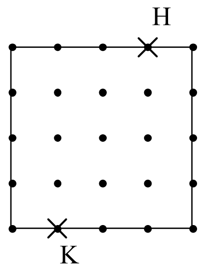
邢老师：

收到妳的回信近一个星期了，亦重复读了好几遍。 字里行间很能够感受妳对数学和数学教育的热诚，使我十分敬佩。 又察觉妳努力地为我提出的问题求解，欣赏之余，反问自己：会不会我给妳「老师」的感觉太浓，令妳产生压力感呢？ 我的原意是与妳分享经验，不希望是纯粹的一问一答。 也许我这一次我从另一角度去写，少发问，多谈想法，看看又怎样。

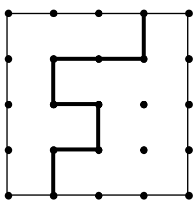
回到我们的几何板问题去。 选择 4×4 格确是为了使限制开放题的答案数量。 3×3 可变化的情况太少了。 5×5 又过多，不适合给小学生进行探究。

以下是我们谈及过的问题。

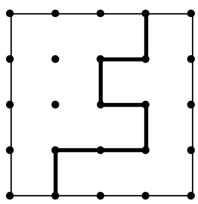
问题 1：给 4×4 格的几何板，用橡皮筋以 H，K 为端点分割成两个多边形 A 和 B，使 $p(A) = p(B) = p(S)$。



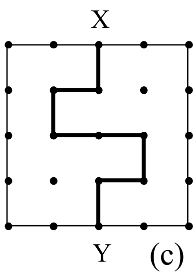
提示：凡透过几何变换得来的图形属同一款式，故此以下分割法(a)与(b)同，(c)与(d)同。



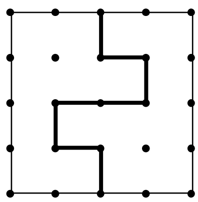
(a)



(b) 是(a)旋转 180°的映射

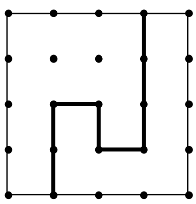


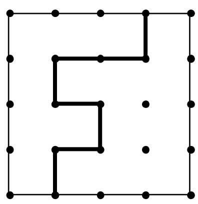
(c)



(d) 是(c)沿 XY 反射的映射

解答：

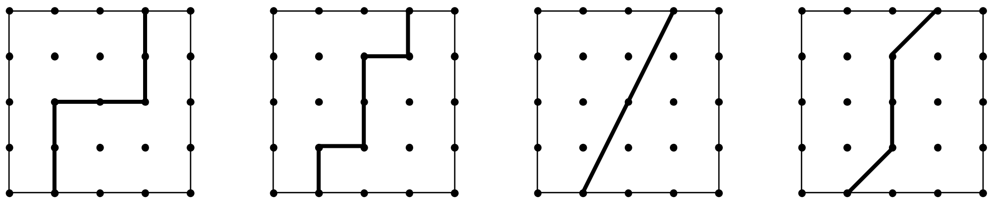




问题 2：给 4×4 格的几何板，用橡皮筋以 H，K 为端点分割成两个全等的多边形 A 和 B，使 $p(A) = p(B)$ 且 $p(B) < p(S)$。

提示：　切忌定型思考。 别被水平和垂直线限制了我们的思想空间，要多想其它的可能性。

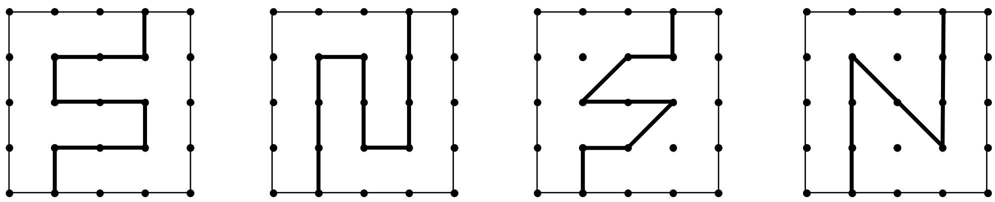
解答：



问题 3：给 4×4 格的几何板，用橡皮筋以 H，K 为端点分割成两个全等的多边形 A 和 B，使 $p(A) = p(B)$ 且 $p(B) > p(S)$。

提示：　小心枚举各种可能性。

解答：



上列的八个解法当然满足「给 4×4 格的几何板，用橡皮筋以 H，K 为端点分割成两个全等的多边形 A 和 B，使 $p(A) = p(B)$」的问题。

换上端点，解答自然不同。 这几道变化多端的数题，盈溢着丰富的数学，其中牵涉：

(1)　形状守恒的概念

(2)　面积守恒的概念

(3)　周界守恒的概念

(4)　三角形三边的关系

(5)　数学解难/数学探究

妳的话：「学生往往对于周界、面积易混，只认为面积相等时周界才相等」充份反映妳对小学生的了解。 儿童常常会被相关的概念混淆的。 对初小或程度稍逊的小学生这几道数学可以是打击大于挑战。 作为专业的数学老师，应对数题作深度及阔度的分析，才可以就学生的需要和反应，选择和调适教材，引领学生探究问题。

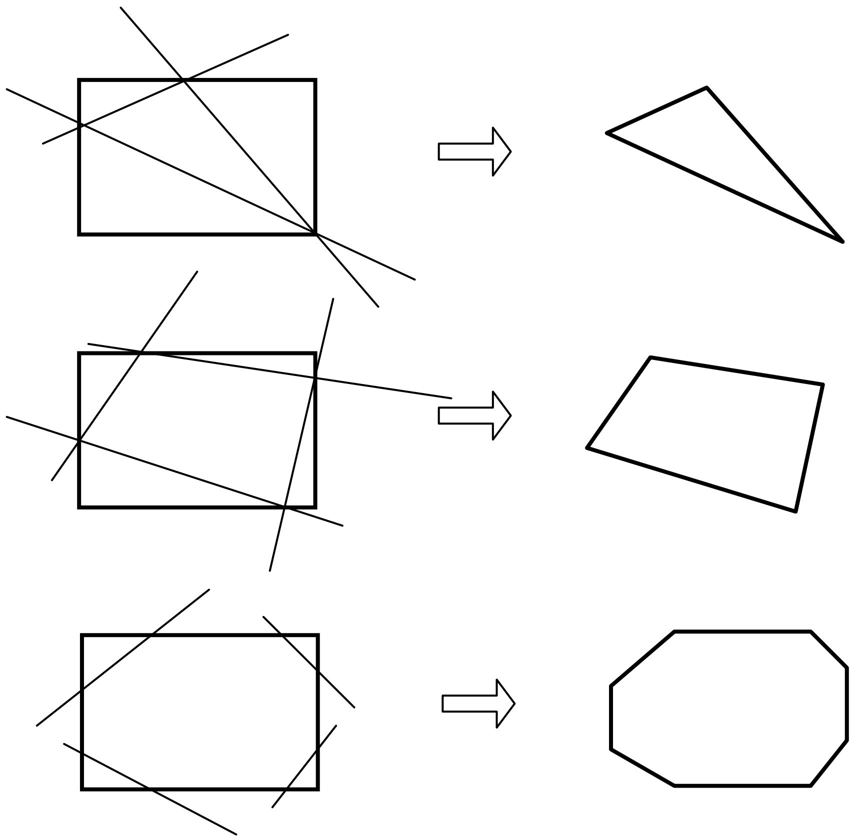
直至这一刻，我的心里仍响着问号 — 这道「$n \times n$ 格点的联机题」，$n = 3$ 我很有信心穷尽其可能性，处理 $n = 4$ 我有担心，$n \geq 5$ 我想错漏的机会极高；她可否被模拟成计算方法，有条理地列出所有合适的数解呢？ 真渴望学识丰富的同事给我指导！

上列第(4)点提及三角形三边的关系。 有两个关系很值得向小学生介绍，分别是：

- 直角三角形的斜边最长 (对角越大边越长的特殊情况)
- 三角形其中两边之和定必比第三边长

这问题曾经和我的同事张家麟老师讨论过。 他提出原数题的进一步探究的可以循原来矩形的周界入手：

问题：不容许截线在矩形内相交。 我们可以把矩形割若干刀得出三角形、四边形、甚至八角形。



a) 你可以分割出五边形、六边形、……吗？
b) 试比较割出图形和原来矩形周界的长短。
c) 你得出甚么结论？

这样的设计更适合一般小学生的学习呢！

正如波尔所言，数学教学是一门艺术。 妳上次用心思的教学设计固然是一可行方案。 读了张老师的数题，妳有甚么感受？ 有没有新点子呢？

祝新岁进度、愉快！

关树培

2008/1/31