Ve světě a před světem

Práce při zvedání tělesa

Žán Pól Kastról

6. března 2022

1 Zvedání rovnoměrným pohybem

Příklad 1: Klidná služba

Ruka zákona zvedá v *homogenním tíhovém poli* kuličku o hmotnosti $m = 0{,}3\,\mathrm{kg}$ **rovnoměrným přímočarým pohybem** rychlostí $v = 3\,\mathrm{ms}^{-1}$ do výšky $h = 5\,\mathrm{m}$. Tíhové zrychlení je $g = 10\,\mathrm{ms}^{-2}$, odpor vzduchu zanedbáváme. Urči práci

a) síly ruky $\overrightarrow{F_R}$
b) síly tíhové $\overrightarrow{F_G}$.
c) síly výsledné $\overrightarrow{F_v}$

Na kuličku působí vzhůru síla ruky $\overrightarrow{F_R}$ a dolů síla tíhová $\overrightarrow{F_G}$ (viz obr.1). Odpor vzduchu zanedbáme. Pač pohyb je $\mathcal{RPP}$, musí být výsledná síla rovna nule:

$$\overrightarrow{F_v} = \overrightarrow{F_R} + \overrightarrow{F_G} = \overrightarrow{0}$$

Proto obě síly mají stejnou velikost:

$$F_R = F_G$$

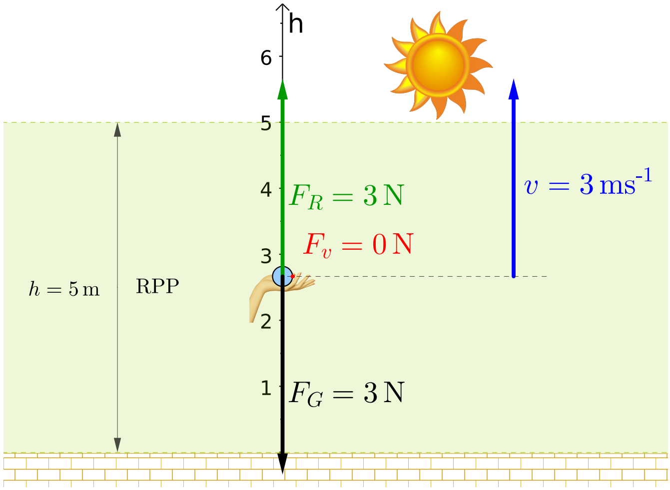
Ale síla tíhová je dána vztahem

$$F_G = mg \tag{1}$$

Proto i pro sílu ruky potřebnou na rovnoměrné přímočaré zvedání tělesa v homogenním tíhovém poli platí

$$\boxed{F_R = mg} \tag{2}$$

V homogenním tíhovém poli tudíž zvedáme těleso při rovnoměrném přímočarém pohybu silou stejně velkou jako síla tíhová.



Obr. 1: Zvedání *rovnoměrným přímočarým pohybem.*

https://www.geogebra.org/m/gw8hjam2

Číselně tedy:

$$\boxed{F_R = 3\,\mathrm{N}}$$

a) Práce **síly ruky** bude **kladná**, pač tato síla působí **ve směru pohybu**, přesněji **vektor síly je souhlasně orientovaný s vektorem rychlosti**:

$$W_R = +F_R h$$

Dle vztahu (2) je tedy

$$\boxed{W_R = mgh} \tag{3}$$

Číselně:

$$\boxed{W_R = 0.5 \cdot 10 \cdot 5 = 15\,\mathrm{J}}$$

b) Práce **síly tíhové** bude **záporná**, pač tato síla působí **proti směru pohybu**, přesněji **vektor tíhové síly je opačně orientovaný než vektor rychlosti**:

$$W_G = -F_G h$$

Dle vztahu (1) je tedy

$$\boxed{W_G = -mgh} \tag{4}$$

Číselně:

$$\boxed{W_G = -0.3 \cdot 10 \cdot 5 = -15\,\mathrm{J}}$$

c) Práce **výsledné síly** bude samozřejmě **nulová**, protože sama výsledná síla je nulová. To je v souladu s tím, že součet W_R a W_G je nulový

$$\boxed{W_v = W_R + W_G = 0} \tag{5}$$

Poznámka: To, že je výsledná síla nulová, souvisí s tím, že těleso nemění svou rychlost. To, že je výsledná práce (práce výsledné síly – sedy součet prací všech zúčastněných sil) nulová, znamená, že se nemění kinetická energie tělesa.

Poznámka: Všimněme si, že práce síly ruky vůbec **nezávisí na rychlosti zvedání**. Kulička již má při dané rychlosti nějakou kinetickou energii, která se dále nemění, a práce síly ruky slouží jen k udržování $\mathcal{RPP}$ proti působení tíhové síly, nebo-li ke zvyšování potenciální energie kuličky v tíhovém poli.

2 Zvedání rovnoměrně zrychleným pohybem

Příklad 2: Mimořádná událost

Ruka zákona zvedá v *homogenním tíhovém poli* kuličku o hmotnosti $m = 0{,}3\,\mathrm{kg}$ **z klidu rovnoměrně zrychleným přímočarým pohybem** se zrychlením $a = 4\,\mathrm{ms}^{-2}$ do výšky $h = 5\,\mathrm{m}$. Urči práci

a) síly ruky $\overrightarrow{F_R}$

b) síly tíhové $\overrightarrow{F_G}$.

c) síly výsledné $\overrightarrow{F_v}$

Na kuličku působí vzhůru síla ruky $\overrightarrow{F_R}$ a dolů síla tíhová $\overrightarrow{F_G}$ (viz obr.2). Odpor vzduchu zanedbáme. Pač pohyb je $\mathcal{RZP}$, musí výsledná síla $\overrightarrow{F_v}$ být nenulová a mířit nahoru, ve směru pohybu, takže síla ruky $\overrightarrow{F_R}$ musí být větší než síla $\overrightarrow{F_G}$ a pro velikost výslednice tudíž platí

$$F_v = F_R - F_G$$

Odtud pro sílu ruky dostáváme:

$$F_R = F_G + F_v$$

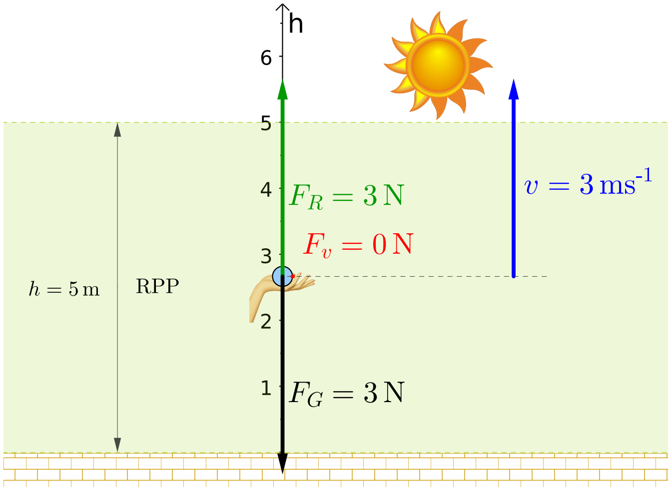
Protože $F_G = mg$ a dle Newtonova zákona pro výslednici platí $F_v = ma$, máme:

$$\boxed{F_R = mg + ma = m(g + a)} \tag{6}$$

V homogenním tíhovém poli tudíž zvedáme těleso při rovnoměrně zrychleném přímočarém pohybu silou větší než je síla tíhová.

Číselně tedy:

$$F_R = 0,3(10 + 4)\mathrm{N}$$



Obr. 2: Zvedání *rovnomě zrychleným přímočarým pohybem.*

https://www.geogebra.org/m/bxj5vf6m

$$\boxed{F_R = 4{,}2\,\mathrm{N}}$$

a) Práce **síly ruky** bude **kladná**, pač tato síla působí **ve směru pohybu**, přesněji **vektor síly je souhlasně orientovaný s vektorem rychlosti**:

$$W_R = F_R h$$

Dle vztahu (18) je tedy

$$\boxed{W_R = mgh + mah = m(g + a)h} \tag{7}$$

Číselně:

$$\boxed{W_R = 0.3 \cdot (10 + 4) \cdot 5 = 18\,\mathrm{J}}$$

b) Práce **síly tíhové** bude **záporná**, pač tato síla působí **proti směru pohybu**, přesněji **vektor tíhové síly je opačně orientovaný než vektor rychlosti**:

$$W_G = -F_G h$$

Pač $F_G = mg$ je tedy

$$\boxed{W_G = -mgh} \tag{8}$$

Číselně:

$$\boxed{W_G = -0.3 \cdot 10 \cdot 5 = -15\,\mathrm{J}}$$

c) Práce **výsledné síly** bude tedy

$$\boxed{W_v = W_R + W_G = 18\,\mathrm{J} - 15\,\mathrm{J} = 3\,\mathrm{J}} \tag{9}$$

Poznámka: To, že je výsledná síla nenulová, souvisí s tím, že těleso mění svou rychlost. To, že je výsledná práce (práce výsledné síly – tedy součet prací všech zúčastněných sil) kladná, znamená, že roste kinetická energie tělesa.

Poznámka: Porovnáme-li vztahy (2) a (18), vidíme, že při zrychleném zvedání tělesa z klidu je síla ruky větší než při zvedání rovnoměrném – a to o člen ma. To odpovídá tomu, že síla ruky musí nejen kompenzovat sílu tíhovou, ale navíc musí těleso urychlovat.

Poznámka: Porovnáme-li vztahy (3) a (7), vidíme, že při zrychleném zvedání tělesa z klidu je práce ruky větší než při zvedání rovnoměrném – a to o člen mah. To odpovídá tomu, že práce síly ruky se musí použít jednak na zvýšení potenciální energie, ale též na zvýšení kinetické energie tělesa.

Snadno se přesvědčíme o tom, že člen mah je vlastně kinetická energie kuličky na konci dráhy h. Stačí si vzpomenout na známý vztah mezi zrychlením a, dráhou h a rychlostí v po uražení této dráhy při $\mathcal{RZP}$ s nulovou počáteční rychlostí:

$$a = \frac{v^2}{2h} \tag{10}$$

Odtud

$$mah = m \cdot \frac{v^2}{2\cancel{h}} \cdot \cancel{h} = \frac{1}{2}mv^2$$

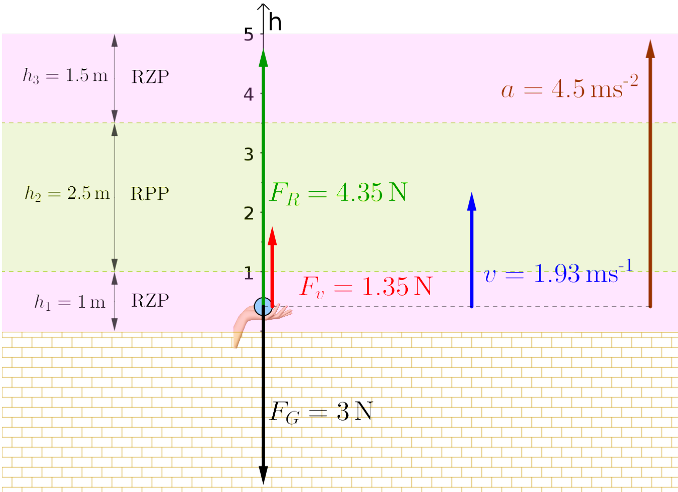
To je vskutku kinetická energie kuličky při rychlosti v, takže práci síly ruky můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$\boxed{W_R = mgh + \frac{1}{2}mv^2} \tag{11}$$

3 Zvedání z klidu do klidu

Příklad 3: Všechno bude zase v pořádku!

Ruka zákona zvedne v *homogenním tíhovém poli* kuličku o hmotnosti $m = 0{,}3\,\mathrm{kg}$ **z klidu** do **do klidu** do výšky $h = 5\,\mathrm{m}$. Nejprve se jedná o pohyb rovnoměrně zrychlený, kdy kulička urazí dráhu $h_1 = 1\,\mathrm{m}$ a na konci tohoto úseku má rychlost $v = 3\,\mathrm{ms}^{-1}$. Dále se kulička na dráze $h_2 = 2{,}5\,\mathrm{m}$ pohybuje touto rychlostí rovnoměrně přímočaře a na posledním úseku o délce $h_3 = 1{,}5\,\mathrm{m}$ rovnoměrně



Obr. 3: Úsek h_1

https://www.geogebra.org/m/ewdqhmem

zpomaleně zastaví. Urči práci

a) síly ruky $\overrightarrow{F_R}$

b) síly tíhové $\overrightarrow{F_G}$.

c) síly výsledné $\overrightarrow{F_v}$

3.1 Úsek h_1

Čummež na obr.3. Kulička se pohybuje $\mathcal{RZP}$ se zrychlením a_1, pro které dle (10) platí

$$\boxed{a_1 = \frac{v^2}{2h_1}} \tag{12}$$

Číselně

$$a_1 = \frac{3^2}{2 \cdot 1} = \underline{\underline{4{,}5\,[\mathrm{ms}^{-2}]}}$$

Práce síly ruky: Dle vztahu (18) platí pro sílu ruky:

$$\boxed{F_{R1} = mg + ma_1} \tag{13}$$

Číselně:

$$F_{R1} = 0,3 \cdot (10 + 4,5) = \underline{\underline{4{,}35\,[\mathrm{N}]}}$$

Odtud platí pro práci síly ruky:

$$W_{R1} = (mg + ma_1)h_1 = mgh_1 + ma_1h_1 = mgh_1 + m\frac{v^2}{2\cancel{h_1}}\cancel{h_1}$$

Odtud

$$\boxed{W_{R1} = mgh_1 + \frac{1}{2}mv^2} \tag{14}$$

Číselně:

$$W_{R1} = 0,3 \cdot 10 \cdot 1 + 0,5 \cdot 0,3 \cdot 3^2 = 3 + 1,35 = \underline{\underline{4{,}35\,[\mathrm{J}]}}$$

Práce síly tíhové: je záporná:

$$\boxed{W_{G1} = -mgh_1} \tag{15}$$

Číselně:

$$W_{G1} = -0,3 \cdot 10 \cdot 1 = \underline{\underline{-3\,[\mathrm{J}]}}$$

Práce výslednice: Výslednice má velikost

$$F_{v1} = F_{R1} - F_{G1} = 4,35 - 3 = \underline{\underline{1{,}35\,[\mathrm{N}]}}$$

Její práce je

$$W_{v1} = F_{v1}h_1 = ma_1h_1 = m\frac{v^2}{2\cancel{h_1}}\cancel{h_1}$$

Tedy

$$\boxed{W_{v1} = \frac{1}{2}mv^2} \tag{16}$$

Číselně

$$W_{v1} = 0,5 \cdot 0,3 \cdot 3^2 = 1{,}35\,[\mathrm{J}]$$

Poznámka: Všimněme si, že samozřejmě platí

$$\boxed{W_{v1} = W_{R1} + W_{G1}}$$

3.2 Úsek h_2

Čummež na obr.4. Kulička se pohybuje $\mathcal{RPP}$. Zrychlení je tedy nulové:

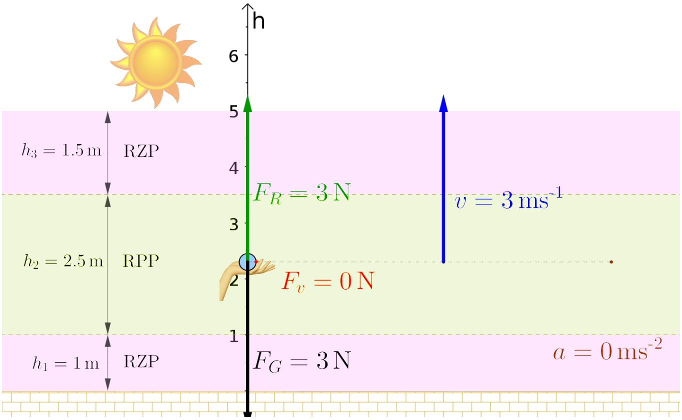
$$\boxed{a_2 = 0} \tag{17}$$

Práce síly ruky: Výslednice je nulová a velikost síly ruky je rovna velikosti síly tíhové:

$$\boxed{F_{R2} = mg} \tag{18}$$

Číselně:

$$F_{R2} = 0,3 \cdot 10 = \underline{\underline{3\,[\mathrm{N}]}}$$



Obr. 4: Úsek h_2

https://www.geogebra.org/m/ewdqhmem

Pro práci síly ruky platí:

$$\boxed{W_{R2} = mgh_2} \tag{19}$$

Číselně:

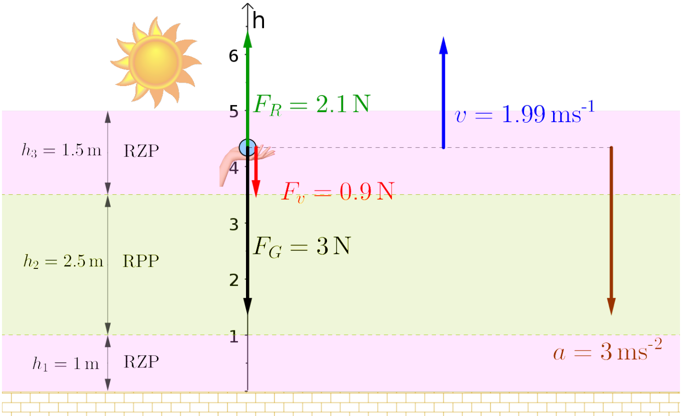
$$W_{R2} = 3 \cdot 2.5 = \underline{\underline{7{,}5\,[\mathrm{J}]}}$$

Práce síly tíhové: Tato práce je záporná:

$$\boxed{W_{G2} = -mgh_2} \tag{20}$$

Číselně:

$$W_{G2} = \underline{\underline{-7{,}5\,[\mathrm{J}]}}$$



Obr. 5: Úsek h_3

https://www.geogebra.org/m/ewdqhmem

Práce síly výsledné: Pač je výslednice nulová, je nulová i její práce:

$$\boxed{W_{v2} = 0} \tag{21}$$

Poznámka: Všimněme si, že opět platí

$$\boxed{W_{v2} = W_{R2} + W_{G2}}$$

3.3 Úsek h_3

Čummež na obr.5. Kulička se pohybuje $\mathcal{RZP}$ a **zpomaluje** se zrychlením a_3, pro jehož velikost dle (10) platí

$$\boxed{a_3 = \frac{v^2}{2h_3}} \tag{22}$$

Číselně:

$$a_3 = \frac{3^2}{2 \cdot 1,5} = \underline{\underline{3\,[\mathrm{ms}^{-2}]}}$$

Práce síly ruky: Zrychlení míří dolů, takže výslednice musí mířit rovněž dolů a síla ruky bude menší než síla tíhová. Platí:

$$F_{v3} = F_{G3} - F_{R3}$$
$$F_{R3} = F_{G3} - F_{v3}$$

Dostáváme

$$\boxed{F_{R3} = mg - ma_3} \tag{23}$$

Číselně:

$$F_{R3} = 0,3 \cdot 10 - 0,3 \cdot 3 = \underline{\underline{2{,}1\,[\mathrm{N}]}}$$

Pro práci síly ruky platí:

$$W_{R3} = (mg - ma_3)h_3 = mgh_3 - ma_3h_3 = mgh_3 - m\frac{v^2}{2\cancel{h_3}}\cancel{h_3}$$

Odtud:

$$\boxed{W_{R3} = mgh_3 - \frac{1}{2}mv^2} \tag{24}$$

Číselně:

$$W_{R3} = 0,3 \cdot 10 \cdot 1,5 - 0,5 \cdot 0,3 \cdot 3^2 = 4,5 - 1,35 = \underline{\underline{3{,}15\,[\mathrm{J}]}}$$

Práce síly tíhové: Platí:

$$\boxed{W_{G3} = -mgh_3} \tag{25}$$

Číselně:

$$W_{G3} = -0,3 \cdot 10 \cdot 1,5 = \underline{\underline{-4{,}5\,[\mathrm{J}]}}$$

Práce síly výsledné: Výslednice má velikost

$$F_{v3} = F_G - F_R = 3 - 2,1 = \underline{\underline{0{,}9\,[\mathrm{N}]}}$$

Její práce je záporná:

$$W_{v3} = -F_{v3}h_3 = -ma_3h_3 = -m\frac{v^2}{2\cancel{h_3}}\cancel{h_3}$$

Tedy

$$\boxed{W_{v3} = -\frac{1}{2}mv^2} \tag{26}$$

Číselně

$$W_{v3} = -0,5 \cdot 0,3 \cdot 3^2 = -1{,}35\,[\mathrm{J}]$$

Poznámka: Vidíme, že opět platí

$$\boxed{W_{v3} = W_{R3} + W_{G3}}$$

3.4 Souhrn a výsledky

a) **Celková práce síly ruky** vznikne součtem vztahů (14), (19) a (24):

$$W_R = W_{R1} + W_{R2} + W_{R3}$$

$$= mgh_1 + \cancel{\frac{1}{2}mv^2} + mgh_2 + mgh_3 - \cancel{\frac{1}{2}mv^2}$$
$$= mg(h_1 + h_2 + h_3)$$

Pač $h_1 + h_2 + h_3 = h$, dostáváme

$$\boxed{W_R = mgh} \tag{27}$$

Práce ruky **z klidu do klidu** je stejná jako práce při $\mathcal{RPP}$!

b) **Celková práce síly tíhové** vznikne součtem vztahů (15), (20) a (25):

$$\begin{aligned} W_G &= W_{G1} + W_{G2} + W_{G3} \\ &= -mgh_1 - mgh_2 - mgh_3 \\ &= -mg(h_1 + h_2 + h_3) \end{aligned}$$

Pač $h_1 + h_2 + h_3 = h$, dostáváme

$$\boxed{W_G = -mgh} \tag{28}$$

Ta zemská tíže nás **nechce** k Slunci pustit!

c) **Celková práce síly výsledné** vznikne součtem vztahů (16), (21) a (26):

$$\begin{aligned} W_v &= W_{v1} + W_{v2} + W_{v3} \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + 0 - \frac{1}{2}mv^2 \end{aligned}$$

Dostáváme

$$\boxed{W_v = 0} \tag{29}$$

Ve světě se mele plus a minus a ve výsledku máš **hovno**!

3.5 Kon-kluze

Ale co před světem?

$\triangle$

Da Sista Les

∞

.