

Problemas – Tema 5

Problemas resueltos - 8 - cociente de polinomios con mezcla de tipos de raíces

1. Calcula $\int \frac{x+3}{x^3+x} dx$

$$\int \frac{x+3}{x^3+x} dx = \int \frac{x+3}{x(x^2+1)} dx$$

Descomponemos el denominador como producto de una **raíz simple** y una **raíz compleja**.

$$\frac{x+3}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$$

$$x+3 = A(1+x^2) + (Bx+C)x$$

Damos valores para obtener los coeficientes indeterminados.

$$\text{Si } x=0 \rightarrow 3=A$$

$$\text{Si } x=1 \rightarrow 4=6+B+C$$

$$\text{Si } x=2 \rightarrow 5=15+4B+2C$$

Con las dos últimas ecuaciones planteamos un sistema 2×2 de soluciones.

$$B=-3, \quad C=1$$

Y la integral queda expresada como:

$$\int \frac{x+3}{x(x^2+1)} dx = \int \frac{3}{x} dx + \int \frac{-3x+1}{1+x^2} dx = 3 \cdot \ln|x| - 3 \int \frac{x}{1+x^2} dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx + C$$

$$3 \cdot \ln|x| - \frac{3}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx + \operatorname{arccotg} x + C = 3 \cdot \ln|x| - \frac{3}{2} \ln|1+x^2| + \operatorname{arccotg} x + C$$

2. Calcula $\int \frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x} dx$

El grado del numerador es inferior al grado del denominador

Obtenemos las raíces del denominador $\rightarrow x^3-2x^2+x=0 \rightarrow x=0$, $x=1$, $x=1$

Una raíz simple y una raíz doble.

Aplicamos método de coeficientes indeterminados.

$$\frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \rightarrow \text{Hacemos m.c.m. e igualamos numeradores}$$

$$x^2+5 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

$$\text{Si } x=0 \rightarrow 5 = A(1) + B \cdot 0 + C \cdot 0 \rightarrow A=5$$

$$\text{Si } x=1 \rightarrow 6 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 1 \rightarrow C=6$$

$$\text{Si } x=2 \rightarrow 9 = A(1) + B \cdot 2 + C \cdot 2 \rightarrow 9 = 5 + 2B + 12 \rightarrow B = -4$$

Llevamos estos resultados a la integral.

$$\int \frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x} dx = A \int \frac{1}{x} dx + B \int \frac{1}{x-1} dx + C \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = 5 \cdot \ln|x| - 4 \cdot \ln|x-1| - 6 \cdot \frac{1}{x-1} + C$$

3. Resuelve $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-3)} dx$

Grado del numerador inferior al grado del denominador → método de coeficientes indeterminados

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-3} \rightarrow \text{una raíz doble y una raíz simple}$$

$$x^2+1 = A(x+1)(x-3) + B(x-3) + C(x+1)^2$$

$$\text{Si } x=-1 \rightarrow 2 = -4B \rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Si } x=3 \rightarrow 10 = 16C \rightarrow C = \frac{5}{8}$$

$$\text{Si } x=0 \rightarrow 1 = A(-3) + B(-3) + C(1)^2 \rightarrow 1 = -3A + \frac{3}{2} + \frac{5}{8} \rightarrow A = \frac{3}{8}$$

$$I = \int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-3)} dx = \int \frac{3}{8(x+1)} dx + \int \frac{-1}{2(x+1)^2} dx + \int \frac{5}{8(x-3)} dx$$

$$I = \frac{3}{8} \int \frac{1}{(x+1)} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x+1)^2} dx + \frac{5}{8} \int \frac{1}{(x-3)} dx$$

$$I = \frac{3}{8} \ln|x+1| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{5}{8} \ln|x-3| + C$$