Problemas – Tema 2

Problemas resueltos - 7 - límites laterales en extremos de un intervalo

1. Estudia la continuidad y discontinuidad de $f(x)=\begin{cases} \frac{sen(x)}{x} & si \quad -3<x<0 \\ x^2+1 & si \quad 0\le x\le 1 \\ \frac{e^{(x-1)}-1}{x^2-1} & si \quad 1<x\le 5 \end{cases}$ **en su dominio.**

Estudiamos la continuidad primero en los **intervalos abiertos de cada trozo de la función**, y luego en los **puntos frontera que separan cada intervalo**.

$si \quad -3<x<0 \quad \rightarrow \quad f(x)=\frac{sen(x)}{x}$ $\rightarrow$ cociente de funciones continuas en toda la recta real. El denominador se anula en $x=0$, que no pertenece al intervalo $-3<x<0$, por lo que $f(x)$ es continua.

$si \quad -0\le x\le 1 \quad \rightarrow \quad f(x)=x^2+1$ $\rightarrow$ función continua por ser polinómica.

$si \quad 1<x\le 5 \quad \rightarrow \quad \frac{e^{(x-1)}-1}{x^2-1}$ $\rightarrow$ cociente de funciones continuas en toda la recta real. El denominador se anula en $x=\pm 1$, que no pertenece al intervalo $1<x<5$, por lo que $f(x)$ es continua.

Estudiamos los puntos frontera. **Una función es continua en un punto si está definida la función en ese punto, si coinciden los límites laterales y si el valor del límite es igual a la imagen del punto en la función**.

El punto $x=-3$ no lo estudiamos porque la función no está definida en ese punto.

$x=0$

$f(0)=1$

$L^-=\lim_{x\to 0^-}\frac{sen(x)}{x}=\frac{0}{0}\equiv indeterminación$ $\rightarrow$ L'Hôpital (recuerda enunciar siempre la regla, con sus condiciones, antes de aplicarla) $\rightarrow$ $L^-=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos(x)}{1}=1$

$L^+=\lim_{x\to 0^+}(x^2+1)=1$

$L^-=L^+=1 \quad \rightarrow \quad L=1$

$f(0)=L \quad \rightarrow \quad 1=1 \quad \rightarrow \quad f(x)$ es continua en $x=0$

$$x=1$$

$$f(1)=2$$

$$L^{-}=\lim_{x\to 1^{-}}(x^2+1)=2$$

$$L^{+}=\lim_{x\to 1^{+}}\frac{e^{(x-1)}-1}{x^2-1}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}\equiv indeterminación$$ → L'Hôpital → $$L^{+}=\lim_{x\to 1^{+}}\frac{e^{(x-1)}}{2x}=\frac{1}{2}$$

$L^{-}\neq L^{+}$ → $2\neq\frac{1}{2}$ → Al no coincidir los límites laterales $f(x)$ no es continua en $x=1$ → discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito. El valor del salto resulta $\left|2-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}$

$$x=5$$

$$f(5)=\frac{e^4-1}{24}$$

$L^{-}=\lim_{x\to 5^{-}}\frac{e^{(x-1)}-1}{x^2-1}=\frac{e^4-1}{24}$ → La función no está definida a la derecha de $x=5$, por lo que no tiene sentido preguntarnos por el límite derecho L^{+} → En este caso el límite de la función en $x=5$ coincide con el valor del límite izquierdo → $L^{-}=L=\frac{e^4-1}{24}$

$f(5)=L$ → $\frac{e^4-1}{24}=\frac{e^4-1}{24}$ → $f(x)$ es continua en $x=5$