Teoría – Tema 5

Teoría - 11 - ampliación al concepto de Rango de un conjunto de vectores

Repaso al concepto de Rango en vectores. Método de Gauss en matrices

Dados únicamente dos vectores, diremos que están en combinación lineal si y solo si son proporcionales (paralelos o antiparalelos). En apartados anteriores ya hemos visto una forma sencilla de comprobar si dos vectores son proporcionales: dividiendo las respectivas componentes y verificando si se mantiene el factor de proporción.

Si poseemos más de dos vectores, lo más cómodo es utilizar la notación matricial de los vectores y el concepto de rango para poder aplicar el método de Gauss y determinar cuántos vectores hay linealmente independientes.

Si colocamos las componentes de los vectores en filas o en columnas tendremos la matriz asociada al conjunto de vectores. Si obtenemos la matriz escalonada mediante el método de Gauss, podremos definir el rango de un conjunto de vectores como:

El rango de un conjunto de vectores coincide con el número de vectores con al menos un coeficiente no nulo y que no sean proporcionales, en la matriz triangular asociada resultante de aplicar el método de Gauss.

El valor del rango también coincide con el número de vectores linealmente independientes. Por lo tanto, **n-vectores serán independientes si su rango es igual a n. Mientras que serán dependientes (combinación lineal) si su rango es menor que n.**

El rango nunca puede superar al valor del número de vectores. Por lo general, en una matriz $A_{m \times n}$ el rango nunca puede ser mayor a la dimensión más pequeña de la matriz (ya sea el número de filas o el número de columnas).

Estamos acostumbrados a aplicar Gauss por debajo de la diagonal principal. En matrices rectangulares (distinto número de filas que de columnas), lo más cómodo es escribir los vectores de forma que haya menos filas que columnas. Por ejemplo, si tenemos 3 vectores de cuatro componentes, escribiremos los vectores como filas en la matriz y así tendremos una matriz 3x4 y haremos Gauss por debajo de la diagonal principal.

Veamos algunos ejemplos con conjuntos de 3 vectores de 3 dimensiones, colocando las componentes de los vectores como filas de las matrices.

Al igual que en sistemas de ecuaciones, en el método de Gauss en matrices podemos:

- Permutar las posiciones de filas y de columnas
- Aplicar transformaciones lineales.
- Si hay dos líneas iguales (ya sean filas o columnas) entre sí o proporcionales, obviamos una de las líneas. Fíjate que hablamos de matrices, no de sistemas de ecuaciones, por lo que las líneas serán vectores y no ecuaciones.

Ejemplo con dos filas idénticas:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ → Rango 2 → Solo hay 2 vectores linealmente independientes

Ejemplo con dos filas proporcionales:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ → Rango 2 → 2 vectores linealmente independientes

Ejemplo con una fila con todos los coeficientes nulos

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ → Rango 2 → 2 vectores linealmente independientes

Si las tres filas resultan no proporcionales y poseen al menos un coeficiente no nulo tras aplicar Gauss, tendremos tres vectores independientes.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$ → Rango 3 → Los tres vectores son linealmente independientes

Todo lo dicho para filas es también aplicable a columnas. **Por comodidad, siempre escribiremos la matriz de vectores de tal forma que el número de filas sea menor o igual al número de columnas.**