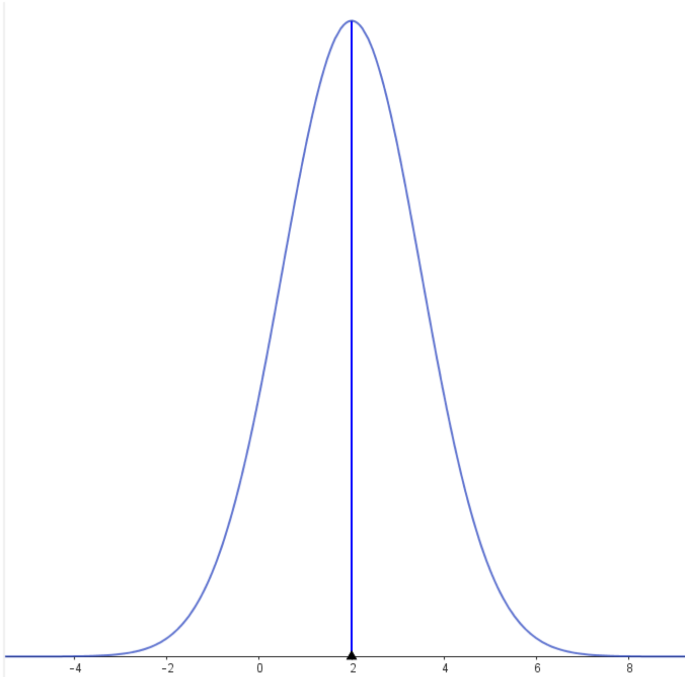
☺ **Distribución Normal. X ~** $N(\mu,\sigma)$ **.**

Una v. a. X tiene distribución Normal de parámetros $\mu\in\mathbb{R},\sigma\in\mathbb{R}^{+}$.

si tiene como función de densidad: $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$



Ejemplo de f(x) para $\mu=2$ *y* $\sigma=1{,}5$

Para calcular la función de distribución, se utiliza la integración numérica o tablas de valores ya calculados de $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\cdot dt$ (Int, numérica) = $Prb_X((-\infty\leq X\leq x])$. Además

$P(a\leq X<b)=F(b)-F(a)$.

Se comprueba que f es una función de probabilidad, como la función exponencial es mayor que 0, al ser $\sigma>0$, utilizando la función Gamma y Beta, siendo:

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} t^{p-1}\cdot e^{-t}\cdot dt \quad ; \qquad \mathrm{B}(p,q)=\int_0^{1} t^{p-1}\cdot(1-T)^{q-1}\cdot dt \qquad p,q\geq 0$$

Que además, se cumple:

1.- $\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t}\cdot dt=\left\{\begin{matrix} Integrando\ por\ partes \\ u=t^{p-1} \\ dv=e^{-t}\end{matrix}\right\}=(p-a)\cdot\Gamma(p)$

2.- $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot dt=1$

3.- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t}\cdot dt=\left\{\begin{matrix} haciendo \\ t=y^2\end{matrix}\right\}=\int_0^{+\infty}(y^2)^{\frac{1}{2}-1} e^{-y^2}\cdot d(y^2)=2\cdot\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\cdot dy$

4.- $$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}\cdot(1-t)^{q-1}\cdot dt=\begin{Bmatrix} haciendo \\ t=(sen\,x)^2 \end{Bmatrix}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sen\,x)^{2\cdot p-1}\cdot(\cos x)^{2\cdot q-1}\cdot dx$$

$$\Rightarrow \mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=1$$

5.- $$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\Rightarrow\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}=\pi\Rightarrow\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2=\pi\Rightarrow\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

Por tanto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\cdot dx;\ \text{hacemos el cambio}\ y=\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\cdot\sigma}, queda:$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_0^{+\infty}e^{-y^2}\cdot dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi}=1$$

Algunos de sus parámetros o momentos destacables, se demuestran utilizando la función generatriz de momentos.

$$\psi_X(t)=E\{e^{t\cdot X}\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{\left(t\cdot x-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right)}\cdot dx$$

Que teniendo en cuenta que:

$$t\cdot x-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2=\frac{2\cdot\sigma^2\cdot t\cdot x-x^2+2\cdot x\cdot\mu-\mu^2}{2\cdot\sigma^2}=$$

$$=\frac{2\cdot\sigma^2\cdot\mu\cdot t-2\cdot\sigma^2\cdot\mu\cdot t+\sigma^4\cdot t^2-\sigma^4\cdot t^2+2\cdot\sigma^2\cdot t\cdot x-x^2+2\cdot x\cdot\mu-\mu^2}{2\cdot\sigma^2}=$$

$$=\mu\cdot t+\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot t^2-\frac{\left(x-\left(\mu+\sigma^2\cdot t\right)\right)^2}{2\cdot\sigma^2}$$

Se cumplirá:

$$\psi_X(t)=e^{\mu\cdot t+\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot t^2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\left(\frac{\left(x-\left(\mu+\sigma^2\cdot t\right)\right)^2}{2\cdot\sigma^2}\right)}\cdot dx$$

Y si hacemos el cambio en la integral $\mu'=\mu+\%sigma^2\cdot t$, tenemos:

$$\psi_X(t)=e^{\mu\cdot t+\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot t^2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\left(\frac{(x-\mu')^2}{2\cdot\sigma^2}\right)}\cdot dx=e^{\mu\cdot t+\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot t^2}$$

- ✔ $E\{X\}=\psi'_X(0)=\mu$.
- ✔ $E\left\{(X-E\{X\})^2\right\}=\psi''_X(0)-(\psi'_X(0))^2=\sigma^2$.
- ✔ $\phi(t)=e^{\mu\cdot t\cdot\hat{\imath}+\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot t^2}$

Algunas observaciones:

- Si X es una v. a. de distribución $N(\mu, \sigma)$, e $Y = a \cdot X + b$, con a y b constantes $a \neq 0$, Y será una v. a. de distribución $N(a \cdot \mu + b, a \cdot \sigma)$.
- Si X_i es una v. a. de distribución $N(\mu_i, \sigma_i), i = 1,2,...,k$, y son variables independientes, e $Y = X_1 + X_2 + ... + X_k$, Y será una distribución normal de media $\%my_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k$, y de varianza $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_k^2$