2 \rightarrow h=\sqrt{625-50x}$$

Llevamos este resultado a la función área.

$A=x\cdot\sqrt{625-50x}=\sqrt{625x^2-50x^3}$ → Dominio → Discriminante mayor o igual que cero.

$625x^2-50x^3>0$ → Sacar raíces → $x=0$, $x=25/2$

Tiene sentido físico triángulos con base positiva, por lo que: $Dom(A)=(0,25/2)$

La condición necesaria de extremo relativo es primera derivada nula.

$$A'=0 \rightarrow A'=\frac{1250x-150x^2}{2\sqrt{625x^2-50x^3}} \rightarrow 1250x-150x^2=0$$

$$1250x-150x^2=0 \rightarrow x=0 \;,\; x=\frac{25}{3}$$

Tenemos dos puntos críticos, donde tiene sentido físico que estudiemos el valor $x=\frac{25}{3}$ por ser la única distancia positiva de los dos valores.

Derivar la primera derivada se antoja algo engorroso, por lo que vamos a aplicar la condición suficiente de evaluar la primera derivada para determinar si estamos ante un máximo relativo.

Para ello debemos representar en la recta real los puntos críticos y los puntos frontera de los intervalos que no pertenecen al dominio de la función. Recuerda: $Dom(A)=(0,25/2)$.

Con estos puntos, tendremos los intervalos donde evaluar la derivada.

Tendremos los siguientes intervalos alrededor del punto crítico $x=\frac{25}{3}$.

$(0,\frac{25}{3}) \rightarrow A'(1)>0 \rightarrow A(x)$ estrictamente creciente

$(\frac{25}{3},\frac{25}{2}) \rightarrow A'(10)<0 \rightarrow A(x)$ estrictamente decreciente

Por lo tanto $x=\frac{25}{3}$ es un máximo relativo del área del triángulo.

$$base=2x \rightarrow base=\frac{50}{3}\ m$$

$$altura=h=\sqrt{625-50x} \rightarrow h=\frac{25\sqrt{3}}{3}\ m$$

5. Una lata de refresco cilíndrica tiene un volumen de $333\,cm^3$. La chapa utilizada para las bases es doble de cara que la utilizada para la cara lateral. Calcula las dimensiones de la lata para que el coste de fabricación sea el menor posible (ayuda: el volumen de un cilindro se calcula como el área de la base por la altura. Y el área de la cara lateral del cilindro es el perímetro de la base por la altura).

El coste de la lata será proporcional al área del cilindro. Por lo que deberemos optimizar dicha área.

El área del cilindro está formada por el área lateral y por el área de las dos bases circulares. Además, las áreas de las bases debemos multiplicarla por 2 ya que el precio de la chapa ahí es el doble que el precio de la chapa en la cara lateral.

$A_{lateral}=2\pi r h$ → donde r es el radio del cilindro y h su altura

$A_{base}=\pi r^2+\pi r^2=2\pi r^2$

Función coste a optimizar (coste lateral se multiplica por 2) → $f=2\pi r h+2\cdot(2\pi r^2)=2\pi r h+4\pi r^2$

Para relacionar las dos variables que aparecen en la función, uso el dato del enunciado del volumen. El volumen de un cilindro es el área de la base circular multiplicado por la altura.

$333=\pi r^2 h \rightarrow h=\dfrac{333}{\pi r^2}$ → Sustituimos en la función coste → $f=\dfrac{666}{r}+4\pi r^2$

El dominio de la función coste son todos los reales menos el 0, que anula al denominador. Es lógico pensar que el radio del cilindro debe ser positivo, por lo que podemos tomar el intervalo $(0,+\infty)$ como dominio.

Condición necesaria de extremos: primera derivada igual a cero.

$$f'=\frac{-666}{r^2}+8\pi r=\frac{-666+8\pi r^3}{r^2} \rightarrow f'=0 \rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{333}{4\pi}}\simeq 2{,}98\,cm$$ → punto crítico

Para demostrar que minimiza la función coste, evaluamos la segunda derivada en el punto crítico.

$$f''(x)=8\pi+\frac{1332}{r^3} \rightarrow f''\left(\frac{333}{4\pi}\right)>0 \rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{333}{4\pi}}\simeq 2{,}98\,cm$$ es un mínimo

Obtenemos, finalmente, la altura.

$$h=\frac{333}{\pi r^2}\simeq 11{,}94\,cm$$

6. Dados tres números reales cualesquiera r_1, r_2 y r_3 hallar el número real x que minimiza la función $D(x)=(r_1-x)^2+(r_2-x)^2+(r_3-x)^2$.

Minimizar significa buscar candidatos a extremos relativos de la función dada y comprobar que son mínimos absolutos. Si nos pidieran maximizar, buscaríamos máximos absolutos.

Recuerda que los extremos relativos presentan pendiente nula (primera derivada igual a cero). Estos problemas se conocen, de forma general, como problemas de optimización.

$D(x)=(r_1-x)^2+(r_2-x)^2+(r_3-x)^2$ → Dominio toda la recta real por ser polinómica

Derivamos e igualamos a cero para obtener los candidatos a extremos relativos.

$$D'(x)=-2(r_1-x)-2(r_2-x)-2(r_3-x)=6x-2(r_1+r_2+r_3)$$

$$D'(x)=0 \rightarrow 6x-2(r_1+r_2+r_3)=0 \rightarrow x=\frac{r_1+r_2+r_3}{3}$$

¿Es un mínimo? Podemos plantearlo de dos maneras.

La primera es dar valores a la primera derivada, a ambos lados del candidato a extremo y comprobar que, si es un mínimo, a su izquierda la función decrece (pendiente negativa) y a su derecha la función crece (pendiente positiva).

Otra opción es obtener la segunda derivada y evaluarla en el punto candidato a extremo. Y si el valor es positivo, estaremos ante un mínimo. Optamos por este segundo método.

$D''(x)=6>0 \rightarrow x=\frac{r_1+r_2+r_3}{3}$ es un mínimo relativo de $D(x)$

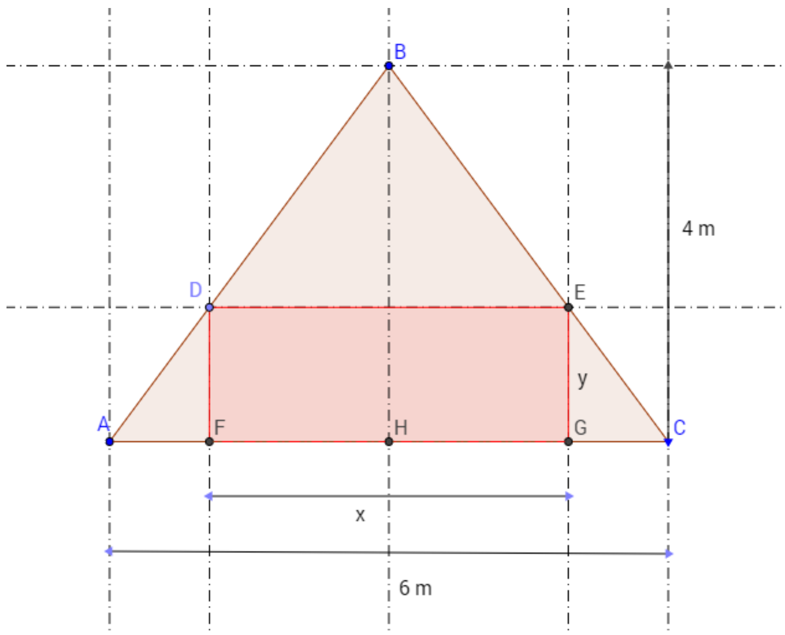
Como es el único extremo relativo, y el dominio de toda la función es la recta real, el mínimo relativo también será mínimo absoluto. Por lo que hemos resuelto nuestro ejercicio.

7. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un triángulo isósceles de 6 metros de base (el lado desigual) y 4 metros de alto.

Las incógnitas del problema son:

$$base \quad del \quad rectángulo = x$$
$$altura \quad del \quad rectángulo = y$$

Realicemos un dibujo que ilustre el problema.



La función a maximizar es el área del rectángulo inscrito en el triángulo (sombreado de color rojo).

$$Área = x \cdot y$$

Para poder derivar y optimizar debemos expresar la función dependiendo de solo una variable. La relación entre ambas variables podemos obtenerla del enunciado, con ayuda del dibujo auxiliar.

El triángulo rectángulo ABH es proporcional al triángulo de vértices ADF. Por lo tanto el ángulo del vértice A es idéntico en ambos triángulos. Y sus tangentes también (el cociente entre el cateto opuesto y el cateto contiguo al vértice A). Es decir:

$$Triángulo \ ABH \rightarrow \tan \hat{A} = \frac{4}{3} \qquad Triángulo \ ADF \rightarrow tg(\hat{A}) = \frac{y}{3 - \frac{x}{2}}$$

Igualamos ambas tangentes.

$$\frac{4}{3}=\frac{y}{3-\frac{x}{2}} \quad \rightarrow \quad x=6-\frac{3}{2}y$$

Sustituyendo el valor de x en la función $\acute{A}rea$ dejamos todo expresado en función de la variable y .

$$A=\left(6-\frac{3}{2}y\right)y=6y-\frac{3}{2}y^2$$ → Dominio toda la recta real por ser polinómica

Derivamos e igualamos a cero.

$A'=6-3\text{y}$, $A'=0 \quad \rightarrow \quad y=2$ → punto crítico

Para demostrar si es un máximo, calculamos la derivada segunda.

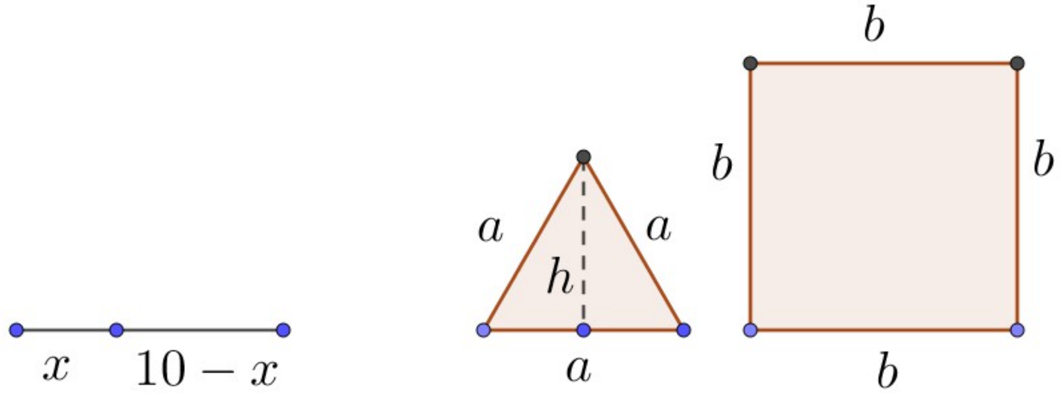
$A''=-3<0 \quad \rightarrow \quad y=2$ es un máximo relativo de la función

Como es el único extremo relativo y el dominio es toda la real, el máximo relativo también será máximo absoluto.

Los valores que maximizan el área son: $x=base=3 \quad m$, $y=altura=2 \quad m$.

8. Un alambre de 10 metros de longitud se divide en dos trozos. Con uno de ellos se forma un triángulo equilátero y con el otro un cuadrado. Halla la longitud de dichos trozos para que la suma de las áreas sea mínima.

El siguiente dibujo ilustra nuestro problema.



Con el trozo de alambre de longitud x construimos el triángulo equilátero (tres lados iguales):

$$a=\frac{x}{3}$$

Con el trozo de alambre de longitud $10-x$ construimos el cuadrado (cuatro lados iguales):

$$b=\frac{(10-x)}{4}$$

La función que debemos minimizar es la suma de las áreas de ambas figuras.

$$A=A_{triángulo}+A_{cuadrado}$$

El área del triángulo es $A_{triángulo}=\frac{a\cdot h}{2}$. La altura h la calculamos con el teorema de Pitágoras.

$$h^2=a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2 \rightarrow h=\frac{a\sqrt{3}}{2} \rightarrow A_{triángulo}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Sustituyendo $a=\frac{x}{3}$ en el área del triángulo → $A_{triángulo}=\frac{x^2\sqrt{3}}{36}$

El área del cuadrado es $A_{cuadrado}=b^2$. Si $b=\frac{(10-x)}{4} \rightarrow A_{cuadrado}=\frac{(10-x)^2}{16}$

La suma de ambas áreas da lugar a la función a minimizar.

$A=\frac{x^2\sqrt{3}}{36}+\frac{(10-x)^2}{16}$ → Dominio toda la recta real por ser polinómica

$A'=\frac{x\sqrt{3}}{18}-\frac{10-x}{8}=\frac{4x\sqrt{3}-90+9x}{72}=\frac{x(4\sqrt{3}+9)-90}{72}$, $A'=0 \rightarrow x(4\sqrt{3}+9)-90=0$

$x=\frac{90}{4\sqrt{3}+9}$

Ahora, comprobamos si este resultado es el que minimiza las áreas hallando la segunda derivada y verificando que al evaluar la segunda derivada en nuestro valor, el resultado es mayor que cero.

$A''=\frac{4\sqrt{3}+9}{72}>0 \rightarrow x=\frac{90}{4\sqrt{3}+9}$ es un mínimo relativo de la función

Al aparece un único mínimo relativo, y ser el dominio de la función toda la recta real, el mínimo relativo también es mínimo absoluto.

Los trozos solución a nuestro problema son $x=\frac{90}{4\sqrt{3}+9}$ y $10-x=10-\frac{90}{4\sqrt{3}+9}=\frac{40\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+9}$, con unidad de distancia el metro.

9. Calcular la base y la altura de un triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Consideramos un triángulo que descansa sobre su base x (lado desigual del triángulo isósceles) y con los otros dos lados iguales de longitud y . La altura del triángulo es h .
El enunciado nos da el perímetro del triángulo (suma de todos los lados).

$$P=8\ u \rightarrow 2y+x=8 \rightarrow y=\frac{8-x}{2}$$

El área del triángulo es la función a maximizar → $A=\frac{x\cdot h}{2}$

Debemos expresar la altura h en función de x , para tener el área expresada según la variable x .
El triángulo isósceles podemos dividirlo en dos triángulos rectángulos, de hipotenusa y y con catetos de longitud h y $\frac{x}{2}$. Por Pitágoras:

$$y^2=h^2+\frac{x^2}{2^2} \rightarrow h=\sqrt{y^2+\frac{x^2}{4}}$$

Recordamos que $y=\frac{8-x}{2} \rightarrow h=\sqrt{\frac{64-16x}{4}}=\sqrt{16-4x}$

Y este valor de la altura lo llevamos a la ecuación del área → $A=\frac{x\cdot\sqrt{16-4x}}{2}=\sqrt{4x^2-x^3}$

Para que el área sea máxima tenemos que hacer la derivada, igualar a cero y justificar si existe un máximo relativo.

$$A'(x)=\frac{8x-3x^2}{2\cdot\sqrt{4x^2-x^3}} \quad , \quad A'=0 \rightarrow x=0,\ x=8/3$$

Tienen sentido distancias positivas, por lo que trabajamos con el punto crítico $x=\frac{8}{3}$.

Debemos considerar también el dominio de la función:

$A=\sqrt{4x^2-x^3} \rightarrow Dom(A)=x\in\mathbb{R}/x\leq 4$ → Distancias positivas → $Dom(A)=(0,\ 4]$

Evaluamos en $(0,\frac{8}{3}) \rightarrow A'(1)>0 \rightarrow A$ estrictamente creciente

Evaluamos en $(\frac{8}{3},4) \rightarrow A'(3)<0 \rightarrow A$ estrictamente decreciente

Por lo tanto tenemos un máximo relativo en $x=\frac{8}{3} \rightarrow y=\frac{8}{3}$, $h=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

Este máximo relativo también lo será absoluto en nuestro dominio $Dom(A)=(0,\ 4]$.

Esta solución genera un área máxima de $A=\frac{16\sqrt{3}}{9}\ u^2$.

10. Se desea construir un depósito cilíndrico cerrado de área total igual a 54 m^2. Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que este tenga volumen máximo.

Supongamos un cilindro de altura "h" y radio "R". El área total del cilindro es igual al área de la cara lateral más dos veces el área de la base circular.

Área total del cilindro → $A_{Total}=2\pi R h+2(\pi R)^2$

El volumen del cilindro es igual al área de la base circular multiplicado por la altura del cilindro.

Volumen del cilindro → $V_{cilindro}=\pi R^2 h$

La función que debemos maximizar es la función volumen**.** Del área total obtenemos la relación entre la altura h en función del radio R .

$$54=2\pi R h+2(\pi R)^2 \;\rightarrow\; h=\frac{54-2\pi R^2}{2\pi R}$$

Por lo que el volumen queda expresado en función únicamente del radio.

$$V_{cilindro}=\pi R^2\cdot\frac{54-2\pi R^2}{2\pi R} \;\rightarrow\; V_{cilindro}=27R-\pi R^3$$ → Dominio toda la recta real por ser polinomio

Para maximizar el volumen, derivamos e igualamos a cero.

$$V'=27-3\pi R^2 \;,\; V'=0 \;\rightarrow\; R=\frac{3}{\sqrt{\pi}}$$

Comprobamos si es un máximo evaluando la segunda derivada en el punto crítico obtenido.

$$V''=-6\pi R \;,\; V''\left(R=\frac{3}{\sqrt{\pi}}\right)=-18\sqrt{\pi}<0 \;\rightarrow\; R=\frac{3}{\sqrt{\pi}}$$ es un máximo relativo

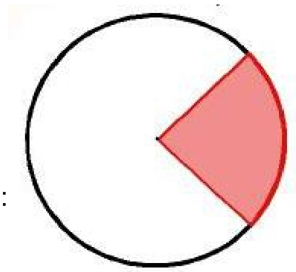
Al ser el único extremo relativo y el dominio toda la recta real, el máximo relativo también será máximo absoluto.

Solo nos falta obtener el valor de la altura.

$$h=\frac{54-2\pi R^2}{2\pi R}=\frac{6}{\sqrt{\pi}}$$

Siendo metros la unidad de cada variable.

11. Un jardinero desea construir un jardín con forma de sección circular de 40 metros de perímetro. ¿Cuál debe ser el radio para que la superficie sea máxima?



Nos encontramos ante un problema de maximizar el área del sector circular.

El área de un círculo es:

$$A_{círculo}=\pi\cdot r^2$$

Por lo que el área proporcional de un sector circular de ángulo α radianes será:

$$A_{sector}=\frac{\pi\cdot r^2\cdot\alpha}{2\pi}=\frac{r^2\cdot\alpha}{2}$$ → Área depende del radio y del ángulo

Aquí podemos recordar que la longitud l del arco sostenido por el sector circular es $l=r\cdot\alpha$ (con α en radianes), por lo que el área quedaría:

$$A_{sector}=\frac{r\cdot l}{2}$$ → Área depende del radio y de la longitud del arco

Con cualquiera de las dos maneras de representar el área del sector circular, llegamos a una función que depende de dos variable.

El perímetro del sector circular podemos expresarlo como $P_{sector}=2r+l$ y el enunciado nos dice que este perímetro es igual a 40 metros. Por lo tanto:

$$40=2r+l \rightarrow l=40-2r$$

Llevamos este resultado al área del sector $A_{sector}=\frac{r\cdot l}{2} \rightarrow A_{sector}=\frac{r\cdot(40-2r)}{2}=20r-r^2$

Y esta es la función a maximizar, con dominio toda la recta real por ser polinómica. Derivando en función del radio r .

$$A'_{sector}=20-2r \quad , \quad A'_{sector}=0 \rightarrow r=10$$

Con la segunda derivada verificamos que este punto crítico es un máximo relativo de la función área.

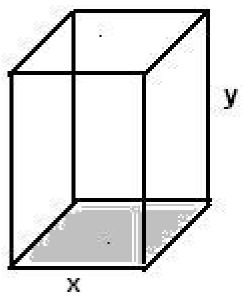
$A''_{sector}=-2<0 \rightarrow r=10$ es un máximo relativo

Al existir un único extremo relativo y ser el dominio toda la recta real, el máximo relativo también será máximo absoluto.

El valor del área máxima resulta:

$$A_{sector}(r=10)=20\cdot 10-10^2=100\,m^2$$

12. Un depósito abierto de latón con base cuadrada y capacidad para 4000 litros, ¿qué dimensiones debe tener para que su superficie sea mínima (menor coste de fabricación)?



La función que tenemos que minimizar es el área del depósito. Es decir, el área de la base más el área de las cuatro caras laterales (al tener la tapa abierta).

$$A=x^2+4xy$$

Con la condición de que el volumen sea de 4000 litros. El volumen es el área de la base por la altura:

$$V=x^2 y$$
$$4000=x^2 y \quad \rightarrow \text{Variables } x, y \text{ en } dm \rightarrow 1\,m^3=1000\,dm^3=1000\,litros$$
$$y=\frac{4000}{x^2}$$

Llevando este valor a la función área tenemos todo expresado en función de una sola variable.

$A=x^2+\frac{16000}{x}$ → Dominio: toda la recta real salvo el 0 → Sentido físico: valores positivos

Para minimizar, derivamos e igualamos a cero.

$A'=2x-\frac{16000}{x^2}$, $A'=0 \rightarrow x=20$ → punto crítico

Demostremos que el punto crítico es un extremo evaluando la segunda derivada.

$$A''=2+\frac{32000}{x^3}$$

$$A''(20)>0$$

$x=20\,dm$ → es un mínimo relativo → $y=10\,dm$ → Área mínima → $A=1200\,dm^2$

Al tener un único extremo relativo, el mínimo relativo será también mínimo absoluto en el dominio.

13. Una huerta tiene actualmente 24 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se estima que por cada árbol adicional, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima? ¿Cuál será esa producción?

Producción actual: 24·600 = 14.400 frutos

Por cada árbol nuevo (variable x) la producción en frutos de un árbol disminuye en una cantidad $15x$ frutos. Por lo tanto la producción total será el número de árboles ($24+x$) multiplicado por el número de frutos de cada árbol ($600-15x$).

$P(x)=(24+x)(600-15x)=-15x^2+240x+14400$ → Dominio: toda la recta real por ser polinómica

¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima? Derivamos la función e igualamos a cero.

$P'(x)=-30x+240 \rightarrow -30x+240=0 \rightarrow x=8$ → punto crítico

$P''(x)=-30<0$

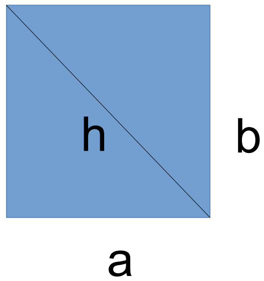
El valor $x=8$ es un máximo relativo. Al ser el único extremos y el dominio toda la recta real, también será máximo absoluto.

La producción máxima acontece para una huerta de 32 árboles (24 + 8). Siendo la producción máxima de frutos igual a:

$P(8)=(24+8)(600-15\cdot 8)=15.360$

14. Entre todos los rectángulos de perímetro 12cm, ¿cuál tiene diagonal menor? ¿Cuánto mide ésta?

Nuestra función a minimizar sale del triángulo rectángulo obtenido, al trazar una diagonal h en el rectángulo de lados a, b. Aplicamos Pitágoras:



$$h^2=a^2+b^2 \quad \rightarrow \quad h=\sqrt{a^2+b^2}$$

Ponemos una incógnita en función de la otra gracias al dato del perímetro:

$$12=2a+2b \quad \rightarrow \quad b=\frac{12-2a}{2} \quad \rightarrow \quad b=6-a$$

Sustituimos en nuestra función diagonal y simplificamos.

$$h=\sqrt{a^2+(6-a)^2}$$

$$h=\sqrt{a^2+a^2-12a+36}$$

$h=\sqrt{2(a^2-6a+18)}$ → Dominio: necesitamos discriminante mayor o igual a cero: $a^2-6a+18\geq 0$

Al obtener raíces del discriminante, comprobamos que el polinomio $a^2-6a+18$ no posee soluciones reales. Por lo tanto, si tomamos cualquier valor real, por ejemplo $a=0$, comprobamos que el polinomio toma un valor positivo. Esto significa que la función $f(a)=a^2-6a+18$ siempre está por encima del eje horizontal.

Conclusión: el dominio de $h=\sqrt{2(a^2-6a+18)}$ es toda la recta real, ya que el discriminante nunca se hace negativo.

Nuevamente, por significado físico, tiene sentido considerar valores positivos para el dominio: $(0,+\infty)$.

Minimizamos: derivamos e igualamos a 0 para encontrar sus puntos críticos:

$h'=\frac{2a-6}{\sqrt{2(a^2-6a+18)}} \quad \rightarrow \quad 0=2a-6 \quad \rightarrow \quad a=3$ → punto critico

Realizar la segunda derivada para la condición suficiente es bastante engorroso. Recurrimos a evaluar la primera derivada en los intervalos marcados por el dominio y el punto crítico.

$(0,3) \quad \rightarrow \quad a=1 \quad \rightarrow \quad h'(1)<0$ → estrictamente decreciente

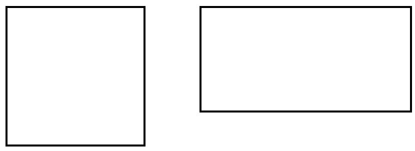
$(3,+\infty) \quad \rightarrow \quad a=5 \quad \rightarrow \quad h'(1)>0$ → estrictamente creciente

Conclusión: $a=3 \ cm$ es un mínimo relativo → $b=\frac{12-2a}{2} \quad \rightarrow \quad b=3 \ cm$

Al ser un único extremo relativo podemos garantizar que también será mínimo absoluto en el intervalo $(0,+\infty)$. Por Pitágoras hallamos el valor de la diagonal mínima:

$$h(a=3)=\sqrt{18}=3\sqrt{2} \ cm$$

15. Un alambre de 100 metros de longitud se divide en dos trozos. Con uno de los trozos se construye un cuadrado y con el otro un rectángulo cuya base es doble que su altura. Calcula las longitudes de cada uno de los trozos con la condición de que la suma de las áreas de estas dos figuras sea mínima.



Base y altura del cuadrado: y
Altura del rectángulo: x
Base del rectángulo: 2·x

Perímetro del cuadrado: 4·y
Perímetro del rectángulo: 2·x + 2·x + x + x = 6·x

Según la información obtenida por el problema podemos decir que el perímetro de las dos figuras cumple:

$100=4y+6x$ → despejamos x → $x=\frac{50-2y}{3}$

La función área que debemos minimizar será la suma del área del cuadrado y el área del rectángulo.

$$A=y^2+x\cdot 2\cdot x=y^2+2\cdot x^2$$

Llevamos al área el valor de x en función de y .

$A=y^2+2\left(\frac{50-2y}{3}\right)^2$ → la función área depende de la variable y → Dominio: toda la recta real

Derivamos → $A'(y)=2y+4\left(\frac{50-2y}{3}\right)\left(\frac{-2}{3}\right)$

Igualamos a cero → $A'(y)=0$ → $0=2y-\frac{8}{9}(50-2y)$ → $0=2y-\frac{400}{9}+\frac{16y}{9}$

$$\frac{400}{9}=\frac{34y}{9} \rightarrow y=\frac{400}{34}=11{,}765 \quad metros$$

Longitud tramo del cuadrado → $4y=47{,}059\,m$

Comprobamos que el valor de y obtenido minimiza la función área:

$A''\left(\frac{400}{34}\right)=\frac{34}{9}>0$ → tenemos un mínimo relativo en $y=\frac{400}{34}=11{,}765 \quad metros$

Nuevamente, al ser un único extremo relativo en el dominio, el mínimo relativo también será el mínimo absoluto.

El valor de la variable x que mide la altura del rectángulo será:

$$x=\frac{50-2y}{3}=8,829 \quad metros$$

Longitud del tramo del rectángulo → $6x=52,941\,m$

Con estos valores el área máxima resulta → $A_{máx}=294,118\,m^2$

16. Queremos hacer junto a la carretera un cercado rectangular para unos caballos en una zona llana. Cada metro del lado del cercado que está junto a la carretera nos cuesta 100 euros, mientras que para el resto del cercado nos cuesta 10 euros el metro. ¿Cuáles son las dimensiones del prado de área máxima que podemos cercar con 3000 euros?

El lado del cercado rectangular que colinda con la carretera es x , mientras que el lado que no está junto a la carretera mide y .

La función que debemos optimizar es el área del rectángulo → $A=x\cdot y$

La relación entre las variables la sacamos del coste económico, sabiendo que un metro del lado de dimensión x cuesta $100€/m$, y los metros de otros lados (dos de dimensión y , uno de dimensión x) cuestan $10€/m$.

$$3000=100x+10y+10y+10x \quad \rightarrow \quad 2y+11x=300$$

$$y=-\left(\frac{11}{2}\right)x+150=-5,5x+150$$

Llevamos el valor de y a la función área → $A=-5,5x^2+150x$ → Dominio: toda la recta real

Derivamos e igualamos a cero → $A'=-11x+150$, $A'=0$ → $x=\frac{150}{11}$ → punto crítico

Calculamos la segunda derivada y evaluamos en el punto crítico para confirmar la existencia de extremo relativo.

$A''(x)=-11<0$ → $x=\frac{150}{11}$ es un máximo relativo → $y=-5,5\left(\frac{150}{11}\right)+150=75\,m$

Al aparecer solo un extremos relativo en todo el dominio, el máximo relativo también es máximo absoluto.

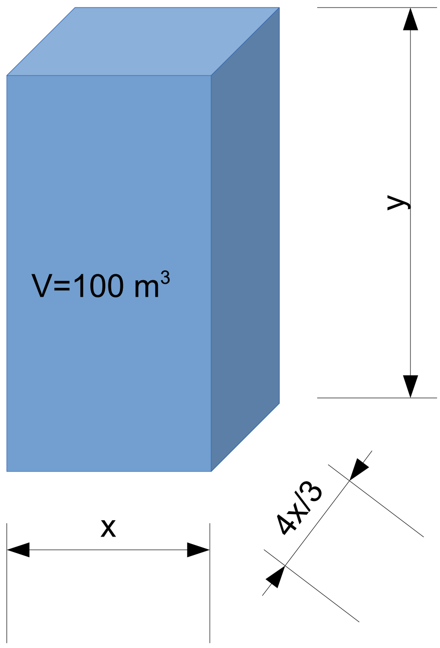
El valor máximo del área es → $A=\frac{11250}{11}=1022,72\,m^2$

17. Se desea construir un contenedor con forma de paralelepípedo rectangular de $100\,m^3$ de volumen, de manera que el largo de su base sea $\frac{4}{3}$ de la anchura x de su base. Los precios de m^2 de pintura del suelo, del techo y de la pared lateral son, respectivamente, $225\,€/m^2$, $300\,€/m^2$ y $256\,€/m^2$. Determinar razonadamente las dimensiones que minimizan el coste de pintura y dicho coste mínimo.

Anchura de la base → x

Largo de la base → $\frac{4x}{3}$

Altura del paralelepípedo → y



El coste de pintura de todo el contenedor es la función a minimizar.

$$P = P_{base} + P_{techo} + 2 \cdot P_{pared\ lateral\ de\ base\ x} + 2 \cdot P_{pared\ lateral\ de\ base\ \frac{4x}{3}}$$

$$P_{base} = 225 \cdot x \cdot \frac{4x}{3}$$

$$P_{techo} = 300 \cdot x \cdot \frac{4x}{3}$$

$$P_{pared\ lateral\ de\ base\ x} = 256 \cdot x \cdot y$$

$$P_{pared\ lateral\ de\ base\ \frac{4x}{3}} = 256 \cdot \frac{4x}{3} \cdot y$$

Es decir:

$$P=225\cdot x\cdot\frac{4x}{3}+300\cdot x\cdot\frac{4x}{3}+2\cdot 256\cdot x\cdot y+2\cdot 256\cdot\frac{4x}{3}\cdot y$$

$$P=300x^2+400x^2+512\cdot x\cdot y+\frac{2048}{3}\cdot x\cdot y \quad\rightarrow\quad P=700x^2+512\cdot x\cdot y+\frac{2048}{3}\cdot x\cdot y$$

Debemos expresar la función a minimizar dependiendo de una sola variable. Usando el dato del volumen del contenedor:

$$V=x\cdot\frac{4x}{3}\cdot y \quad\rightarrow\quad 100=\frac{4}{3}\cdot x^2\cdot y \quad\rightarrow\quad y=\frac{300}{4x^2}$$

Sustituimos en la función precio a minimizar.

$$P=700x^2+512\cdot x\cdot\frac{300}{4x^2}+\frac{2048}{3}\cdot x\cdot\frac{300}{4x^2}$$

$$P=700x^2+\frac{38400}{x}+\frac{51200}{x}$$

$P=700x^2+\dfrac{89600}{x}$ → Dominio: toda la recta real salvo el valor 0

Derivamos e igualamos a cero, como condición necesaria de extremo relativo.

$$P'=1400x-\frac{89600}{x^2}=\frac{1400x^3-89600}{x^2}$$

$P'=0 \quad\rightarrow\quad 1400x^3-89600=0 \quad\rightarrow\quad x^3=64 \quad\rightarrow\quad x=\sqrt[3]{64} \quad\rightarrow\quad x=4$ → punto crítico

Comprobamos que estamos ante un mínimo relativo.

Función $P(x)$	$P(x)\downarrow$	$P(x)\uparrow$
Intervalos	$(-\infty,4)$	$(4,+\infty)$
Derivada $P'(x)$	$P'(1)<0$	$P'(10)>0$

Por lo tanto, $x=4$ es un mínimo relativo de la función precio. Al ser el único extremo relativo será también un mínimo absoluto.

Las dimensiones del contenedor son las siguientes:

Anchura de la base → $x=4\,m$

Largo de la base → $\frac{4x}{3}=\frac{16}{3}m$

Altura del paralelepípedo → $y=\frac{300}{4x^2}=\frac{300}{4\cdot 16}=\frac{150}{32}=\frac{75}{16}m$

Precio mínimo → $P(4)=700\cdot(4)^2+\frac{89600}{4}=33600\,€$

18. Sea la función $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$. ¿Qué punto de la gráfica de la función se encuentra a la menor distancia posible del origen $(0,0)$? Obtener esa distancia mínima.

Sea (x,y) un punto arbitrario perteneciente a la gráfica de la función. La distancia de este punto al origen $(0,0)$ es el módulo del vector que forman ambos puntos.

$$d=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$

Si $(x,y)\in f(x)$ $\rightarrow$ $y=f(x)$ $\rightarrow$ $y=\sqrt{x^2+x+1}$ → Llevando esta relación a la función:

$$d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(\sqrt{(x^2+x+1)})^2}=\sqrt{2x^2+x+1}$$ → Dominio: $2x^2+x+1\geq 0$

El polinomio de segundo grado del discriminante nunca se hace negativo ni igual a cero. Por lo tanto el dominio de la función es toda la recta real.

Ya tenemos la función distancia a minimizar. Derivamos e igualamos a cero.

$$d'=\frac{4x+1}{2\sqrt{2x^2+x+1}} \quad , \quad d'=0 \rightarrow 4x+1=0 \rightarrow x=\frac{-1}{4}$$ → punto crítico

Evaluamos la derivada a izquierda y derecha del punto crítico.

Función $d(x)$	$d(x)\downarrow$	$d(x)\uparrow$
Intervalos	$(-\infty,\frac{-1}{4})$	$(\frac{-1}{4},+\infty)$
Derivada $d'(x)$	$d'(1)<0$	$d'(10)>0$

Por lo tanto, $x=\frac{-1}{4}$ es un mínimo relativo. Al ser el único extremo relativo del dominio, también será mínimo absoluto.

La distancia mínima es:

$$d(\frac{-1}{4})=\sqrt{2(\frac{-1}{4})^2+(\frac{-1}{4})+1}=\sqrt{\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+1}=\sqrt{\frac{1-2+8}{8}}=\sqrt{\frac{7}{8}} \quad \textit{unidades}$$

19. La fabricación de x tabletas gráficas supone un coste total en euros dado por la función $C(x)=1500x+1\,000\,000$. Cada tableta se venderá a un precio unitario dado por la función $P(x)=4000-x$. Suponiendo que todas las tabletas fabricadas se venden, ¿cuál es el número que hay que producir para obtener el beneficio máximo? Obtener ese beneficio máximo.

La función beneficio es igual a los ingresos menos los gastos. Es decir:

$B=(4000-x)x-(1500x+1\,000\,000)=4000x-x^2-1500x-1\,000\,000$

$B=-x^2+2500x-1\,000\,000$ → función a optimizar → Dominio: R por ser polinómica

$B'=-2x+2500$, $B'=0$ → $-2x+2500=0$ → $x=1250$ → punto crítico

Evaluamos la segunda derivada en el punto crítico para comprobar si estamos ante un extremo relativo.

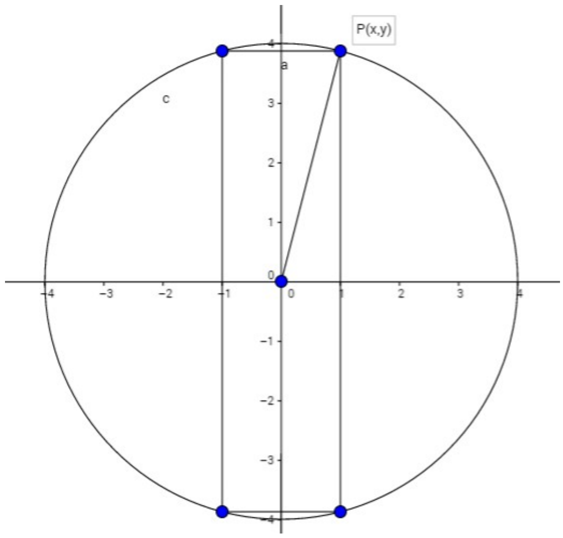
$B'=-2<0$ → $x=1250$ es un máximo relativo de la función beneficio.

Al ser el único extremos y ser el dominio toda la recta real, el máximo relativo también será máximo absoluto.

Para una venta de 1250 tabletas se obtiene un beneficio máximo igual a:

$B(1250)=-(1250)^2+2500(1250)-1\,000\,000=562\,500€$

20. Sea la circunferencia centrada en el origen y radio 4 unidades, de ecuación $x^2+y^2=16$. Sea el rectángulo de lados paralelos a los ejes cartesianos y vértices sobre la circunferencia. Con estas condiciones, obtener las dimensiones del rectángulo de área máxima mediante un problema de optimización. Calcular dicha área máxima.



Tomando como referencia la imagen superior, el rectángulo inscrito tendrá como área:

$$A=2x\cdot 2y=4xy$$

Donde $P(x,y)$ representa las coordenadas del vértice del rectángulo del primer cuadrante. Si el radio de la circunferencia es 4, por Pitágoras:

$16=x^2+y^2 \rightarrow y=\sqrt{16-x^2}$ → Tomamos la solución positiva por ser primer cuadrante

Llevamos este valor a la fórmula del área para obtener la función a optimizar:

$A=4x\cdot\sqrt{16-x^2}$ → Dominio: $16-x^2\geq 0 \rightarrow [-4,4]$

Es lógico pensar que el sentido físico del enunciado exige que la variable x sea positiva y que no alcance el valor $x=4$, ya que nuestro rectángulo se reduciría a una línea de área nula. Por lo tanto, podemos acotar aún más nuestro dominio al intervalo $(0,4)$.

Calculamos la primera derivada para estudiar los puntos críticos.

$$A'=4\cdot\left[\sqrt{16-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}}\right]=4\cdot\frac{2(16-x^2)-2x^2}{2\sqrt{16-x^2}}$$

$$A'=4\cdot\frac{16-x^2-x^2}{\sqrt{16-x^2}}=4\cdot\frac{16-2x^2}{\sqrt{16-x^2}} \quad , \quad A'=0 \rightarrow 16-2x^2=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{8}$$

Los valores de x tienen sentido físico si son positivos, por lo que evaluamos la primera derivada en los siguientes intervalos.

Función $A(x)$	$A(x)\uparrow$	$A(x)\downarrow$
Intervalos	$(0,\sqrt{8})$	$(\sqrt{8},4)$
Derivada $A'(x)$	$A'(1)>0$	$A'(3)<0$

Por lo tanto $x=\sqrt{8}$ es un máximo relativo de la función área → $y=\sqrt{16-x^2}=\sqrt{8}$

Al existir un único extremo relativo en $(0,4)$, el máximo relativo también será máximo absoluto de la función área.

El área máxima resulta → $A(x=\sqrt{8})=4\sqrt{8}\cdot\sqrt{16-8}=4\cdot 8=32 \quad u^2$

El rectángulo solución se convierte en un cuadrado (lados iguales).

21. Una empresa de tomate en salsa quiere fabricar latas cilíndricas de volumen constante igual a V . ¿Cuál es el valor del radio r de la base de la lata y el valor de su altura h , para que la construcción requiera la menor superficie de material? Si el precio de 1 unidad cuadrada de superficie es de $0{,}50\,€$, ¿cuánto cuesta fabricar esa lata de menor superficie?

La función a minimizar es el área del cilindro (minimizar costes implica minimizar superficie de material).

$$A=2\cdot A_{base}+A_{lateral}=2\cdot\pi\cdot r^2+2\cdot\pi\cdot r\cdot h$$

Volumen de un cilindro → $V=\pi\cdot r^2\cdot h$ → $h=\dfrac{V}{\pi\cdot r^2}$ → Llevamos este resultado a la función área, recordando que V es un valor constante (en otros ejercicios de optimización nos dan un valor concreto del volumen, pero ahora tendremos que trabajar con la letra V como si fuese un número fijo).

$A=2\cdot\pi\cdot r^2+\dfrac{2V}{r}$ → Dominio: $\mathbb{R}-\{0\}$ → Solo tiene sentido radios positivos: $(0,+\infty)$

$A'=4\pi r-\dfrac{2V}{r^2}=\dfrac{4\pi r^3-2V}{r^2}$ → $A'=0$ → $4\pi r^3-2V=0$ → $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ → punto crítico

Para demostrar si estamos ante un mínimo relativo, calculamos la segunda derivada.

$A'=4\pi r-\dfrac{2V}{r^2}$ → $A''=4\pi+\dfrac{4V}{r^3}>0$ → siempre positivo, ya que el volumen y el radio tienen sentido físico si son positivos → $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ es un mínimo relativo.

Al ser el único extremos relativo en el dominio $(0,+\infty)$, el mínimo relativo también se convierte en mínimo absoluto de la función área.

Si el área es $A=2\cdot\pi\cdot r^2+\dfrac{2V}{r}=\dfrac{2\pi r^3+2V}{r}$, podemos obtener su valor mínimo. La solución quedará en función del valor fijo V .

$$A\left(r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)=\frac{V+2V}{\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}=3\cdot\sqrt[3]{2\pi}\cdot\frac{V}{\sqrt[3]{V}}=3\cdot\sqrt[3]{2\pi}\cdot\sqrt[3]{V^2}=3\cdot\sqrt[3]{2\pi V^2}\quad u^2$$

Si una unidad cuadrada cuesta $0{,}50\,€$ → Precio → $P=\dfrac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{2\pi V^2}\;\;€$

22. Descomponer el número 44 en dos sumandos tales que el quíntuplo del cuadrado del primero más el séxtuplo del cuadrado del segundo sea un mínimo.

Nos piden dos sumandos que den 44 .

$$x+y=44$$

Además nos piden que el quíntuplo del cuadrado del primero más el séxtuplo del cuadrado del segundo sea un mínimo.

$$f=5x^2+6y^2$$

Debemos expresar esta función según una única variable.

$$x+y=44\,;\,y=44-x \rightarrow f(x)=5x^2+6\cdot(44-x)^2 \rightarrow f(x)=11x^2-528x+11616$$

El dominio es toda la recta real por ser función polinómica.

Derivamos e igualamos a cero para obtener los puntos críticos.

$f'(x)=22x-528 \rightarrow \quad f'(x)=0 \rightarrow x=\dfrac{528}{22}=24$ → punto crítico

Hacemos la segunda derivada para ver si es máximo o mínimo:

$f''(x)=22>0 \rightarrow \quad x=24$ es un mínimo relativo

Por ser el único extremo relativo en el intervalo de definición de la función, el mínimo relativo también es mínimo absoluto.

Obtengo el valor de y → $y=44-x\,;\,y=44-24=20 \rightarrow y=20$

Solución: $x=24$, $y=20$

23. Se tiene un alambre de 1 metro de longitud y se desea dividirlo en dos trozos para formar con uno de ellos un círculo y con el otro un cuadrado. Determinar la longitud que se ha de dar a cada uno de los trozos para que la suma de las áreas del círculo y del cuadrado sea mínima.

Del alambre obtenemos un círculo de radio r y un cuadrado de lado l .

$$A_{Total}=A_{círculo}+A_{cuadrado}=\pi\cdot r^2+l^2$$

Esta es la función a minimizar. Como depende de dos variables, buscamos relacionarlas con los datos del enunciado. Si el alambre tiene un metro de longitud, la suma de los perímetros de ambas figuras debe ser igual a uno.

$$2\pi r+4l=1 \quad\rightarrow\quad l=\frac{1-2\pi r}{4}$$

Llevamos este resultado a la función área a optimizar. Derivamos a igualamos a cero, para aplicar la condición necesaria de extremo relativo.

$A_{Total}=\pi\cdot r^2+\left(\frac{1-2\pi r}{4}\right)^2$ → función a optimizar: dominio toda la recta real por ser polinómica

$$A'=2\pi r+2\left(\frac{1-2\pi r}{4}\right)\left(\frac{-2\pi}{4}\right) \quad\rightarrow\quad A'=2\pi r-(1-2\pi r)\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$A'=2\pi r-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi^2 r}{2} \quad\rightarrow\quad A'=\left(2\pi+\frac{\pi^2}{2}\right)r-\frac{\pi}{4} \quad\rightarrow\quad A'=\left(\frac{4\pi+\pi^2}{2}\right)r-\frac{\pi}{4}$$

$$A'=0 \quad\rightarrow\quad \left(\frac{4\pi+\pi^2}{2}\right)r=\frac{\pi}{4} \quad\rightarrow\quad r=\frac{1}{2(4+\pi)}=\frac{1}{8+2\pi} \quad\rightarrow\quad r\simeq 0{,}07\ldots m$$

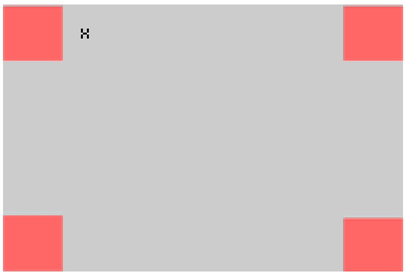
Demostremos que es un mínimo → $A''=\left(\frac{4\pi+\pi^2}{2}\right)>0 \quad\rightarrow\quad r\simeq 0{,}07\ldots m$ es un mínimo relativo.

Por ser el único extremo relativo en el intervalo de definición de la función, el mínimo relativo también es mínimo absoluto.

La longitud del trozo de círculo será igual a $2\pi r\simeq 0{,}439\ldots m$.

La longitud del trozo de cuadrado será igual a $1-2\pi r\simeq 0{,}561\ldots m$.

24. Recortando convenientemente en cada esquina de una lámina de cartón de dimensiones $80\,cm \times 50\,cm$ un cuadrado de lado x y doblando convenientemente, se construye una caja. Calcular x para que volumen de dicha caja sea máximo.



$V=(80-2x)(50-2x)x=4x^3-260x^2+4000x$ → Función a optimizar

Dominio de la función: todos los reales por ser polinómica.

Según el enunciado, el valor de la variable x debería oscilar en el intervalo $(0,25)$ para garantizar que sea un valor positivo y que los recortes cuadrados no sobrepasen la menor de las dimensiones de la lámina de cartón (de atura 50 cm).

$V'=12x^2-520x+4000$, $V'=0 \rightarrow 12x^2-520x+4000=0 \rightarrow x=10\,cm$, $x=33{,}3\,cm$

Aparecen dos puntos críticos.

Calculamos la segunda derivada.

$V''=24x-520$

$V''(10)=240-520<0 \rightarrow x=10$ es un máximo relativo

$V''(33{,}3)>0 \rightarrow x=33{,}3$ es un mínimo relativo → pero no tiene sentido físico porque para un valor de 33,3 cm el volumen se hace negativo

Solución: $x=10\,cm$

Por ser el único extremo relativo en el intervalo de definición $(0,25)$, el máximo relativo también es máximo absoluto.

25. Con un hilo de $60\,cm$, formar un rectángulo que, al girar alrededor de uno de sus lados, engendre un cilindro de área lateral máxima.

Si del hilo obtenemos un rectángulo de base x , altura y , su perímetro será $60\,cm$.

$x+y+x+y=60 \rightarrow 2x+2y=60 \rightarrow x+y=30 \rightarrow y=30-x$ → relación entre variables.

Si giramos el cuadrado alrededor de la altura y , generaremos un cilindro de radio x y altura y . La cara lateral del cilindro genera un rectángulo de altura y con base el perímetro de la circunferencia de la base del cilindro. Es decir:

$S=2\pi x y$ → función a maximizar, pero depende de dos variables

El área lateral depende de las variables (x, y) relacionadas anteriormente. Por lo tanto:

$S=2\pi x(30-x)=60\pi x-2\pi x^2$ → Dominio: toda la recta real por ser polinómica.

Derivamos e igualamos a cero para aplicar la condición necesaria de extremo relativo.

$S'=60\pi-4\pi x\,,\;\; S'=0 \rightarrow 60\pi=4\pi x \rightarrow x=\frac{60\pi}{4\pi}=15$ → punto crítico

Calculamos la derivada derivada para comprobar si $x=15$ es un máximo relativo.

$S''=-4\pi<0 \rightarrow x=15$ es un máximo relativo.

Por ser el único extremo relativo en el intervalo de definición de la función, el máximo relativo también es máximo absoluto.

La altura del rectángulo solución será: $y=30-15=15$ → El rectángulo se reduce a un cuadrado.

Solución: $x=15\;\; cm$, $y=15\;\; cm$ → $S_{\underset{max}{lateral}}=2\pi\cdot 15\cdot 15=450\pi\;\; m^2$