

# 美妙的古埃及之旅

深圳市荔園小學 魏彬

前言：當好教師並不容易。既要有豐富的學科知識，又需要有效地運用教學方法去指導兒童學習。本文作者和大家分享她一次愉快的教學經驗——古埃及人處理分數的方法。字裡行間活現了教師瞬時的創造力和師生互動的歷程。

作為一名教師，通過我的學生，我每天都在創造未來。 — Sharon Christa McAuliffe<sup>1</sup>

作為一名教師你是否有過或者聽過這樣的抱怨：現在的學生不想學數學，表現為，上課——沒精打采，課後——不願做數學作業，由此導致數學考試成績低落……

不知從何時起，數學成了孩子們心中抹不去的痛(誰敢放棄數學？因為放棄數學從某種程度上講，就是放棄升學)。在眾多學子的求學生涯中，數學是他們的最怕。為什麼孩子們對數學退避三舍？小學數學真的就那麼恐怖？

帶著這些疑惑，我訪談了幾個聲稱不喜歡數學的學生。傾聽他們的心聲：

「數學嗎，總是算、算、算。一點也不好玩。」

「數學課，一定是老師先講幾個例子，然後我們就去做題目；或者是我們一直做題，書上(指的是學生用的數學課本)的題目做完了，老師就再找來一些題目，不停地讓我們做。總是老一套，沒意思。」

童言無忌，卻又是一片真誠。目前，眾多的小學數學課堂中，老師進行過多、過細的講解，學生從事過量重複的練習，久而久之，孩子們厭煩了這種刻板、機械的教學方式和學習方式，厭煩了這些千篇一律、淡然無趣的數學題(不是數學，只是數學題)。試圖讓學生在這樣的學習環境中喜歡學習數學，體驗學習數學的樂趣，無異於天方夜譚。

一次偶然的機會，我了解到在數學史上的“單位分數”，又名為“古埃及分數”，以及有關“古埃及分數”的一些趣事<sup>2</sup>。憑著一種直覺，我感到如果把有

---

<sup>1</sup> S. McAuliffe 是 1986 年在“挑戰者號”太空船爆炸事件中遇難的美國女教師。

<sup>2</sup> 關於古埃及分數的教學從構想到實施均得到馮振業博士的指導與幫助，特此致謝。

關古埃及分數的內容引進小學數學課堂，可能會使沉悶的課堂變得活躍些，使枯燥的數學變得有趣些，使痛苦的學習歷程變得快樂些。

在這些想法的驅使下，我查閱了一些有關古埃及分數的資料，收集了一些相關圖片。然後與深圳某小學五年級學生一起進行了一次美妙的古埃及之旅。

這次古埃及之旅歷時三課節，分三天進行。三天的古埃及之旅，師生始終圍繞一個主題展開活動：

把一個真分數表成相異單位分數的和。

$$\text{例如, } \frac{7}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \dots\dots\dots$$

圍繞主題，師生共同研究了以下五個問題：

- 1、如何把一個真分數表成相異單位分數的和？你們可以想出幾種辦法？
- 2、單位分數本身是否可表成相異單位分數的和？
- 3、是否任何一個真分數都可表成相異單位分數的和？試說明理由。
- 4、一個真分數表成相異單位分數的和的方式有多少種？
- 5、是否所有的真分數都可表成兩個相異單位分數和的形式？為什麼？

不出所料，三天裡，數學課堂真的變得有趣而富有挑戰。上述五個問題對於五年級的學生來說並不容易。課堂上，學生從疑惑不解，不知所措，到苦思冥想，若有所悟，最後豁然開朗。在這一系列的過程中，學生感受到數學學習帶來的快樂。以下我以第一個和第五個問題的學習為例，讓大家一起來領略一下學生所經歷的思考過程，並分享在這些過程中師生獲得的喜悅。

我們先來欣賞一幅學生的作品。

The image shows a student's handwritten work on a piece of paper. It contains several mathematical expressions and attempts to decompose the fraction 7/15 into a sum of unit fractions. The work is as follows:

$$\frac{7}{15} = \dots \times ? = \frac{3}{15} + \frac{4}{15} = \frac{3}{15} + \frac{1}{15} + \frac{3}{15}$$
$$\frac{7}{15} = \frac{7}{15} = \frac{14}{30} = \frac{5}{35} + \frac{7}{35} + \frac{2}{35} = \frac{1}{7} + \frac{1}{5} + \frac{2}{35}$$
$$= \frac{14}{30} = \frac{3}{30} + \frac{6}{30} + \frac{5}{30} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

這位學生叫穎。穎在開始時，嘗試著把  $\frac{7}{15}$  寫成兩個相異單位分數相加的和， $\frac{7}{15} = \frac{3}{15} + \frac{4}{15}$ ，顯然她失敗了。於是，穎又試著把  $\frac{7}{15}$  寫成三個相異單位分數的和，在這次的嘗試中，穎並沒有改變  $\frac{3}{15}$ ，只是把  $\frac{4}{15}$  寫成  $\frac{1}{15} + \frac{3}{15}$  的形式。這說明穎已經明白，拆成的分數的分子必須是分母的約數，這樣才可能再把這些分數約成單位分數。穎通過第一次的嘗試，發現  $\frac{3}{15}$  可以約分至單位

分數，而  $4/15$  不可以約成單位分數，因此她去改變  $4/15$ 。但是，穎發現這樣做，又有新問題出現 — 在算式中有兩個  $3/15$ ，而題目要求寫成相異單位分數的和，穎再次失敗。但是，穎並沒有放棄，她又思考了一會，可能還停頓了一會(從她寫的“ $7/15 = 7/15 = \dots$ ”我們可以看出穎並不是一下就想到了擴分的辦法)，最後穎終於走出困頓，想到用擴分的辦法來解決問題，於是便有了“ $7/15 = 14/30 = 3/30 + 6/30 + 5/30 = 1/10 + 1/5 + 1/6$ ”。

通過剖析穎的思考過程，我們可以看到穎一次次的努力，雖然幾經失敗，但她不放棄，最後終於“修得正果”。穎得出答案時的那一份欣喜，以及三天的數學課帶給她的快樂與回味，我們也許可以從穎所寫的感受中分享到她的那份快樂。

古埃及的分數很好玩，區區的小分數也能使人思考，研究使人充滿回味。

與穎有同樣感受的學生還有很多。

問題五的討論更令人刻骨銘心 — 是否所有的真分數都可表成兩個相異單位分數和的形式？為什麼？(討論這個問題時，已經是旅程的最後一天)學生看到這個問題的第一反應是：no! 理由是，在前面活動中出現的  $7/15$  和  $7/16$  就不可以寫成兩個相異單位分數的和。可是，立即就有學生置疑：也許是我們暫時沒有找到，並不能肯定  $7/15$  和  $7/16$  就不可表成兩個相異單位分數的和。學生中有不少人覺得言之有理，認同這位同學的想法。

於是，又有同學提出：如果我們可以找到一個分數，並且可以肯定它一定不能寫成兩個相異單位分數的和，問題就解決了(反證法的概念)。全班一致認為這是個好辦法，證明所有的分數比較困難，找一個“反面例子”，似乎相對來說要簡單很多。可是事情遠非學生想得那麼簡單，麻煩又來了，在分數的“汪洋大海”中如何去找尋那一個分數？學生感到茫茫然，不著邊際，無從下手。

在此情境下，我提供一個分數  $6/7$ ，讓學生試一試： $6/7$  是否可以寫成  $1/a + 1/b$ ？學生開始嘗試，在經歷了數次“失敗”後，學生認為  $6/7$  不可以寫成兩個相異單位分數的和，但是他們又苦於不能說清楚“為什麼  $6/7$  不可以寫成兩個相異單位分數的和”。此時，一些學生覺得心有餘，而力不足，有放棄的想法。同時，也有一些學生想弄清其中的秘密，他們不願放棄，還在努力嘗試。這些不願放棄的學生對我說：「老師，可不可以再讓我們想幾分鐘？」這種情況我始料不及。究竟應該放棄或者繼續呢？

在我猶豫不決時，頭腦中突然來了一個靈感，我立即對學生說：「既然，我

們暫時不能把  $6/7$  寫成  $1/a + 1/b$ ，我們不如換一換思路，請你們每個同學找一個分數，這個分數必須保證一定可以寫成  $1/a + 1/b$  的形式”。學生很快就想出了兩種辦法：

方法一：自己先寫一個分數，並把該分數寫成  $1/a + 1/b$  的形式；

方法二：先寫出兩個相異的單位分數，例如  $1/3$ ， $1/7$ ，然後再算出他們的和是  $10/21$ 。

我原來希望這個問題的解決會對於  $6/7$  的問題有幫助和啟發。因為在我看來，學生如果能夠想到方法二，即兩個相異單位分數相加可以得到一個分數，那麼倒過來想一下，從  $6/7$  裡面先後減去兩個最大的單位分數，發現差不是零，而是  $1/42$ ，問題五的答案不就浮出來了嗎？可是事與願違，他們沒有從這個問題的解答中得到任何靈感。

萬般無奈，一部分學生再次想到放棄。就在此時，一個叫冬的女孩說：「我試了一下，像  $6/7$ ， $10/11$ ， $12/13$  這樣的分數，分母是質數，分子是比分母小 1 的合數，它們一定不可以寫成兩個相異單位分數的和。理由是：因為這樣的分數，分母是質數，因此分母分約數只有 1 和分母本身，而分子不可能寫成 1 加分母約數的形式，因此必須先擴分。而擴分了以後，分母的約數中仍然無法找到兩個約數，它們的和是分子。」對於這樣的說法，多數學生覺得有道理（因為他們在嘗試  $6/7$  時，也有此感受。），但是，同時學生還是感到不滿意，似乎缺了些什麼。（冬的解釋未能成立，但是我很欣賞她的毅力和觀察力。）

此時，我靈機一動，很快寫下  $2/3$ ， $3/4$ ， $5/6$  這三個分數，讓學生試一試這三個分數中有沒有可以寫成兩個相異單位分數的和。學生經過努力，發現三個分數都可以寫成兩個相異單位分數的和：

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \qquad \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \qquad \frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

就在同學們交流這幾個答案之時，冬好像一下子想起什麼，站起來對大家說：「我知道  $6/7$  為什麼不可以寫成  $1/a + 1/b$ ？」大家的眼光都轉向她，我請她到講臺前解釋給大家聽。冬自信地走上前，娓娓道來：「因為  $5/6 = 1/2 + 1/3$ ，而  $1/2$ ， $1/3$  是兩個最大的單位分數， $6/7$  比  $5/6$  大，兩個最大的單位分數相加只能得到  $5/6$ ，因此  $6/7$  不可能寫成兩個相異單位分數的和。」

聽到此，學生頓時恍然大悟，我和他們都忍不住為冬鼓掌喝彩。從學生不約而同地發出“噢！”的一聲，以及他們都點頭表示讚同的表情中，我知道這次，學生是真的理解了。接著學生還做出推斷：分數值大於  $5/6$  的分數都不能寫成兩個相異單位分數的和。

可是，又有學生提出：那麼，是不是所有小於  $5/6$  的分數都可以寫成兩個相

異單位分數的和？還沒來得及作答，下課鈴聲響了。旅行結束了。可是學生似乎還意猶未盡，欲罷不能……

從上述的學習活動中，我們可以看到在解決問題的過程中，學生經歷猜測、嘗試，展開置疑和辯論，有時甚至感覺到“山窮水盡疑無路”，就在一部分同學想要放棄的時候，那些堅持不懈的同學“突然而至”的靈感又使大家看到“柳暗花明又一村”的景象。

也許正是這種曲折的探索歷程使得數學充滿神秘，使得數學學習變得富有挑戰性，而接受挑戰，解決問題之後所帶來的成就與喜悅又是難以言表的。

你還想繼續研究古埃及分數嗎？  
答：我還想，因為很有一種探索的感覺。

魏老師給你留下的最深刻的映象是什麼？  
魏老師不像其他老師一樣她上課時不是一下子就把這節課的知識全倒出來，而是像跟我們玩尋寶，把知識埋在各地，讓我們細心地找出來。

如果“數學”是一種可以吃的東西（比如，雪糕，香蕉，苦瓜，米飯，牛扒，藥等），你認為數學是哪一種食物？為什麼？  
答：西瓜。因為西瓜在你沒打開之前你不知道裏面的瓜肉是怎樣的，而打開了就知道有多甜！

從孩子們稚氣的語言中，我感嘆：原來教師只要用點心設計教學，把真正的數學還給孩子，孩子會喜歡數學，喜歡學習數學的。

古埃及之旅結束了。但是，孩子們在旅程中表現出強烈的好奇心、濃厚的學習興致、獨特的思維方式等，始終在我眼前閃現，揮之不去。從孩子們的只言片語中，我們可以分享到學生對數學的喜愛之情。你或許也從上面的字裡行間感受到孩子們那天在學習數學是所收穫的樂趣。現在，每當我拿出孩子們寫的課後感受仔細閱讀時，每一次我都會被孩子們對學習，對數學，對老師的那份情感所打動，既感歡欣，又覺震動。

古埃及之旅結束了，但是，這次的旅行使我明白：我們——教師，可以讓數學學習充滿快樂和趣味，儘管這不是一件輕鬆的工作，但我們能夠做到。