# Parte 5: Caos en ecuaciones diferenciales no lineales

Capítulo 9 del Libro de Srogazt. Página 311. Vamos a estudiar el caos con el **sistema de Lorenz.** Esto nos conducirá a comprender el concepto de caos. El sistema es descripto por las ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x' &= \sigma(y-x) \\ y' &= rx - y - xz \\ z' &= xy - bz \end{cases}$$

Los valores σ, r y b son parámetros positivos; *x, y, z* son las variables dependientes de la variable independiente que llamaremos *t*.

El sistema de Lorenz es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineal. La no-linealidad está presente sólo en dos de las ecuaciones, en la segunda y en la tercera.

Este sistema de ecuaciones diferenciales describe el problema de una rueda o molino de agua. Es similar a una rueda de un parque de atracciones, que tienen vasijas (generalmente más de siete), que están colgadas a la rueda, o sea, su 'boca' siempre mira para arriba. Una explicación de este problema se puede ver en el siguiente video https://www.youtube.com/watch?v=VzMXw_gHk5M

## Actividad para entregar

1. **Simetría del sistema.** Verificar que existe una simetría en el sistema. Si *(x(t),y(t),z(t))* es solución, también lo es *(-x(t),-y(t), z(t))*.
2. **Puntos fijos.** Hallar los puntos fijos del sistema de Lorenz en término de los parámetros.
3. **Linealización.** Linealizar el sistema y analizar la estabilidad local de los puntos fijos.
4. **Comportamiento del sistema de Lorenz.** Simular (numéricamente) el sistema utilizando un software matemático a elección (Por ejemplo: MATLAB, Simulink del MATLAB[1], OCTAVE, SCILAB, GEOGEBRA[2]) obteniendo los gráficos en tres dimensiones de *(x(t),y(t),z(t))* y en el plano los gráficos de *(t,y(t))* y de *(x(t), z(t))*. Simular para distintas condiciones iniciales (x(0),y(0),z(0)), tomar t de 0 a 100, y tomar distintos valores de los parámetros

[1] En MATLAB https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/30066-lorenz-attaractor-plot poseen la sentencia *lorenz* que simula el sistema.
[2] En GeoGebra pueden tomar de referencia las simulaciones https://ggbm.at/e0b0DO7a , https://ggbm.at/JkrsbJbq , https://ggbm.at/sBrKbX4z

tales que $1 < r < r_h$, con $r_h = \sigma.(\sigma+b+3)/(\sigma-b+1)$. Comentar lo que observa en las simulaciones en una tabla para los distintos valores de los parámetros ($\sigma$, r, b).

5. **Atractor extraño.** Simular para los parámetros los valores $(\sigma,r,b)= (10,28,8/3)$. Observar las simulaciones y comentar. ¿Cómo son las trayectorias? ¿Se encuentran en un plano? ¿Se cruzan o unen?
6. **Exponente de Liapunov.** Simular con los valores de los parámetros $(\sigma, r, b)= (10, 28, 8/3)$ con dos condiciones iniciales cercanas X0=(x(0),y(0),z(0)) y X1=X0+(delta, delta, delta) (por ejemplo delta=$10^{-15}$) un mismo tiempo suficiente, y comparar la distancia final entre las dos soluciones para estimar el exponente de Liapunov. ¿Cuánto se separan las trayectorias con condiciones iniciales cercanas?
   a. El Exponente de Lyapunov ($\lambda$) de un sistema dinámico es una cantidad que caracteriza el grado de separación de dos trayectorias infinitesimalmente cercanas. Cuantitativamente, dos trayectorias en el espacio-fase con separación inicial $\delta_0$, transcurrido el tiempo t su separación será $\|\delta(t)\| \cong \|\delta_0\|.e^{\lambda t}$. Cualquier sistema que contenga al menos un exponente de Lyapunov positivo, se define como caótico
7. **Definición de caos.** En base al comportamiento que presenta el sistema de Lorenz para algunos valores de los parámetros definir las tres características que corresponden al comportamiento caótico.