LÍMITES DE FUNCIONES Y DE SUCESIONES

Índice:

1. Funciones reales de variable real. Sucesiones.

Una función real de variable real es una correspondencia f que asocia a cada elemento x de un determinado subconjunto de números reales un único elemento $y=f(x)$ de otro subconjunto de números reales.

Al subconjunto en el que que está definida la función, se le denomina **Dominio de definición o campo de existencia de la función f ,** y se denota por $Dom\, f$.

Al número x perteneciente al Dom f, se le denomina **variable independiente**.

Al número $y=f(x)$ asociado por f al valor x se le denomina **variable dependiente**.

Al subconjunto en el que está definido el conjunto de los números reales que toma la variable y, se designa por **Recorrido o imagen de la función f ,** y se denota por $\mathrm{Im}\, f$.

Luego podemos definir con notación matemática una función real real f definida en un conjunto A y con valores en un conjunto B como

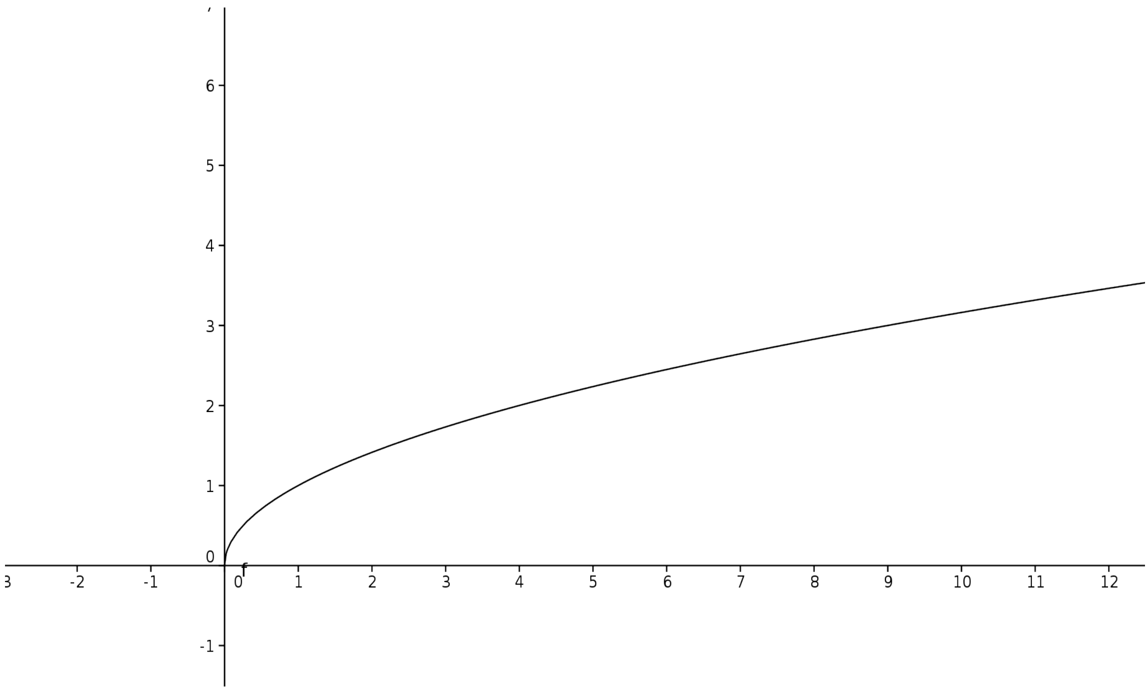
$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B \\ x &\rightarrow y=f(x) \end{aligned}$$

Habitualmente, solamente indicamos una función por su expresión algebraica $f(x)$. En cuyo caso, se considera:

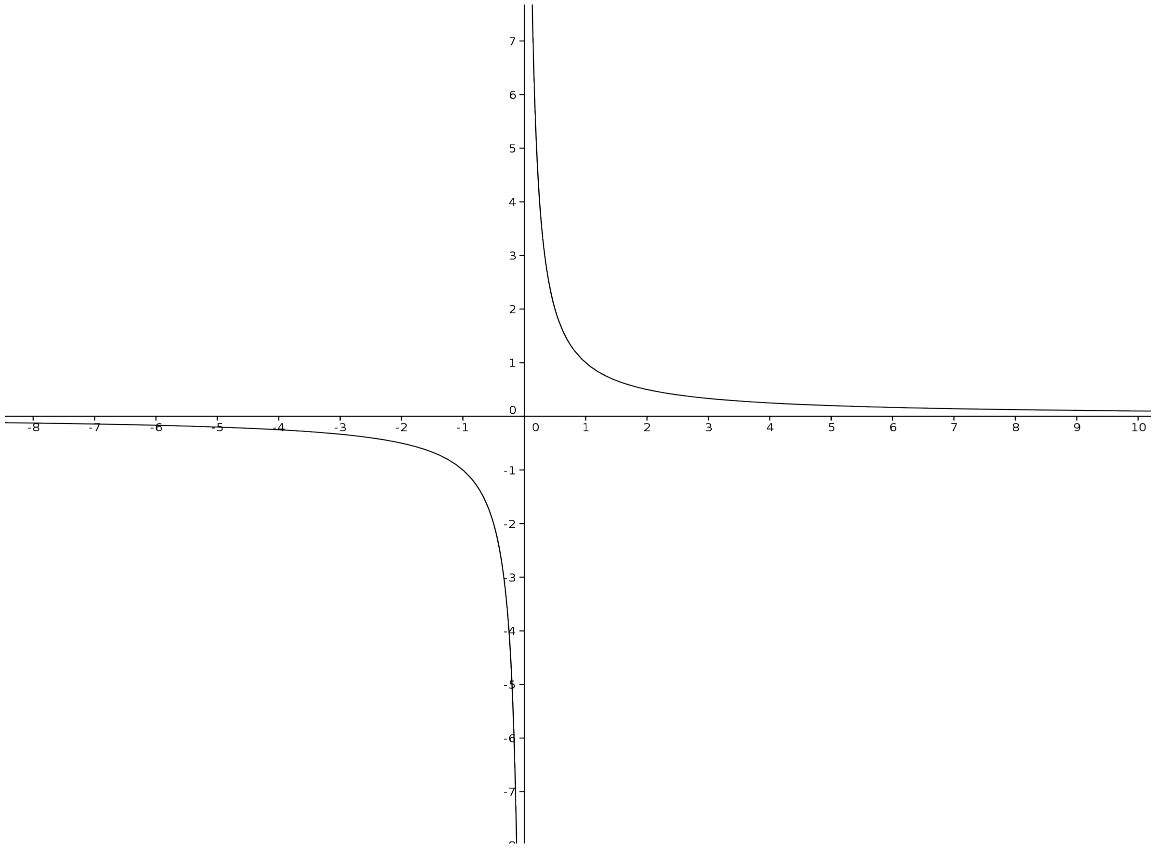
$$A=Dom\, f\subset\mathbb{R} \;\; y \;\; B=Ima\, f\subset\mathbb{R}$$

 # Ejemplos.-

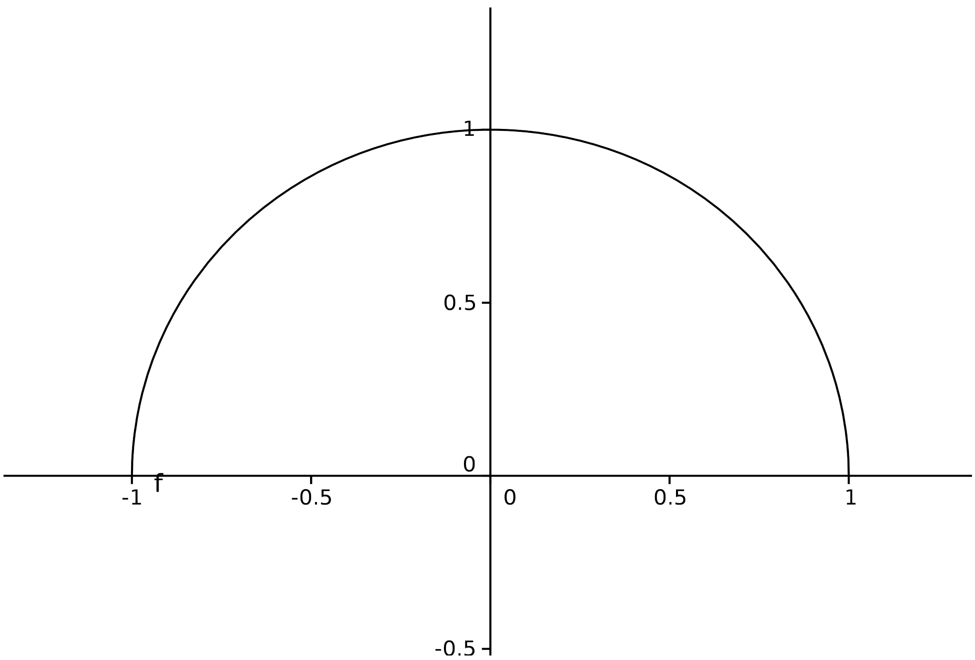
- *La función definida como* $f(x)=\sqrt{x}$ *tiene como dominio y recorrido máximo los números reales positivos y el cero.*



- *La función definida como* $f(x)=\frac{1}{x}$ *tiene como dominio y recorrido máximo los números reales menos el cero.*



- *La función definida como* $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ *tiene como dominio máximo el intervalo* $[-1,1]$ *y como recorrido máximo el intervalo* $[0,1]$.



SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

Una **sucesión de números reales** es una función

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$n \rightarrow f(n)$$

Los distintos valores $f(n)$ los solemos representar mediante la notación $a(n)$ o a_n

Teniendo en cuenta, que dependiendo de los autores, o de la finalidad de la sucesiones, podemos tomar $\mathbb{N}=0,1,2,3,4,...$ o $\mathbb{N}=1,2,3,4,...$ el primer valor de la sucesión podrá ser a_0 o a_1 .

A los números $1,2,3,...,$ se les denomina **índices** de la sucesión, y a los valores $a_{1,} a_{2.,} a_{3,} ...,$ se les denomina **términos** de la sucesión.

Al término a_n se le denomina **término general de la sucesión**.

Teniendo en cuenta, que el conjunto imagen de una sucesión de término general $a_n = f(n)$ es un conjunto infinito y discreto, solemos representar *Ima f* por $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

 # Ejemplos.-

- *Los cuatro primeros términos de la sucesión* $a_n = \frac{3n+1}{4n+2}$ *son*

$$a_1 = \frac{4}{6} \quad ; \quad a_2 = \frac{7}{10} \quad ; \quad a_3 = \frac{10}{14} \quad ; \quad a_4 = \frac{13}{18}$$

- *El término general de la sucesión* $1,4,9,16,25,36,49,...$ *es* $a_n = n^2$.
- *El término general de la sucesión* $5,7,9,11,13,15,17,...$ *es* $b_n = 2.n+3$

SUCESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

a_n es una **sucesión aritmética**, si existe un número $r>0$, denominada razón de la sucesión tal que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple $a_{n+1} - a_n = r$, El término general de una sucesión aritmética tiene por término general una función lineal de la forma $f(n) = a.n+b$

a_n es una **sucesión geométrica**, si existe un número $r \neq 0,$ denominada razón de la sucesión tal que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$, El término general de una sucesión geométrica tiene por término general una función lineal de la forma $f(n) = a.b^n$

 # Ejemplos.-

- *Como la sucesión* $2,8,14,20,\ldots,$ *es una sucesión aritmética, el término general será de la forma* $f(n)=a.n+b$ *. Que sustituyendo, se tiene*

  $f(1)=2 \Rightarrow 2=a+b$; $\quad f(2)=8 \Rightarrow 8=2a+b$

  Y cuya solución del sistema es $a=6$ *y* $b=-4$ *. Luego, el término general, será:*

  $f(n)=6n-4$

- *Como la sucesión 3, 6, 12, 24, ... , es una sucesión geométrica, el término general será de la forma* $f(n)=a.b^n$ *. Que sustituyendo, se tiene*

  $f(1)=3 \Rightarrow 3=a.b$; $\quad f(2)=6 \Rightarrow 6=a.b^2$

  Y cuya solución del sistema es $a=\frac{3}{2}$ *y* $b=2$ *. Luego, el término general, será:*

  $f(n)=3.2^{n-1}$

2. Límites finitos de sucesiones

Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales y $x \in \mathbb{R}$ La sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene por límite x y se escribe:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

Cuando

$$\forall \epsilon>0, \exists n_o \in \mathbb{N} \text{ tal que } |x_n-x|<\epsilon \text{ para cada } n \geq n_0$$

 # Ejemplo.-

- *La sucesión de término general* $a_n=\frac{2n}{n+1}$ *tiene por límite 2, ya que para cada número real* $\epsilon>0$ $\exists$ *un número natural* n_0 *tal que* $|a_n-r|<\epsilon$ *para cada* $n \geq n_0$

  Por ejemplo, si tomamos $\epsilon=0{,}001$ *, resolviendo la inecuación*

  $$\left|\frac{2n}{n+1}-2\right|<\epsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{-2}{n+1}\right|<\epsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{n+1}<\epsilon \quad \Rightarrow \quad n>\frac{2}{\epsilon}-1=1999$$

  Luego, para cualquier n > 1999 se cumple la desigualdad $|a_n-r|<0{,}001$

En el caso de que exista $\lim_{n\to\infty} x_n=x$ decimos que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es **convergente**, y en otro caso diremos que es **divergente.**

En la mayoría de las sucesiones de límites finitos, de forma intuitiva podemos calcular el límite de una sucesión estudiando su comportamiento mediante una tabla de valores.

 # Ejemplos.-

- *En la sucesión dada en el ejemplo, se cumplirá*

n	***1***	***10***	***100***	***10 000***	***1 000 000***	***…***	→	$+\infty$
$a_n=\dfrac{2n}{n+1}$	***1***	***1,8181...***	***1,9802 …***	***1,9998 ...***	***1,9999...***	***.. .***	→	***2***

- *El límite de la sucesión* $c_n=\dfrac{3}{n^2+4}=0$ *. Para ello, basta con que hagamos una tabla de valores, de la cual se deduce que* $\lim_n c_n=0$

n	***1***	***10***	***100***	***10 000***	***1 000 000***	***…***	→	$+\infty$
$c_n=\dfrac{3}{n^2+4}$	***0,6***	***0,0288 …***	***0,0003 …***	***0,000 ...***	***0,000 ...***	***.. .***	→	***0***

- *La sucesión cuyo término general es* $a_n=\dfrac{1}{2n+1}$ *es convergente, ya que* $\lim_n a_n=0$ *, pues basta con observar el comportamiento de la sucesión*

$$a_1=1, a_2=\frac{3}{5}, a_3=\frac{3}{7,}\ldots, a_{1000}=\frac{3}{2001}$$

- *La sucesión cuyo término general es* $a_n=n^4$ *es divergente, ya que* $\lim_n b_n=+\infty$ *, pues basta con observar el comportamiento de la sucesión*

$$a_1=1, a_2=16, a_3=81, \ldots, a_{1000}=1000^4$$

- *La sucesión cuyo término general es* $a_n=(-1)^n$ *es divergente por que no tiene límite, ya que sus términos toman los valores 1 y -1 de forma alternativa.*

<u>Propiedades de los límites de las sucesiones reales convergentes</u>

$$\lim_{n\to\infty} a_n+b_n=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n-b_n=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n . b_n=\lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}; si\, b_n\neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} k . a_n=k . \lim_{n\to\infty} a_n ; \forall k \in \mathbb{R}$$

Además, a partir de estas propiedades se pueden calcular algunos límites de sucesiones, como por ejemplo

Si $a_n = k$ *, con* $k \in \mathbb{R}$ *, entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = k$

Si $a_n = P(n)$ *, con* $P(n) = r_p . n^p + r_{p-1} . n^{p-1} + r_{p-2} . n^{p-2} + \ldots + r_1 . n + r_0$ *un polinomio en n, tenemos que* $\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{Bmatrix} +\infty \text{ si } r_p > 0 \\ -\infty \text{ si } r_p < 0 \end{Bmatrix}$

Si $a_n = \dfrac{k}{n^p}$ *, con* $k \in \mathbb{R}$ *y* $p \in \mathbb{N}$ *, entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Si $a_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ *, con* $P(n) = r_p . n^p + r_{p-1} . n^{p-1} + r_{p-2} . n^{p-2} + \ldots + r_1 . n + r_0$ *y* $Q(n) = s_q . n^q + s_{q-1} . n^{q-1} + s_{q-2} . n^{q-2} + \ldots + s_1 . n + s_0$ *dos polinomios en n, tenemos que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{r_p . n^p}{s_q . n^q} = \begin{Bmatrix} -\infty \text{ si } p > q \text{ y } \dfrac{r_p}{r_q} < 0 \\ \dfrac{r_p}{r_q} \text{ si } p = q \\ 0 \text{ si } p < q \\ +\infty \text{ si } p > q \text{ y } \dfrac{r_p}{r_q} > 0 \end{Bmatrix}$$

 # Ejemplos.-

- *Sea la sucesión de termino general* $a_n = 5$ *, entonces,* $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$
- $\lim_{n\to\infty} (5n + 17) = +\infty$
- $\lim_{n\to\infty} (-2n^2 + n - 9) = -\infty$
- $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{25}{n^3}\right) = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{8n^3 - n^2 + 3}{2n^2 + n - 4}\right) = +\infty$
- $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{8n^3 - n^2 + 3}{2n^3 + n - 4}\right) = \dfrac{8}{2} = 4$
- $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{8n^2 - n^2 + 3}{2n^3 + n - 4}\right) = 0$

Para el cálculo de límites de muchas sucesiones, es útil aplicar las propiedades aritméticas de los límites. En el caso particular de que el término general de la sucesión sea una fracción algebraica de variable n, es decir de la forma $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ ($P\, y\, Q$ *polinomios*), podemos dividir el numerador y el denominador por n^h $(h = mínimo(grado\, P, grado\, Q))$, y después aplicar las propiedades aritméticas de los límites, para simplificar el cálculo de dicho límite.

 # Ejemplo.-

- *Para calcular el límite de la sucesión* $a_n = \frac{4n^2+n-1}{n^2+1}$ *, si dividimos por* n^2 *, el numerador y el denominador del término de la sucesión, utilizando las propiedades expuestas anteriormente, tenemos*

$$\lim_n a_n = \lim_n \frac{4n^2+n-1}{n^2+1} = \lim_n \frac{4\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}-\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_n 4 + \lim_n \frac{1}{n} - \lim_n \frac{1}{n^2}}{\lim_n 1 + \lim_n \frac{1}{n^2}} = \frac{4+0+0}{1+0} = 4$$

Otras veces nos aparecen límites de sucesiones que contiene una raíz, para lo cual en ocasiones es útil utilizar los conjugados

 # Ejemplo.-

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-\sqrt{n^2+3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{n^2+4n}-\sqrt{n^2+3}\right).\left(\sqrt{n^2+4n}+\sqrt{n^2+3}\right)}{\left(\sqrt{n^2+4n}+\sqrt{n^2+3}\right)}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n^2+4n)-(n^2+3)}{\left(\sqrt{n^2+4n}+\sqrt{n^2+3}\right)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n-3}{\left(\sqrt{n^2+4n}+\sqrt{n^2+3}\right)}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4-\frac{3}{n}}{\left(\sqrt{1+\frac{4}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}\right)}\right) = \frac{4}{1+1} = 2$$

3. Límites más y menos infinitos de sucesiones

El límite de una sucesión, también puede ser $+\infty$ y $-\infty$, mediante la siguiente definición

Decimos que una sucesión numérica $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ tiene por límite $+\infty$ y se escribe

$\lim_n a_n = +\infty$ o de forma abreviada $a_n \to +\infty$

cuando para cada número real positivo K $\exists$ un número natural n_0 tal que $a_n > K$ para cada $n \geq n_0$

Decimos que una sucesión numérica $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ tiene por límite $-\infty$ y se escribe

$\lim_n a_n = -\infty$ o de forma abreviada $a_n \to -\infty$

cuando para cada número real positivo K $\exists$ un número natural n_0 tal que $a_n < K$ para cada $n \geq n_0$

Sin embargo, como sucede con las sucesiones de límites finitos, en la mayoría de las sucesiones de límites infinitos, de forma intuitiva, podemos calcular el límite estudiando su comportamiento mediante una tabla de valores y aplicando las propiedades aritméticas de los límites.

 # Ejemplos.-

- *El límite de la sucesión* $a_n = 5.n^2 = +\infty$ *, para ello basta con que hagamos una tabla de valores, de la cual se deduce que* $\lim_n a_n = +\infty$

n	**1**	**100**	**10000**	**100000**	**100000000**	**...**	$\to$	$+\infty$
$a_n = 5.n^2$	**5**	**50000**	5.10^8	5.10^{12}	5.10^{16}	**...**	$\to$	$+\infty$

- *Para calcular el límite de la sucesión* $a_n = \dfrac{-4n^3 + n - 1}{n^2 + 1}$ *, si dividimos por* n^2 *, el numerador, tenemos*

$$\lim_n a_n = \lim_n \frac{-4n^3 + n - 1}{n^2 + 1} = \lim_n \frac{-4\dfrac{n^3}{n^2} + \dfrac{n}{n^2} - \dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{n^2}{n^2} + \dfrac{1}{n^2}} = \frac{\lim_n -4n + \lim_n \dfrac{1}{n} - \lim_n \dfrac{1}{n^2}}{\lim_n 1 + \lim_n \dfrac{1}{n^2}} = -\infty$$

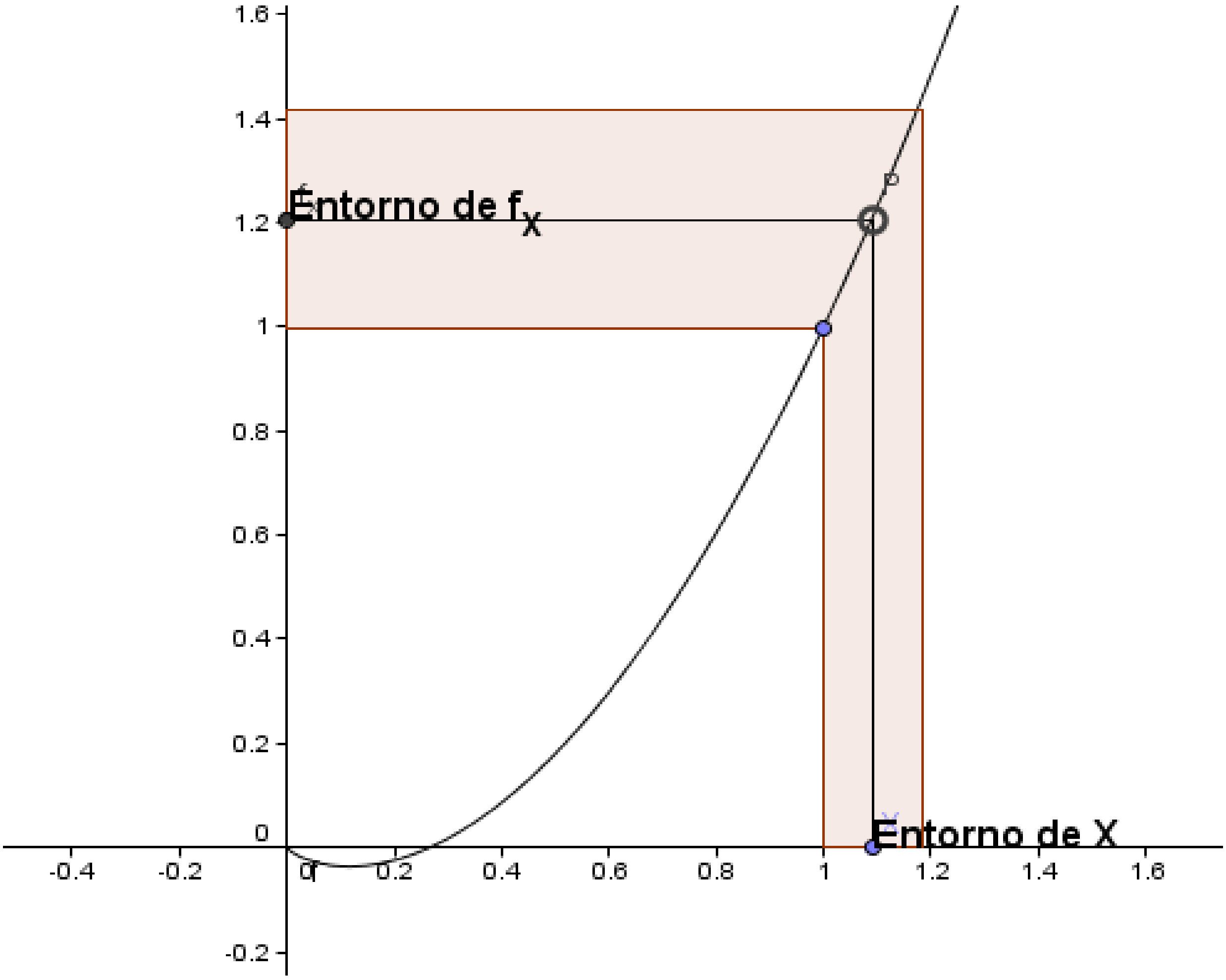
4 Límite finito de una función en un punto. Definición métrica.

Si I es un intervalo de la recta real, tal que ni $-\infty$ ni $+\infty$ sean extremos de I, c es un punto del intervalo I (*o de sus extremos*) y sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función real.

Decimos, que el límite de $f(x)$ tiene a L (*finito*), cuando x tiende c, y se escribe

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$

si para cualquier intervalo abierto (*entorno*) $H \subset f(I)$, existe un intervalo abierto (*entorno*) $J \subset I$, tal que $\forall x \in I, f(x) \in f(I)$



Utilizando notación matemática, podemos definir:

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ **cuando** $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ **tal que:**

$|f(x) - L| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad |x - c| < \delta$

* *Teniendo en cuenta, que* ϵ *está definido en función de* δ $(\epsilon = \epsilon(\delta))$ *, y que dicha función es biyectiva* $(\delta = \delta(\epsilon))$ *, también solemos definir, como:*

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ *cuando* $\forall \delta > 0 \exists \epsilon > 0$ *tal que:*

$|x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon$

 # Ejemplo.-

- *Si* $f(x)=2.\mathrm{x}-3$ *, se cumple que* $\lim_{x\to 2} 2x-3=1$ *puesto que*

$$\forall\ \epsilon>0 \quad \text{tal que} \quad |f(x)-1|=|(2x-3)-1|=|2x-4|<\epsilon$$

como se cumplirá

$$-2x+4<\epsilon<2x-4$$

es decir, se cumplirá las siguientes inecuaciones

$$-2x+4<\epsilon$$

$$2x-4<\epsilon$$

y despejando ϵ *en ambas inecuaciones*

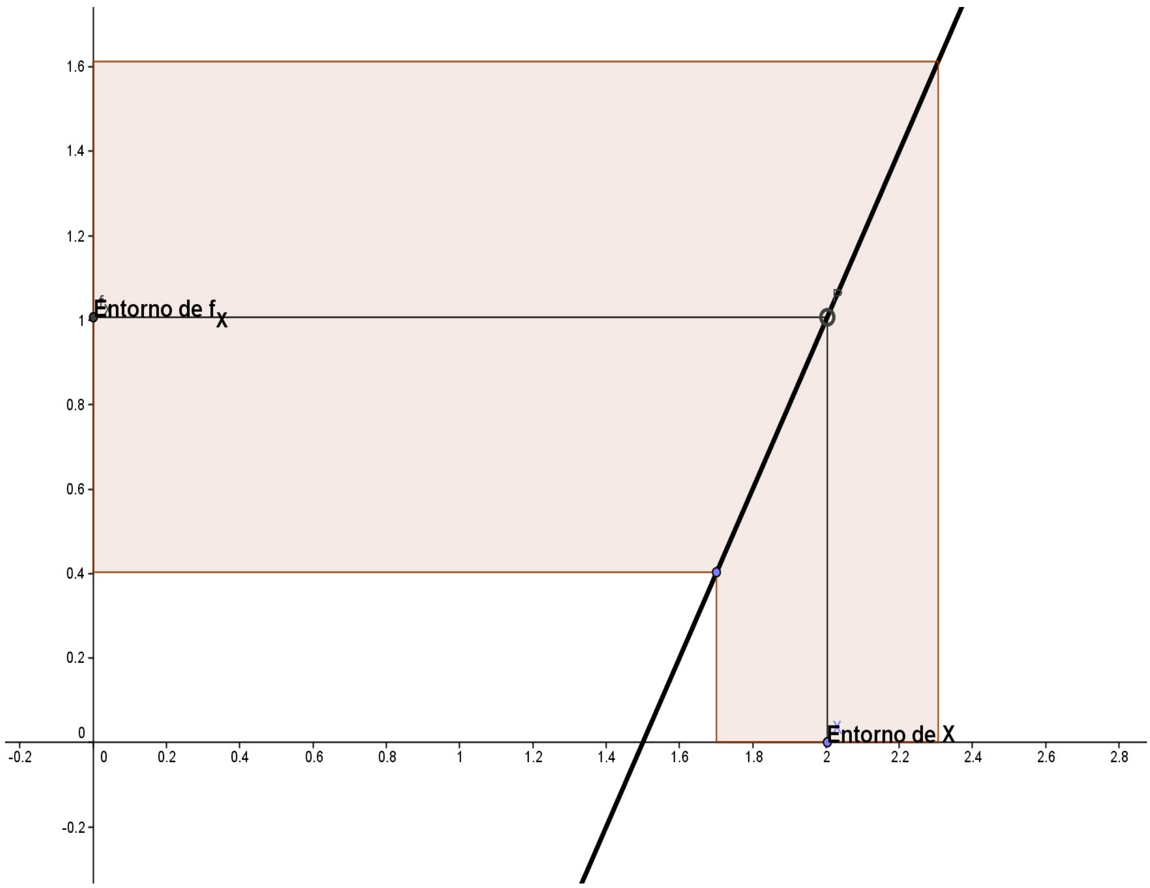
$$-2x+4<\epsilon \Rightarrow -2x<\epsilon-4 \Rightarrow 2x>-\epsilon+4 \Rightarrow x>-\frac{\epsilon}{2}+2$$

$$2x-4<\epsilon \Rightarrow 2x<\epsilon+4 \Rightarrow x<\epsilon+4 \Rightarrow x<\frac{\epsilon}{2}+2$$

Que equivale a

$$-\left(\frac{\epsilon}{2}\right)+2<x<\left(\frac{\epsilon}{2}\right)+2 \qquad \Rightarrow \qquad |x-2|<\left(\frac{\epsilon}{2}\right)=\delta$$

Luego, si tomamos $\delta=\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$ *, se cumple la definición.*



Sin embargo, en muchas ocasiones de forma intuitiva (*dando valores a x cercanos al punto c*) podemos deducir el $\lim_{x\to c} f(x)$

 # Ejemplo.- El $\lim_{x\to 2} x^2=4$ *. Para ello, basta con que hagamos una tabla de valores y tomemos valores de* x *próximos a 2 (por la izquierda y por la derecha) de la cual se deduce dicho límite*

x	***1***	***1,9***	***1,99***	***1,999***	***1,999***	**…**	$\rightarrow$	***2***
x^2	***1***	***3,61***	***3,9601***	***3,996001***	***3,9996001***	**.. .**	$\rightarrow$	***4***
x	***3***	***2,1***	***2,01***	***2,001***	***2,0001***	**…**	$\rightarrow$	***2***
x^2	***9***	***4,41***	***4,0401***	***4,004001***	***4,00040001***	**.. .**	$\rightarrow$	***4***

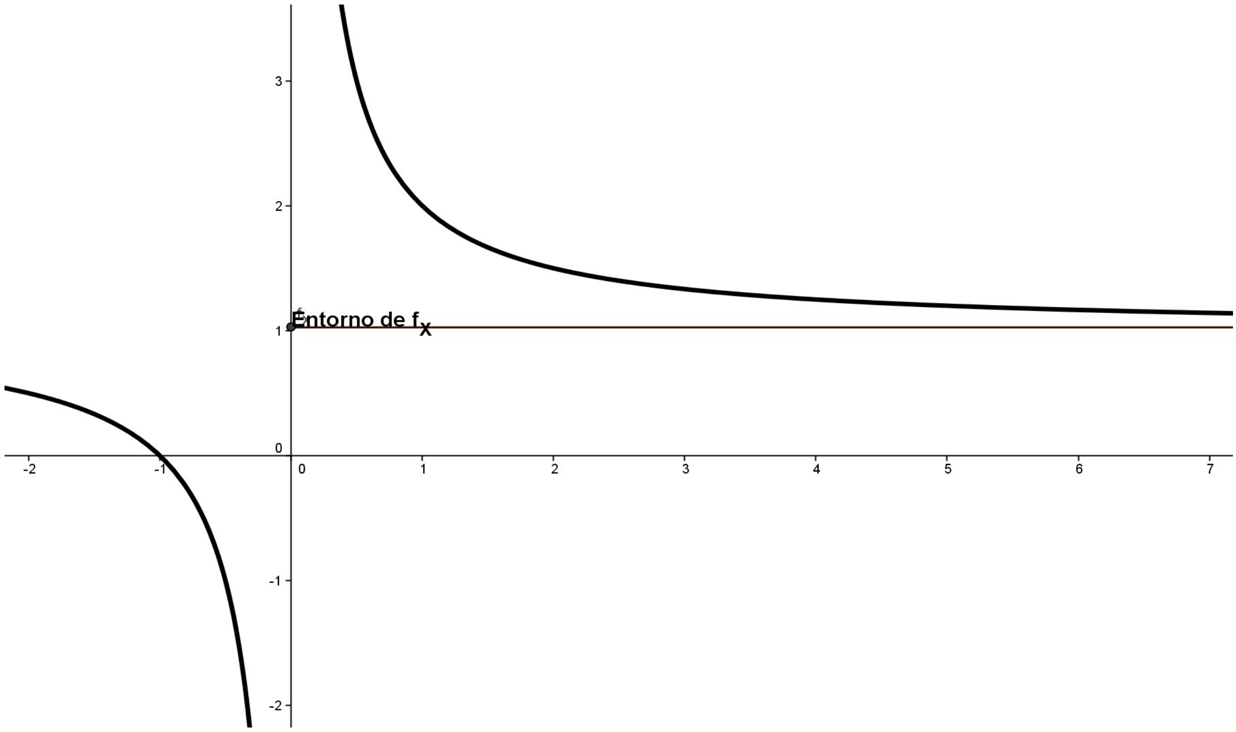
5 Límites infinitos de una función en un punto y límites en el infinito

☞ La definición de límite se puede extender al infinito, si tomamos $x\to-\infty$ *ó* $x\to+\infty$. Y también, se puede extender a límites infinitos, si tomamos $L=-\infty$ *ó* $L=+\infty$. Y teniendo en cuenta, que en el infinito los intervalos son de la forma $(-\infty,r)$ o $(r,+\infty)$, podemos definir de forma general $\lim_{x\to c} f(x)=L$ tal y como se resume en la siguiente tabla

$\lim_{x\to c} f(x)=L$	$L=-\infty$	$L\in\mathbb{R}$	$L=+\infty$
$c=-\infty$	$\forall\, t\in\mathbb{R},\exists s\in\mathbb{R}\ /$ $f(x)<t \quad \Leftarrow x<s$	$\forall\, \epsilon>0,\exists s\in\mathbb{R}\ /$ $\lvert f(x)-L\rvert<\epsilon \quad \Leftarrow x<s$	$\forall\, t\in\mathbb{R},\exists s\in\mathbb{R}\ /$ $f(x)>t \quad \Leftarrow x<s$
$c\in\mathbb{R}$	$\forall\, t\in\mathbb{R},\exists\delta>0\ /$ $f(x)<t \quad \Rightarrow\lvert x-c\rvert<\delta$	$\forall\, \epsilon>0,\exists\delta>0\ /$ $\lvert f(x)-L\rvert<\epsilon \quad \Rightarrow\lvert x-c\rvert<\delta$	$\forall\, t\in\mathbb{R},\exists\delta>0\ /$ $f(x)>t \quad \Rightarrow\lvert x-c\rvert<\delta$
$c=+\infty$	$\forall\, t\in\mathbb{R},\exists s\in\mathbb{R}\ /$ $f(x)<t \quad \Leftarrow x>s$	$\forall\, \epsilon>0,\exists s\in\mathbb{R}\ /$ $\lvert f(x)-L\rvert<\epsilon \quad \Leftarrow x>s$	$\forall\, t\in\mathbb{R},\exists s\in\mathbb{R}\ /$ $f(x)>t \quad \Leftarrow x>s$

 # Ejemplo.-

- *La función* $f(x)=\frac{x+1}{x}$ *tiene* $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=1$ *, puesto que* $\forall\,\epsilon>0$ *tal que* $\lvert f(x)-1\rvert=\left|\frac{x+1}{x}-1\right|=\left|\frac{1}{x}\right|<\epsilon$ *, será* $\left|\frac{1}{x}\right|<\epsilon \Leftarrow x>\frac{1}{\epsilon}=s$ *. Luego, si tomamos* $s=\frac{1}{\epsilon}$ *se cumple la definición.*



☞ *Otra posible definición de límite de función, utilizando sucesiones es la siguiente*

Una función $f(x)$ *tiene por límite* L *en* $x=u$ *, si para toda sucesión de valores* $x_n \neq u$ *del dominio de* f *, que tenga por límite* u *, la sucesión de los valores correspondientes* $f(x_n)$ *tiene por límite* L *.*

6 Límites laterales de una función en un punto

Si $\lim_{x\to c} f(x)=L$ y si $B\subset\mathbb{R}$ tal que $c\in B$, si $\exists \lim_{x\to c: x\in B} f(x)$, se cumplirá $\lim_{x\to c: x\in B} f(x)=L$

Utilizando este resultado, si $c\in\mathbb{R}$, y definimos $B_-=(-\infty, c)$ y $B_+=(c, +\infty)$ podemos calcular los límites laterales de $f(x)$ en un punto c, cuando nos aproximamos a c por la izquierda y por la derecha respectivamente, y denominamos

$$\lim_{x\to c^-} f(x)=\lim_{x\to c: x\in B_-} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to c^+} f(x)=\lim_{x\to c: x\in B_+} f(x)$$

 # Ejemplo.-

- *Dada la función* $f(x)=x^2$ *, para calcular los límites laterales en* $x=2$ *, podemos definir las sucesiones que tienden a 2, por la izquierda y derecha respectivamente dadas por*

Límite por la izquierda						Límite por la derecha					
x	**1,90000**	**1,99000**	**1,99900**	**1,99990**	**...**		**x**	**2,10000**	**2,01000**	**2,00100**	**2,00010**	**...**
f(x)	$1{,}9^2$	$1{,}99^2$	$1{,}999^2$	$1{,}9999^2$	**...**		**f(x)**	$1{,}9^2$	$1{,}99^2$	$1{,}999^2$	$1{,}9999^2$	**...**

Que se observa que en ambos caso $f(x)$ *tiende a 4, cuando* x *tiende a 2*

☞ **Si** $L=\lim_{x\to c} f(x)$ **, se cumple** $\lim_{x\to c^-} f(x)=L=\lim_{x\to c^+} f(x)$.

Este resultado lo podemos utilizar para ver que una función f, no tiene límite en un punto c, si encontramos dos límites laterales distintos.

 # Ejemplo.-

- *Dada la función* $f(x)=\begin{cases} 1 & si\, x<0 \\ 1+x & si\, 0\le x<1 \\ x^2 & si\, x\ge 1 \end{cases}$ *, para calcular si* $f(x)$ *tiene límite en* $x=0$ *y* $x=1$ *, Calculando los límites laterales, obtenemos:*

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0} 1=1=\lim_{x\to 0} x+1=\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1} x+1=2\neq 1\lim_{x\to 1} x^2=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

Luego, $f(x)$ *tiene por límite 1, en* $x=0$ *, y no tiene límite en* $x=1$

7 Propiedades de los límites.

Además, de existir **unicidad del límite de una función en un punto** (*es decir que no puede tener dos límites distintos en un mismo punto*) y de cumplirse que si los límites laterales de una función en un punto son distintos, no existe el límite, se cumplen las siguientes propiedades aritméticas de límites:

Si f y g son dos funciones tales que existen $\lim_{x\to c} f(x)$ *y* $\lim_{x\to c} g(x)$, y además, $\lim_{x\to c} f(x)=L$ *y* $\lim_{x\to c} g(x)=M$ con $L, M\in \mathbb{R}$, entonces:

$$\lim_{x\to c}(f+g)(x)=\lim_{x\to c} f(x)+\lim_{x\to c} g(x)=L+M$$

$$\lim_{x\to c}(f-g)(x)=\lim_{x\to c} f(x)-\lim_{x\to c} g(x)=L-M$$

$$\lim_{x\to c}(f.g)(x)=\lim_{x\to c} f(x).\lim_{x\to c} g(x)=L.M$$

$$\lim_{x\to c}(\lambda.f)(x)=\lambda.\lim_{x\to c} f(x)=\lambda.L;\quad \lambda\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to c}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\lim_{x\to c} f(x)}{.\lim_{n\to c} g(x)}=\frac{L}{M};\quad si\ g(x)\neq 0$$

$$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to c} f(x)^{\lim_{x\to c} g(x)}=L^M;\quad si\ f(x)>0$$

 # Ejemplo:

- $\lim_{x\to 2}(2x-2)^{x^2}=\lim_{x\to 2}(2x-2)^{\lim_{x\to 2} x^2}=(2.2-2)^{2^2}=2^4=16$

8 Límites indeterminados.

Decimos que $\lim_{x \to c} f(x)$ es un límite indeterminado, si al intentar calcular el límite como operación o composición de límites obtenemos en términos de límites expresiones de la forma

$$\frac{k}{0};\ k \neq 0 \ ;\ \frac{0}{0}\ ;\ \frac{\infty}{\infty}\ ;\ 0.\infty\ ;\ \infty - \infty\ ;\ 1^{\infty}\ ;\ \infty^{0}\ ;\ 0^{0}$$

En el caso de límites indeterminados si existen, no se pueden calcular directamente, si no que se debe de transformar la expresión previamente.

Indeterminación del tipo k / 0 , con k distinto de 0

Si al calcular el límite de una función obtenemos una indeterminación del tipo $\frac{k}{0};\ k \neq 0$, se hallan los límites laterales; si estos existen y son iguales, la función tiene límite y este coincide con el valor de los límites laterales. En caso contrario, no existe límite.

 # Ejemplos.-

- *Como* $\lim_{x \to 0} \frac{x+4}{x} = \frac{4}{0}$ *, es una indeterminación.*

  Hallamos los límites laterales

  $$\lim_{x \to 0^-} \frac{x+4}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{x+4}{x} = +\infty$$

  Luego, como los límites laterales no coinciden, se tiene que no existe $\lim_{x \to 0} \frac{x+4}{x}$

- *Como* $\lim_{x \to 0} \frac{4}{x^2} = \frac{4}{0}$ *, es una indeterminación.*

  Hallamos los límites laterales

  $$\lim_{x \to 0^-} \frac{4}{x^2} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{4}{x^2} = +\infty$$

  Luego, como los límites laterales coinciden, se tiene

  $$\lim_{x \to 0} \frac{x+4}{x} = +\infty$$

Indeterminación del tipo 0 / 0

Si al calcular el límite de una función f obtenemos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, tendremos que distinguir entre dos casos para resolverla:

- Si f es una **función racional**, se descompone el numerador y el denominador en factores y se simplifica

- Si f es una **función con raíces cuadradas en el numerador (*o en el denominador*)**, multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del numerador (*o del denominador*)

  # Ejemplos.-

- *¿Para que valores el límite de la función* $f(x)=\frac{x^4-1}{x^2-1}$ *es un límite indeterminado?. Calcula* $\lim_{x\to 1} f(x)$.

  El límite es indeterminado para los valores en los que se anula el denominador, es decir para $x=-1$ *y* $x=1$ *, ya que en estos casos se obtiene un límite de la forma* $\frac{0}{0}$ *, por ser*

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^4-1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{(-1)^4-1}{(-1)^2-1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1^4-1}{1^2-1}=\frac{0}{0}$$

  Sin embargo, como

$$\frac{x^4-1}{x^2-1}=\frac{(x^2-1).(x^2+1)}{x^2-1}=x^2+1$$

  Se cumple

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^4-1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1} x^2+1=1^2+1=2$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1} x^2+1=1^2+1=2$$

- *Calculemos:* $\lim_{x\to 0}\frac{15x}{\sqrt{16-x}-4}$.

  Como

$$\lim_{x\to 0}\frac{15x}{\sqrt{16-x}-4}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{\sqrt{16-0}-4}=\frac{0}{0}$$

Si multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador, obtenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{(15x).(\sqrt{16-x}+4)}{(\sqrt{16-x}-4).(\sqrt{16-x}+4)}=\lim_{x\to 0}\frac{(15x).(\sqrt{16-x}+4)}{16-x-16}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{15.(\sqrt{16-x}+4)}{-1}=-120$$

Indeterminación del tipo infinito / infinito

Si calculamos el límite de una función f obtenemos una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Si $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ con $P(x)$ y $Q(x)$ un polinomio de grado m y n respectivamente, se divide el numerador y el denominador entre la variable x^h , donde $h=min\{m,n\}$.

Si $f(x)=\frac{\sqrt[k]{P(x)}}{Q(x)}$ con $P(x)$ y $Q(x)$ un polinomio de grado m y n respectivamente, se divide el numerador y el denominador entre la variable x^h , donde $h=min\left\{\frac{m}{k},n\right\}$.

Si $f(x)=\frac{P(x)}{\sqrt[k]{Q(x)}}$ con $P(x)$ y $Q(x)$ un polinomio de grado m y n respectivamente, se divide el numerador y el denominador entre la variable x^h , donde $h=min\left\{m,\frac{n}{k}\right\}$.

 # Ejemplos:

- *Como* $\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2+2x-3}{2x^2+6}=\frac{\infty}{\infty}$

  Si dividimos el numerador y el denominador entre x^2 *, obtenemos*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{6x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{6}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{2+\frac{6}{x^2}}=\frac{6+0-0}{2+0}=\frac{6}{2}=3$$

- *Como* $\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2-2x+1}{\sqrt{x^4+6}}=\frac{\infty}{\infty}$

  Si dividimos el numerador y el denominador entre x^2 *, obtenemos*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{6x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^4}{x^4}+\frac{6}{x^4}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{6}{x^4}}}=\frac{6-0+0}{\sqrt{1+0}}=5$$

Indeterminación del tipo infinito - infinito

Si se puede eliminar este tipo de indeterminación tendremos que distinguir dos casos:

- Si f es **diferencia de funciones racionales**, se efectúa previamente dicha operación para obtener una función racional, en la cual puede aparecer alguna indeterminación de las estudiadas anteriormente.
- Si f es **diferencia de funciones con raíces cuadradas**, multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada de la función.

 # Ejemplos.-

- *Como* $\lim_{x\to 2}\left(\frac{4x+4}{x^2-4}-\frac{3}{x-2}\right)=\infty-\infty$

Si efectuamos la diferencia de las dos fracciones, obtenemos:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{4x+4}{x^2-4}-\frac{3}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{4x+4}{x^2-4}-\frac{3x+6}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x+2}\right)=\frac{1}{4}$$

- *Como* $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}=\infty-\infty$

Si multiplicamos y dividimos por $\sqrt{x+5}+\sqrt{x-5}$ *, obtenemos:*

$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}=\lim_{x\to +\infty}\frac{(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}).(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-5})}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{(x+5)-(x-5)}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-5}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{10}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}}=\frac{10}{\infty}=0$$

Indeterminación del tipo 0 . infinito

Si podemos transformas la indeterminación $0.\infty$ ó $\infty.0$, en una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, se resuelve la nueva indeterminación con los procedimientos explicados anteriormente.

 # Ejemplo.-

- *Como* $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{3}.\sqrt{\frac{1}{x-1}}\right)=0.\infty$

Si multiplicamos las funciones antes de calcular el límite, obtenemos:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{3}.\sqrt{\frac{1}{x-1}}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{\frac{(x-1)^2}{9.(x-1)}}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{\frac{x-1}{9}}\right)=0$$

Indeterminación del tipo 1 elevado a infinito

Si $\lim_{x\to c} f(x)=1$ y $\lim_{x\to c} g(x)=\pm\infty$. Al calcular $\lim_{x\to c} f(x)^{\lim_{x\to c} g(x)}$ aparecerá una indeterminación del tipo $1^{\pm\infty}$.

Para resolver este tipo de indeterminaciones, utilizamos la sucesión $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, ya que sabemos que $\lim_{n\to\infty} a_n=e$ y teniendo en cuenta, que si $f(x)$ es una función real y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión real tal que $\lim_{n\to\infty} b_n=c$, entonces, $\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{n\to\infty} f(b_n)$

 # Ejemplo.-

- *Como* $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(3x+6)}{(3x-8)}\right)^{2x}=1^{\infty}$. *Modificando la función, obtenemos*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(3x+6)}{(3x-8)}\right)^{2x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(3x-8+14)}{(3x-8)}\right)^{2x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{14}{3x-8}\right)^{2x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x-8}{14}}\right)^{\left(\frac{3x-8}{14}\right).2x.\left(\frac{14}{3x-8}\right)}=e^{\lim_{x\to+\infty} 2x.\left(\frac{14}{3x-8}\right)}=e^{\frac{28}{3}}=\sqrt[3]{e^{28}}$$