Universidad de Cádiz
Departamento de Matemáticas

MATEMÁTICAS

Tema 11

Números factoriales. Números combinatorios. Binomio de Newton

Índice

1. Números factoriales

Se llama **factorial** de un número $n \in \mathbb{N}$ al producto de los n factores consecutivos que comienzan por la unidad y terminan por n, esto es,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-2) \cdot (n-1) \cdot n.$$

Ejemplo 1.1

$$1! = 1, \quad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24, \quad 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040.$$

Por convenio se ha establecido que, aunque $0 \notin \mathbb{N}$ y por definición $0!$ no tenga sentido, $0! = 1$.

Si $n \in \mathbb{N}$, entonces siempre podremos hacer $n! = (n-1)!\, n$, ya que

$$n! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-2) \cdot (n-1)}_{(n-1)!} \cdot n.$$

Ejemplo 1.2 $6! = 5!\, 6$, $9! = 7!\, 8 \cdot 9$.

2. Números combinatorios

Dados $m, n \in \mathbb{N}$, se define el **número combinatorio** o **coeficiente binómico** al número

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!},$$

y se leerá m **sobre** n.

Con esta notación, se definen los siguientes números combinatorios:

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{0!(m-0)!} = \frac{m!}{0!\, m!} = 1, \quad \binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\, 0!} = \frac{1}{1} = 1,$$
$$\binom{m}{1} = \frac{m!}{1!(m-1)!} = \frac{(m-1)!\, m}{1!(m-1)!} = m.$$

Las propiedades fundamentales de los números combinatorios se recogen en la siguiente

Proposición 2.1 *Dados $m, n \in \mathbb{N}$, se satisfacen:*

1) $\displaystyle\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$.

2) $\displaystyle\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$.

Ejemplo 2.1 $\displaystyle\binom{10}{3} = \binom{10}{7}, \quad \binom{100}{98} = \binom{100}{2}, \quad \binom{x}{x-3} = \binom{x}{3}.$

Ejemplo 2.2

$$\binom{8}{4} + \binom{8}{5} = \binom{9}{5}, \quad \binom{x}{4} + \binom{x}{5} = \binom{x+1}{5},$$
$$\binom{12}{x} + \binom{12}{x+1} = \binom{13}{x+1}, \quad \binom{15}{x-1} + \binom{15}{x} = \binom{16}{x}.$$

Como una aplicación de las propiedades de los números combinatorios podemos escribir el siguiente triángulo aritmético conocido como el **triángulo de Tartaglia**:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Hemos obtenido dos triángulos isósceles: el primero formado por los números combinatorios, y el segundo, por los valores de esos mismos números.

En ambos casos podemos ver la relación que guardan unos con otros. Aplicando la segunda propiedad, advertimos que cada número combinatorio es la suma de los dos números que están situados encima de él.

3. Binomio de newton

El **binomio de Newton** consiste en una fórmula que nos proporciona la potencia n–ésima de un binomio. Así, si $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}a^3 + \cdots + \binom{n}{n-1}xa^{n-1} + \binom{n}{n}a^n.$$

Este desarrollo también es válido para la diferencia de dos monomios sin más que escribir $(x-a) = [x+(-a)]$:

$$\begin{aligned}(x-a)^n = \binom{n}{0}x^n - \binom{n}{1}x^{n-1}a + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 - \binom{n}{3}x^{n-3}a^3 \\ + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}xa^{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n}a^n.\end{aligned}$$

Ejemplo 3.1

1) $(x+y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.$

2) $(x-y)^4 = \binom{4}{0}x^4 - \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 - \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4 = x^4 - 4x^3y + 4x^2y^2 - 4xy^3 + y^4.$

3) $(2x+y^2)^5 = \binom{5}{0}(2x)^5 + \binom{5}{1}(2x)^4y^2 + \binom{5}{2}(2x)^3(y^2)^2 + \binom{5}{3}(2x)^2(y^2)^3 + \binom{5}{4}2x(y^2)^4 + \binom{5}{5}(y^2)^5 =$ $32x^5 + 80x^4y^2 + 80x^3y^4 + 40x^2y^6 + 10xy^8 + y^{10}.$

Propiedades

1) El *término general* del desarrollo binómico $(x+a)^n$ viene dado por

$$\binom{n}{k}x^{n-k}a^k;$$

si escribimos $n-k$ en lugar de k obtenemos

$$\binom{n}{n-k}x^k a^{n-k}.$$

Obsérvese que los dos términos equidistantes de los extremos del desarrollo tienen coeficientes iguales ya que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

2) Los coeficientes binómicos del desarrollo $(x+a)^n$ son

$$\binom{n}{0},\ \binom{n}{1},\ \binom{n}{2},\ \binom{n}{3},\ \cdots\ \binom{n}{n},$$

es decir, coinciden con los números de fila n–ésima del triángulo de Tartaglia.

3) La suma de los coeficientes del desarrollo de la potencia n–ésima de un binomio es igual a 2^n.

En efecto, si en el binomio hacemos $x = a = 1$ tenemos que

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

4) La suma de los coeficientes que ocupan el lugar par es igual a la suma de los que ocupan el lugar impar.

Así es; si hacemos $x = 1$ y $a = -1$ entonces

$$0^n = (1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots$$

4. Ejercicios propuestos

(1) Comprueba que

$$(n-1)! = n! - (n-1)(n-1)!, \quad (n+1)! - n! = (n!)^2 : (n-1)!.$$

(2) Halla el valor de x sabiendo que $x! = 110(x-2)!$.

(3) Halla el valor de x en $12x! + 5(x+1)! = (x+2)!$.

(4) Comprueba que

a) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$,

b) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} = n^2$,

c) $n\binom{m}{n} = m\binom{m-1}{n-1}$.

(5) Halla m sabiendo que $\binom{m}{3} : \binom{m-1}{4} = \frac{8}{5}$.

(6) Calcula m sabiendo que $\binom{m}{6} = \binom{m}{3}$.

(7) Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\binom{x}{3} = \binom{x}{2}$, $\binom{x}{3} = x - 2$;

b) $\binom{x}{2} + \binom{x}{3} = x + 1$, $7\binom{x}{4} = \binom{x+2}{4}$;

c) $2\binom{x}{4} = 2\binom{x}{3} - \binom{x}{2}$, $\binom{x}{5} = \frac{2}{3}\binom{x}{6}$;

d) $5\binom{2x}{x} = \binom{2x-2}{x-1}$, $18\binom{x}{2} + 24\binom{x}{3} = 125x$.

(8) Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(x-1)^6$, $(2-x)^6$, $(x-y)^6$;

b) $(x+1)^8$, $(a^2+y)^7$, $(2+a)^9$;

c) $\left(3 - \frac{1}{3}b\right)^5$, $\left(2a - \frac{1}{2}b\right)^7$, $(3a^2b - 2b^2c)^8$.

(9) Halla el cuarto término del desarrollo de $(1-x)^{10}$.

(10) Busca el octavo término del desarrollo de $(3a^2b - 2a)^{11}$.

(11) Halla el término medio del desarrollo de $\left(\sqrt{2} - 3\sqrt{a}b^2\right)^{14}$.

(12) Escribe el término que contiene x^8 en el desarrollo de $(3x^3 - 2xy)^6$.

(13) Escribe el término que contiene x^{31} en el desarrollo de $\left(\frac{2x^2}{y} - \frac{y^2}{x}\right)^{20}$.