Ejercicios para pasar de tabla de contingencia a diagrama de árbol y viceversa

CURSO	**TEMA**	**WWW.DANIPARTAL.NET**
2ºBach	PROBABILIDAD 12	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

INFORMACIÓN GENERAL

Ejercicios prácticos para pasar de tabla de contingencia a diagrama de árbol, y viceversa.

Vídeo asociado:

https://youtu.be/1zjc5_gcKqs

EJERCICIO 1

Dada la tabla de contingencia siguiente, determina si los sucesos son dependientes o independientes. Dibuja el diagrama de árbol asociado, considerando A como primer suceso temporal y B como segundo suceso temporal.

	A	$\bar{A}$	Totales
B	2/9	5/9	7/9
$\bar{B}$	1/9	1/9	2/9
Totales	3/9 = 1/3	6/9 = 2/3	1

Forma 1 para determinar si son dependientes o independientes

Dos sucesos A y B son dependientes si cumplen la siguiente relación:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) \rightarrow \boldsymbol{P(B/A)} = \frac{\boldsymbol{P(A \cap B)}}{\boldsymbol{P(A)}} \text{ , } siempre\ que\ P(A) \neq 0$$

Mientras que son independientes si cumplen:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Viendo la tabla de contingencia, es inmediato comprobar los siguientes resultados:

$P(A) = 1/3$ (acumulado de la columna A)

$P(B) = 7/9$ (acumulado de la fila B)

$P(A \cap B) = 2/9$ (celda intersección de la fila A y de la columna B)

Si realizamos el producto de la probabilidad P(A) y de la probabilidad P(B), podemos compararlo con el resultado de la probabilidad de la intersección.

$P(A) \cdot P(B) = 1/3 \cdot 7/9 = 7/27$

Comprobamos que el resultado obtenido en el producto no coincide con el valor de la probabilidad de la celda de la intersección: $7/27 \neq 2/9 \rightarrow$ **A y B son dependientes**.

Forma 2 para determinar si son dependientes o independientes

Una segunda forma de razonar es la siguiente: dos sucesos A y B son independientes si cumplen las siguientes igualdades:

$$P(A/B) = P(A)$$

$$P(B/A) = P(B)$$

Podemos obtener las probabilidades condicionas y comprobar si coinciden con las probabilidades totales que aparecen en la tabla.

$$P(A/B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{2/9}{7/9} = 2/7$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2/9}{1/3} = 2/3$$

De la tabla de contingencia ya hemos comentado que:

$P(A) = 1/3$ (acumulado de la columna A)

$P(B) = 7/9$ (acumulado de la fila B)

Es fácil observar que:

$$2/7 \neq 1/3 \rightarrow P(A/B) \neq P(A)$$

$$2/3 \neq 7/9 \rightarrow P(B/A) \neq P(B)$$

Los sucesos **A y B son dependientes**.

Diagrama de árbol

La tabla de contingencia muestra probabilidades de intersecciones. Mientras que los diagramas de árbol muestran probabilidades condicionadas.

Si partimos del suceso A y de su complementario $\bar{A}$, deberemos calcular las probabilidades de B y $\bar{B}$ condicionadas a que antes se haya cumplido o no A. Es decir:

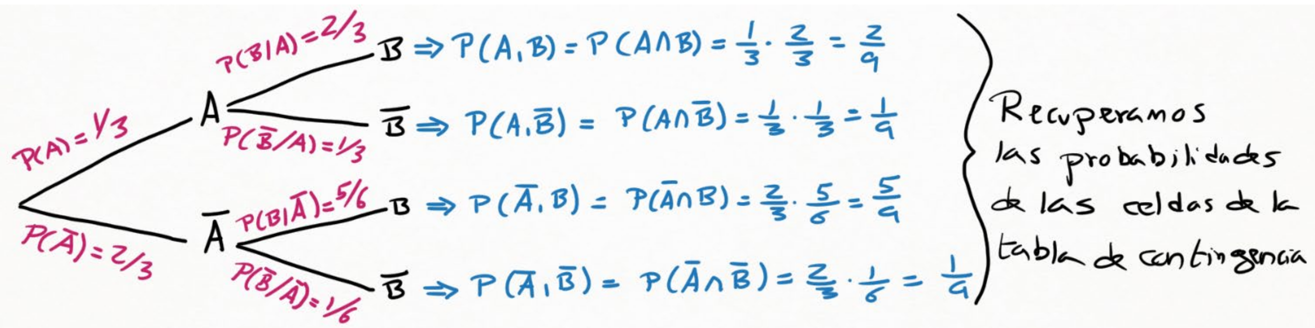
$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2/9}{1/3} = 2/3$$

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{5/9}{2/3} = 5/6$$

$$P(\bar{B}/A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = \frac{1/9}{1/3} = 1/3$$

$$P(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{A})} = \frac{1/9}{2/3} = 1/6$$

Con las probabilidades condicionadas podemos dibujar el diagrama de árbol. Fíjate que, al final de cada rama, podemos a su vez recuperar las probabilidades de la tabla de contingencia.



EJERCICIO 2

Dada la siguiente tabla de contingencia, calcular:

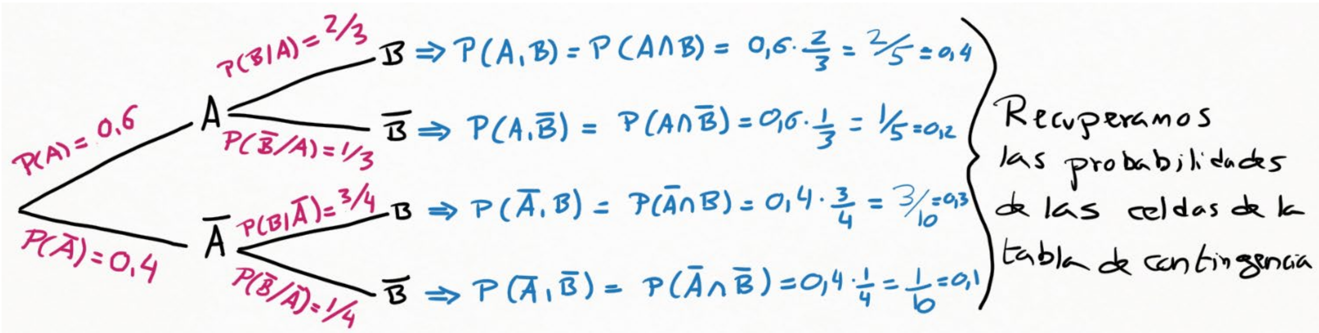
a) La probabilidad de que acontezca A y B.
b) La probabilidad de que ocurra A y el opuesto de B.
c) La probabilidad de que ocurra el opuesto de A y B.
d) La probabilidad de que ocurra el opuesto de A y el opuesto de B.
e) La probabilidad de A condicionada a que haya ocurrido B.
f) La probabilidad de A condicionada a que no haya ocurrido B.
g) La probabilidad de B condicionada a que haya ocurrido A.
h) La probabilidad de B condicionada a que no haya ocurrido A.
i) El diagrama de árbol que comienza con la bifurcación de A y de su opuesto.

	A	$\bar{A}$	Totales
B	0,4	0,3	0,7
$\bar{B}$	0,2	0,1	0,3
Totales	0,6	0,4	1

a) $P(A \cap B) = 0{,}4$ (fíjate que es lo mismo $\mathrm{P(A \cap B)}$ que $\mathrm{P(B \cap A)}$)
b) $P(A \cap \bar{B}) = 0{,}2$
c) $P(\bar{A} \cap B) = 0{,}3$
d) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}1$
e) $P(A/B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{0{,}4}{0{,}7} = 4/7$
f) $P(A/\bar{B}) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(\bar{B})} = \frac{0{,}2}{0{,}3} = 2/3$
g) $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}4}{0{,}6} = 4/6 = 2/3$
h) $P(B/\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = 3/4$
i) Para dibujar el diagrama de árbol que nade de la ramificación de A y su opuesto, además de algunas de las probabilidades de los apartados anteriores, vamos a necesitar conocer:

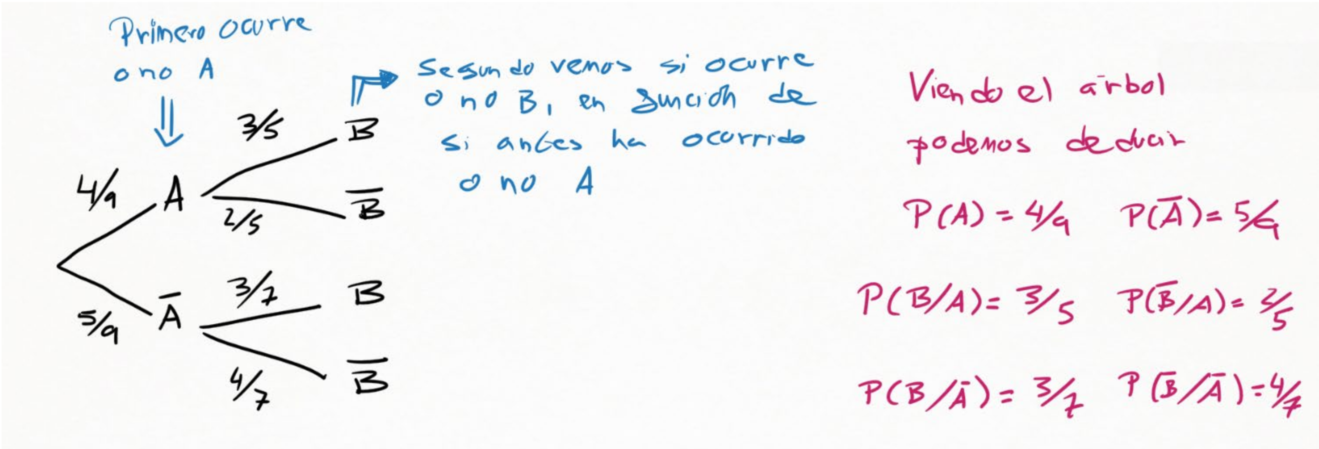
$$P(\bar{B}/A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = \frac{0{,}2}{0{,}6} = 2/6 = 1/3$$
$$P(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{A})} = \frac{0{,}1}{0{,}4} = 1/4$$

Nuevamente, al final de cada rama del diagrama de árbol, recuperamos las probabilidades de las celdas de la tabla de contingencia. Y si sumamos las probabilidades de las cuatro ramas finales, obtenemos el valor 1.



EJERCICIO 3

Pasar del siguiente diagrama de árbol a su correspondiente tabla de contingencia.



Tal y como viene resaltado en rojo, mirando el diagrama de árbol podemos obtener las probabilidades totales de A y de su complementario, al igual que las probabilidades de B y su opuesto condicionadas a que haya ocurrido o no el suceso A.

Recuerda, una vez más, que los diagramas de árbol dan probabilidades condicionadas mientras que las tablas de contingencia dan probabilidades de intersecciones. Y podemos relacionar ambos valores con las expresiones:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = 4/9 \cdot 3/5 = 4/15$$
$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B}/A) = 4/9 \cdot 2/5 = 8/45$$
$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B/\bar{A}) = 5/9 \cdot 3/7 = 5/21$$
$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}/\bar{A}) = 5/9 \cdot 4/7 = 20/63$$

	A	$\bar{A}$	Totales
B	4/15	5/21	53/105
$\bar{B}$	8/45	20/63	52/105
Totales	4/9	5/9	1

EJERCICIO 4

En un club deportivo, el 55% de los socios practica natación, el 65% practica tenis, y el 10% no practica ni natación ni tenis.

a) Si el club tiene 1200 socios, ¿cuántos practicarían ambos deportes?

b) Tomando al azar una persona de este club que practique natación, calcula la probabilidad de que no juegue al tenis.

a) Podemos resolverlo con una tabla de contingencia, ya que aparecen probabilidades de intersección.

	Natación	No Natación	Totales
Tenis			0,65
No Tenis		0,1	
Totales	0,55		1

Completamos la tabla, señalando en rojo el contenido de las celdas que deducimos. Indico también el orden en orden en que voy razonando para completar las celdas.

	Natación	No Natación	Totales
Tenis	CUARTO CÁLCULO 0,55-0,35=0,20	QUINTO CÁLCULO 0,45-0,10=0,35	0,65
No Tenis	TERCER CÁLCULO 0,35-0,10=0,25	0,1	SEGUNDO CÁLCULO 1-0,65=0,35
Totales	0,55	PRIMER CÁLCULO 1-0,55=0,45	1

Los socios que practican ambos deportes están en la celda de intersección de Natación y Tenis. Son el 25%. Por lo que aplicamos este porcentaje al total de 1200 socios:

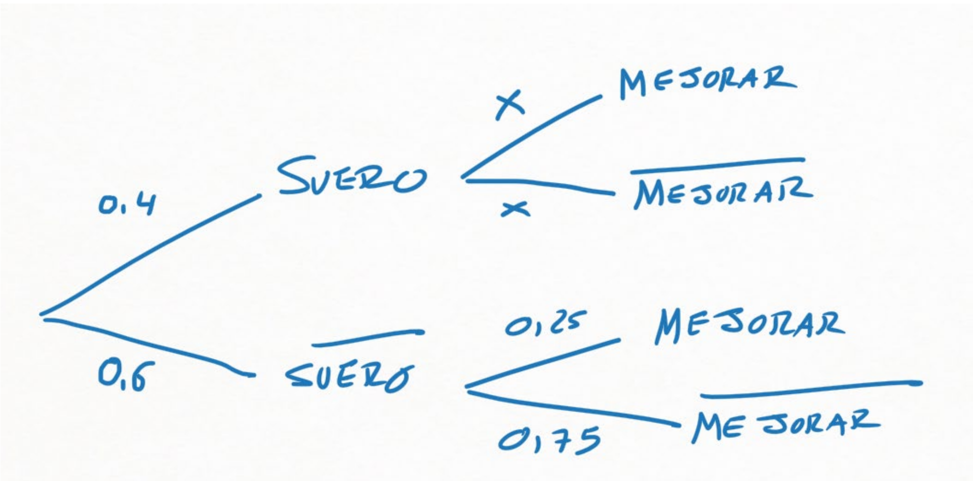
$$0{,}25 \times 1.200 = 300 \; socios$$

b) La probabilidad de no jugar al tenis es la probabilidad total almacenada al final de la fila del suceso "No Tenis". Es decir, 0,35. O en tanto por ciento, 35%.

EJERCICIO 5

En el enfermero de la doctora Martínez no se puede confiar, pues durante la ausencia del médico la probabilidad de que no le inyecte un suero a un enfermo es de 0,6. Se sabe que si a un enfermo grave se le inyecta el suero tiene igual probabilidad de mejorar que de empeorar, pero si no se le inyecta entonces la probabilidad de que mejore es de 0,25. A su regreso, la Dra. Martínez se encuentra con que un enfermo ha empeorado. Calcula la probabilidad de que el enfermero olvidara inyectar el suero a este paciente.

Planteamos diagrama de árbol, al aparecer probabilidades condicionadas. El complementario de Suero es No aplicar el suero. Y el complementario de mejorar es empeorar.



Los valores "x" serán iguales a 0,50, ya que tenemos dos ramas cuya suma de probabilidades debe ser igual a 1.

Sabiendo seguro que el enfermo ha empeorado, la probabilidad de que el enfermero olvidase inyectar el suero es P(No Suero / No Mejorar).

Podemos aplicar Teorema de Bayes (que veremos al final del tema), o razonar con Regla de Laplace: de todos los camino que implican empeorar (casos totales), nos quedamos solo con aquel que también implica no aplicar el suero (casos favorables).

$$P(No\ Suero/No\ mejorar) = \frac{P(No\ Suero\ \cap\ No\ Mejorar)}{P(No\ Mejorar)}$$

$$P(No\ Suero/No\ mejorar) = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}75}{0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}6 \cdot 0{,}75} = 0{,}6923$$

Es decir, una probabilidad del 69,23%.

EJEMPLO 6

En un estudio realizado en una sucursal bancaria se ha determinado que el 70% de los créditos concedidos son hipotecarios y el 25% de los créditos superan los 200.000€. El 20% de los créditos son hipotecarios y de más de 200.000€. Se elige al azar un cliente al que le han concedido un crédito. Calcule la probabilidad de que:

a) El crédito no sea hipotecario y no supere los 200.000€.

b) Si su crédito no es hipotecario, este no supere los 200.000€.

c) Si su crédito supera los 200.000€, que este no es hipotecario.

a) Nos hablan de probabilidades de intersecciones (créditos hipotecarios y de más de 200.000€). Además, el enunciado habla de probabilidades totales (70% de créditos hipotecarios y 25% de créditos que superan los 200.000€). Por lo tanto, al no aparecer probabilidades condicionadas, es más cómodo plantear inicialmente una tabla de contingencia.

La siguiente tabla muestra los datos del enunciado.

	Hipotecarios	No Hipotecarios	Totales
Más de 200.000€	0,20		0,25
Menos o igual a 200.000€			
Totales	0,70		1

Y la siguiente tabla contiene los cálculos necesarios para obtener los valores del resto de celdas.

	Hipotecarios	No Hipotecarios	Totales
Más de 200.000€	0,20	CUARTO CÁLCULO 0,25-0,20=0,05	0,25
Menor o igual a 200.000€	PRIMER CÁLCULO 0,70-0,20=0,50	QUINTO CÁLCULO 0,30-0,05=0,25	TERCER CÁLCULO 1-0,25=0,75
Totales	0,70	SEGUNDO CÁLCULO 1-0,70=0,30	1

a) Mirando la celda de la tabla intersección entre no hipotecario y no superar los 200.000€, obtenemos la probabilidad de este apartado: 0,25 (25%).

b) Sabiendo seguro que el crédito no es hipotecario, obtener la probabilidad de no superar los 200.000€ implica aplicar probabilidad condicionada:

$$P(No\ superar\ los\ 200.000€/No\ hipotecario) = \frac{P(No\ superar\ los\ 200.000€\ \cap\ No\ hipotecario)}{P(No\ hipotecario)}$$

El numerador coincide con el valor del apartado a) (recuerda que la probabilidad de la intersección es conmutativa). El denominador es la probabilidad total de no ser hipotecario.

$$P(No\ superar\ los\ 200.000€/No\ hipotecario) = \frac{0{,}25}{0{,}30} = \frac{5}{6} = 0{,}833\ldots = 83{,}33\%$$

c) Sabiendo seguro que el crédito supera los 200.000€, la probabilidad de no ser hipotecario nos lleva a una nueva probabilidad condicionada:

$$P(No\ ser\ hipotecario\ /\ Superar\ los\ 200.000€) = \frac{P(No\ ser\ hipotecario \cap\ Superar\ los\ 200.000€)}{P(Superar\ los\ 200.000€)}$$

$$P(No\ ser\ hipotecario\ /\ Superar\ los\ 200.000€) = \frac{0{,}05}{0{,}25} = \frac{1}{5} = 0{,}20 = 20\%$$

EJEMPLO 7

En su tiempo libre, el 65% de los estudiantes de un centro educativo juega con videojuegos, el 45% lee libros y el 15% no hace ninguna de las dos cosas. Elegido al azar un estudiante de dicho centro, calcule la probabilidad de que:

a) Juegue con videojuegos o lea libros.

b) Juegue con videojuegos y no lea libros.

c) Lea libros sabiendo que no juega con videojuegos.

a) Optamos por una tabla de contingencia por aparecer probabilidades totales, aparecer probabilidad de intersección y no aparecer probabilidad condicionada en el enunciado.

	Videojuegos	No Videojuegos	Totales
Lee libros			0,45
No lee libros		0,15	
Totales	0,65		1

	Videojuegos	No Videojuegos	Totales
Lee libros	0,65-0,40=0,25	0,35-0,15=0,20	0,45
No lee libros	0,55-0,15=0,40	0,15	1-0,45=0,55
Totales	0,65	1-0,65=0,35	1

Jugar a videojuegos o leer libros implica la unión de los dos sucesos:

$$P(videojuegos\ \cup libros) = P(videojuegos) + P(libros) - P(videojuegos \cap libros)$$

La probabilidad de la intersección la encontramos en la celda que un el suceso videojuegos con el suceso leer libros.

$$P(videojuegos\ \cup libros) = 0{,}65 + 0{,}45 - 0{,}25 = 0{,}85 = 85\%$$

b) Jugar con videojuegos y no leer libros es la celda que une ambos sucesos en la tabla de contingencia:

$$P(videojuegos\ \cap no\ leer\ libros) = 0{,}40 = 40\%$$

c) Sabiendo seguro que no juega a videojuegos, la probabilidad de leer libros nos lleva a una probabilidad condicionada:

$$P(Leer\ libros/No\ videojuegos) = \frac{P(Leer\ libros\ \cap\ No\ videojuegos)}{P(No\ videojuegos)}$$

$$P(No\ juega\ a\ videojuegos/Leer\ libros) = \frac{0{,}20}{0{,}35} = \frac{4}{7} \approx 0{,}5714 \approx 57{,}14\%$$

EJEMPLO 8

De las compras realizadas en el último periodo del pasado año, el 55% se dedicaron a productos electrónicos, el 72% se hicieron a través de Internet y, de las compras que se hicieron por Internet, el 64% fueron productos electrónicos. Se elige una compra al azar.

a) Calcule la probabilidad de que haya sido de productos electrónicos y se haya realizado por Internet.

b) Calcule la probabilidad de que la compra se haya realizado por Internet o que se hayan comprado productos electrónicos.

c) Calcule la probabilidad de que sabiendo que no se compraron productos electrónicos, la compra no se hiciera a través de Internet.

a) En el enunciado aparece una probabilidad condicionada: sabiendo seguro que las compras se hicieron por internet, el 64% compró productos electrónicos. Por lo que podemos relacionar esa probabilidad condicionada con una probabilidad de intersección:

$$P(electrónicos\ /\ internet) = \frac{P(electrónicos\ \cap internet)}{P(internet)}$$

$$0{,}64 = \frac{P(electrónicos\ \cap internet)}{0{,}72}$$

$$P(electrónicos\ \cap internet) = 0{,}64 \times 0{,}72 = 0{,}4608$$

Este valor nos sirve para responder el apartado a) del ejercicio y para completar la siguiente tabla de contingencia.

	Productos electrónicos	Productos no electrónicos	Totales
Internet	0,4608	0,72-0,4608=0,2592	0,72
No Internet	0,55-0,4608=0,0892	0,45-0,2592=0,1908	1-0,72=0,28
Totales	0,55	1-0,55=0,45	1

b) La probabilidad de comprar por internet o de comprar un producto electrónico es la probabilidad de la unión de ambos sucesos:

$$P(internet\ \cup producto\ electrónico) = P(internet) + P(electrónico) - P(internet \cap electrónico)$$

$$P(internet\ \cup producto\ electrónico) = 0{,}72 + 0{,}55 - 0{,}4608 = 0{,}8092 = 80{,}92\%$$

c) Buscamos la probabilidad condicionada siguiente: sabiendo seguro que no es un producto electrónico, la probabilidad de que la compra no se hiciera por internet.

$$P(no\ internet\ /\ no\ producto\ electrónico) = \frac{P(no\ internet\ \cap no\ producto\ electrónico)}{P(no\ producto\ electrónico)}$$

$$P(no\ internet\ /\ no\ producto\ electrónico) = \frac{0{,}1908}{0{,}45} = 0{,}424 = 42{,}4\%$$