Trabajo Práctico Nº 8: Superficies
Unidad Temática 8

Contenidos:
Ecuación general de segundo grado en tres variables. Superficie Cónica. Superficies Cilíndricas. Superficies Cuádricas. Ecuación cartesiana de las superficies cónicas, cilíndricas y cuádricas. Elementos característicos. Representaciones gráficas. Superficies de revolución. Aplicaciones

Propósitos:
Se espera que el estudiante pueda:
- ✓ Discriminar qué ecuaciones de segundo grado en tres variables representan superficies cónicas, cilíndricas o cuádricas.
- ✓ Determinar los elementos: intersecciones con ejes coordenados y trazas que caracterizan a las superficies cónicas, cilíndricas o cuádricas analizando la ecuación algebraica que las define.
- ✓ Realizar representaciones gráficas de superficies cónicas, cilíndricas y cuádricas.
- ✓ Analizar la variación de parámetros en una ecuación de segundo grado en tres variables para que la misma represente una superficie cónica, cilíndrica o cuádrica.

Actividades sugeridas:

1d - 1f - 2b - 2d - 3c - 4c - 4d - 5b - 7 - 9 - 10a

1. Ejercicio

Identificar qué tipo de cuádrica representan las siguientes ecuaciones de segundo grado en R^3. Luego:

i. Analizar la intersección entre los ejes coordenados y la superficie.
ii. Estudiar las trazas, es decir, la intersección entre los planos coordenados y la superficie.
iii. Ofrecer un gráfico aproximado de la superficie mostrando los resultados de los ítems anteriores.

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$	**b)** $16x^2 + 4y^2 + 8z^2 = 32$	**c)** $x^2 + y^2 - 9z^2 = 9$
d) $36x^2 - 9y^2 - 36z^2 = 36$	**e)** $x^2 + 4y^2 = -16z$	**f)** $4x^2 - 9y^2 = -36z$

Nota: *En la página 14 se ofrece un cuadro que caracteriza a los lugares geométricos que describen las ecuaciones de segundo grado de la forma:* $Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = R$

2. Ejercicio

Identificar qué tipo de superficie cilíndrica representan las siguientes ecuaciones de segundo grado en R^3. Luego:

i. Analizar la intersección entre los ejes coordenados y la superficie.
ii. Estudiar las trazas, es decir, la intersección entre los planos coordenados y la superficie.
iii. Ofrecer un gráfico aproximado de la superficie mostrando los resultados de los ítems anteriores.

a) $y^2 + z^2 = 4$
b) $4x^2 + 25y^2 = 100$
c) $z = 4y^2$
d) $x^2 - y^2 = 1$

Nota: En la página 14 se ofrece un cuadro que caracteriza a los lugares geométricos que describen las ecuaciones de segundo grado de la forma: $Mx^2 + Ny^2 = Sz$

3. Ejercicio

Estudiar y obtener: intersección con los ejes coordenados, trazas (intersección con los planos coordenados) y realizar un gráfico aproximado de las siguientes superficies cónicas.

a) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
b) $(z-1)^2 + (y-1)^2 - x^2 = 0$
c) $x^2 - y^2 + (z-2)^2 = 0$

4. Ejercicio

Las siguientes ecuaciones de segundo grado no son cuádricas, ni superficies cilíndricas, ni superficies cónicas. ¿Describen algún lugar geométrico de R^3? ¿Cuál?

a) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 0$
b) $3x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 75 = 0$
c) $36y^2 - 25z^2 = 0$
d) $3x^2 + 4y^2 = 0$
e) $2z^2 - 8 = 0$
f) $x^2 = 0$

5. Ejercicio

a) (*Desafío*) Dada la superficie esférica de ecuación $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100$, calcular las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia que se obtiene como intersección de la mencionada superficie con el plano de ecuación $2x - 2y - z + 9 = 0$.

b) Identificar la superficie de ecuación $4x^2 - y^2 = -16z$. Luego:
- **i.** Hallar las ecuaciones del par de rectas que se obtiene al intersectar la superficie con el plano de ecuación $z = 0$ y obtener la medida del menor ángulo entre ellas, aproximando al minuto más cercano.
- **ii.** Obtener las coordenadas en R^3 del foco de la parábola que se obtiene cuando se intersecta la superficie dada con el plano $y = 0$

c) Identificar la superficie de ecuación $2x^2 - y^2 - 5z^2 = 1$ y realizar una representación gráfica aproximada. Luego:
- **i.** Hallar una ecuación de la hipérbola determinada por la intersección entre la superficie y el plano $y = 7$.
- **ii.** Obtener la medida del diámetro transverso, conjugado y focal de la hipérbola calculada en el ítem (i). Además, determinar su excentricidad.

d) Obtener el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia al eje y es el triple de la correspondiente al eje z. Clasificar la superficie resultante.

e) Estudiar qué lugares geométricos se describen cuando la superficie $4x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$ se corta con planos de ecuación $x = k$ con $k \in R$.

6. Ejercicio

Sea la ecuación: $x^2 + ay^2 - 4z^2 = b$. Se pide:

a) Siendo $a = 16$ y $b = 64$ identificar qué superficie representa la ecuación.
b) Sea $a = -8$. Encontrar el valor real de b para que la traza de la superficie con el plano $y = 0$ sea una hipérbola cuyo semidiámetro conjugado mide 2. ¿De qué superficie se trata?

7. Ejercicio

Sea la siguiente cuádrica: $ax^2 + 12y^2 + bz^2 = 144$. Determinar para qué valores reales de a y de b la ecuación representa:

a) Un hiperboloide de una hoja
b) Un hiperboloide de una hoja de revolución
c) Una superficie cilíndrica recta de directriz hiperbólica
d) Un elipsoide cuya intersección con el plano $y = 0$ es una elipse de eje focal z, con semidiámetro menor 3 y semidiámetro mayor 4.

8. Ejercicio

Sea la ecuación de segundo grado: $kx^2 + ty^2 + 8z^2 = 1$

a) Hallar todos los valores reales de k y de t para que la superficie sea un hiperboloide de una hoja cuya intersección con el eje de ordenadas sea vacía.
b) Si $k = t = 8$ identificar la superficie y hallar la intersección con el plano $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$.
c) Hallar todos los valores reales de k y de t para que la superficie sea un cilindro recto de directriz elíptica y cuya curva directriz esté ubicada en el plano de ecuación $y = 0$.

9. Ejercicio

Sea la ecuación de segundo grado: $x^2 + ay^2 - 4z^2 = b$. Se pide:

a) Identificar la superficie que resulta cuando:
- **i.** $a = 0, b > 0$
- **ii.** $a < 0, b = 0$
- **iii.** $a > 0, b < 0$

b) Estudiar qué valores deben adoptar los parámetros a y b para que la ecuación represente:
- **i.** Un hiperboloide de revolución de una hoja
- **ii.** Una superficie cilíndrica recta de directriz hiperbólica cuya traza con el plano de ecuación y = 0 sea una hipérbola de eje transverso coincidente con el eje x, cuyo semidiámetro imaginario sea 2
- **iii.** Un hiperboloide de dos hojas

c) ¿Cuáles son las trazas con los planos coordenados si $a = b = 1$?

d) ¿Existen valores reales de los parámetros a y b tales que dicha ecuación pueda representar un paraboloide hiperbólico?

10. Ejercicio

a) Sea la ecuación $ax^2 - 2y^2 + z^2 = b$. Se pide obtener los valores reales de los parámetros a y b para que la ecuación corresponda a una superficie de revolución cuya intersección con el plano $y = 2$ sea una circunferencia de radio 3. Identificar de qué superficie se trata.

b) En las siguientes superficies, indicar para qué valores reales de k, si existen, las mismas son de revolución. Clasificar la superficie. Justificar su respuesta.

i. $10x^2 - 10y^2 + kz^2 = 1$

ii. $4x^2 + 4z^2 = ky$

iii. $kx^2 - (k-2)y^2 + 4z^2 = 0$

Respuestas

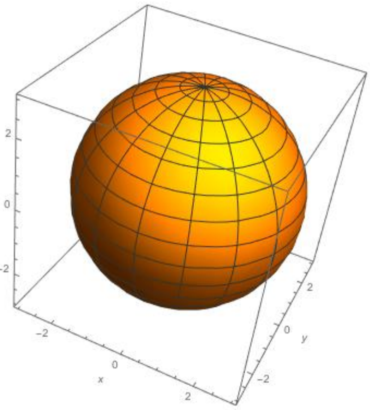
1. Ejercicio

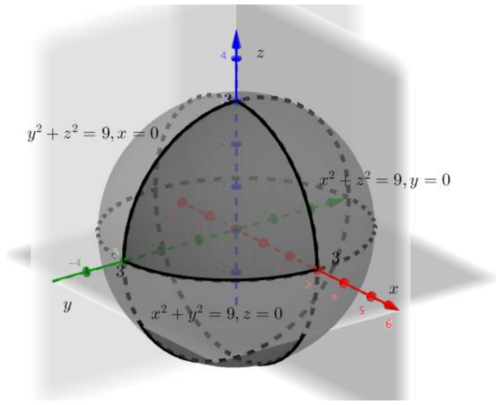
a) $\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = 9}$. **Esfera de centro $\boldsymbol{(0;0;0)}$ y radio $\boldsymbol{r = 3}$.**

i. Intersección entre los ejes coordenados y la superficie:
$eje\ x\ \cap Sup.$: $(\pm 3; 0; 0)$ $eje\ y\ \cap Sup.$: $(0; \pm 3; 0)$ $eje\ z\ \cap Sup.$: $(0; 0; \pm 3)$

ii. Trazas:
$pl\ (xy)\ \cap Sup.$: Son los puntos $(x; y; z)$ tales que: $x^2 + y^2 = 9$ y $z = 0$. Geométricamente es una circunferencia de centro $(0; 0; 0)$y radio $r = 3$ en el plano $z = 0$
$pl\ (xz)\ \cap Sup.$: Son los puntos $(x; y; z)$ tales que: $x^2 + z^2 = 9$ e $y = 0$. Geométricamente es una circunferencia de centro $(0; 0; 0)$y radio $r = 3$ en el plano $y = 0$
$pl\ (yz)\ \cap Sup.$: Son los puntos $(x; y; z)$ tales que: $y^2 + z^2 = 9$ y $x = 0$. Geométricamente es una circunferencia de centro $(0; 0; 0)$y radio $r = 3$ en el plano $x = 0$

iii. Gráfico:





b) $\mathbf{16x^2 + 4y^2 + 8z^2 = 32 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{4} = 1}$**. Cuádrica con centro de simetría. Elipsoide**. Centro de simetría en $(0; 0; 0)$, ejes de simetría los ejes coordenados y semidiámetros: $a = \sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{2}$ y $c = 2$

i. Intersección entre los ejes coordenados y la superficie:
$eje\ x\ \cap Sup.: \left(\pm\sqrt{2}; 0; 0\right)$ $\quad eje\ y\ \cap Sup.: \left(0; \pm 2\sqrt{2}; 0\right)$ $\quad eje\ z\ \cap Sup.: (0; 0; \pm 2)$

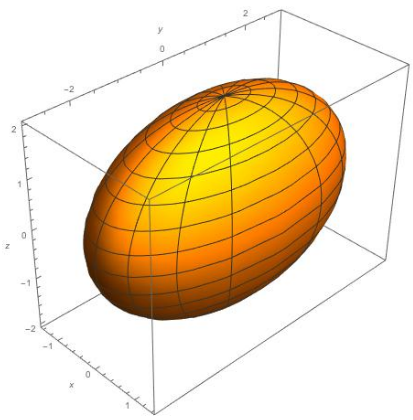
ii. Trazas:

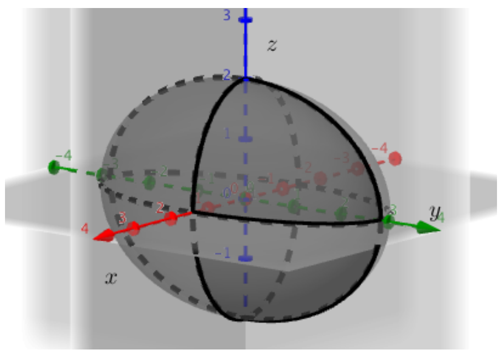
$pl\ (xy)\ \cap Sup.$: Son los puntos $(x; y; z)$ tales que: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$ y $z = 0$. Geométricamente es una elipse de centro $(0; 0; 0)$ y semidiámetros: $a = \sqrt{2}$ y $b = 2\sqrt{2}$ en el plano $z = 0$

$pl\ (xz)\ \cap Sup.$: Son los puntos $(x; y; z)$ tales que: $\frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{4} = 1$ e $y = 0$. Geométricamente es una elipse de centro $(0; 0; 0)$ y semidiámetros: $a = \sqrt{2}$ y $c = 2$ en el plano $y = 0$

$pl\ (yz)\ \cap Sup.$: Son los puntos $(x; y; z)$ tales que: $\frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{4} = 1$ y $x = 0$. Geométricamente es una elipse de centro $(0; 0; 0)$ y semidiámetros: $b = 2\sqrt{2}$ y $c = 2$ en el plano $x = 0$

iii. Gráfico: (En el gráfico de la derecha se muestra un detalle de las trazas)





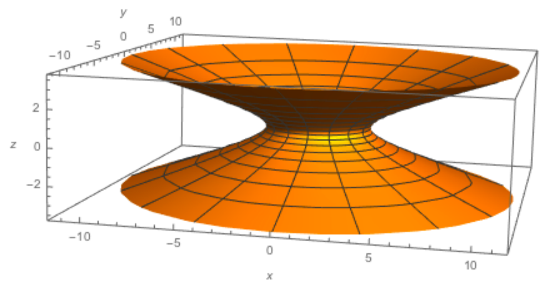
c) $\boldsymbol{x^2+y^2-9z^2=9 \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}-z^2=1}$. **Cuádrica con centro de simetría. Hiperboloide de una hoja**. Centro de simetría en $(0;0;0)$, ejes de simetría los ejes coordenados y semidiámetros: $a=b=3$ y $c=1$

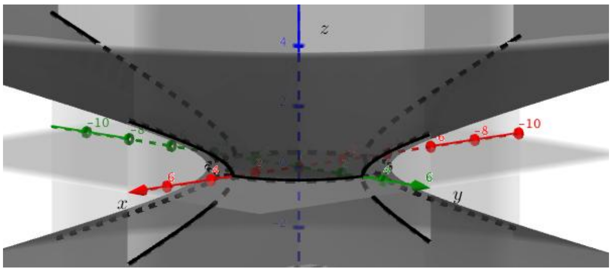
d)

- **i.** Intersección entre los ejes coordenados y la superficie:
  $eje\ x\ \cap Sup.: (\pm 3;0;0)$ $\quad eje\ y\ \cap Sup.: (0;\pm 3;0)$ $\quad eje\ z\ \cap Sup.: \emptyset$

- **ii.** Trazas:
  $pl\ (xy) \cap Sup.$: Son los puntos $(x;y;z)$ tales que: $x^2+y^2=9$ y $z=0$. Geométricamente es una circunferencia de centro $(0;0;0)$ y radio: $r=3$ en el plano $z=0$
  $pl\ (xz) \cap Sup.$: Son los puntos $(x;y;z)$ tales que: $\frac{x^2}{9}-z^2=1$ e $y=0$. Geométricamente es una hipérbola de semidiámetro transverso: $a=3$ y conjugado $c=1$ en el plano $y=0$
  $pl\ (yz) \cap Sup.$: Son los puntos $(x;y;z)$ tales que: $\frac{y^2}{9}-z^2=1$ y $x=0$. Geométricamente es una hipérbola de semidiámetros transverso $b=3$ y conjugado $c=1$ en el plano $x=0$

- **iii.** Gráfico: (en el gráfico de la derecha puede observarse un detalle de las trazas)





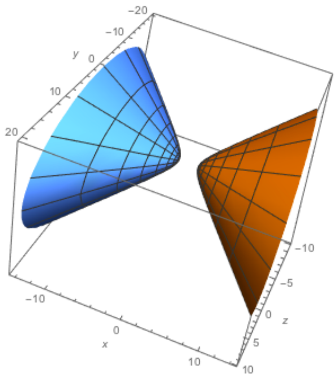
e) $\boldsymbol{36x^2-9y^2-36z^2=36 \Rightarrow x^2-\frac{y^2}{4}-z^2=1}$. **Cuádrica con centro de simetría. Hiperboloide de dos hojas**. Centro de simetría en $(0;0;0)$, ejes de simetría los ejes coordenados y semidiámetros: $a=c=1$ y $b=2$

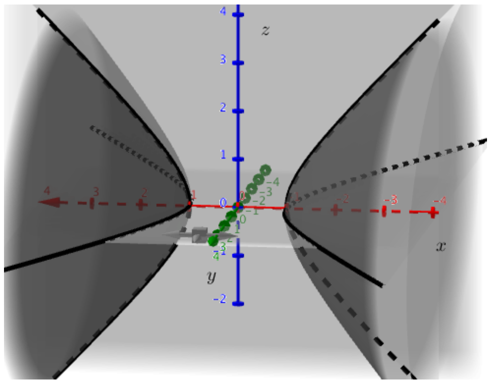
f)

- **i.** Intersección entre los ejes coordenados y la superficie:
  $eje\ x\ \cap Sup.: (\pm 1;0;0)$ $\quad eje\ y\ \cap Sup.: \emptyset$ $\quad eje\ z\ \cap Sup.: \emptyset$ (no hay intersección)

- **ii.** Trazas:
  $pl\ (xy) \cap Sup.$: Son los puntos $(x;y;z)$ tales que: $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ y $z=0$. Geométricamente es una hipérbola con centro $(0;0;0)$ en el plano $z=0$ y eje focal: $eje\ x$
  $pl\ (xz) \cap Sup.$: Son los puntos $(x;y;z)$ tales que: $x^2-z^2=1$ e $y=0$. Geométricamente es una hipérbola equilátera en el plano $y=0$ y eje focal: $eje\ x$
  $pl\ (yz)\ \cap Sup.: \emptyset$ (no hay intersección)

iv. Gráfico: (en el gráfico de la derecha puede observarse un detalle de las trazas)



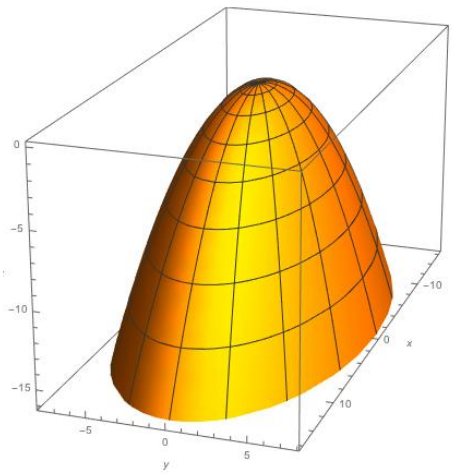


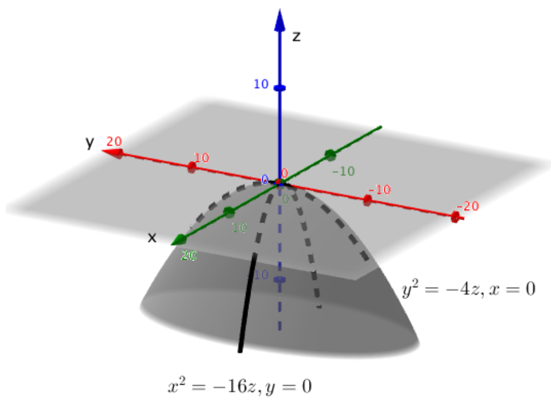
g) $\boldsymbol{x^2+4y^2=-16z \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=-z}$. **Cuádrica sin centro de simetría: Paraboloide Elíptico de eje $\boldsymbol{z}$**

i. Intersección entre los ejes coordenados y la superficie:
$eje\ x\ \cap Sup.: (0;0;0)$ $\quad eje\ y\ \cap Sup.: (0;0;0)$ $\quad eje\ z\ \cap Sup.: (0;0;0)$

ii. Trazas:
$pl\ (xy)\ \cap Sup.: (0;0;0)$
$pl\ (xz)\ \cap Sup.:$ Son los puntos $(x;y;z)$ tales que: $x^2=-16z$ e $y=0$. Geométricamente es una parábola en el plano $y=0$ de parámetro: $p=8$ con foco en el eje de cotas cuando $z<0$
$pl\ (yz)\ \cap Sup.:$ Son los puntos $(x;y;z)$ tales que: $y^2=-4z$ y $x=0$. Geométricamente es una parábola en el plano $x=0$ de parámetro: $p=2$ con foco en el eje de cotas cuando $z<0$

iii. Gráfico: (en el gráfico de la derecha pueden observarse el detalle las trazas)



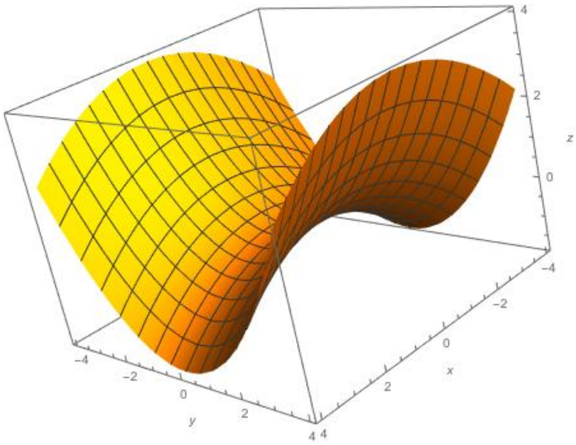


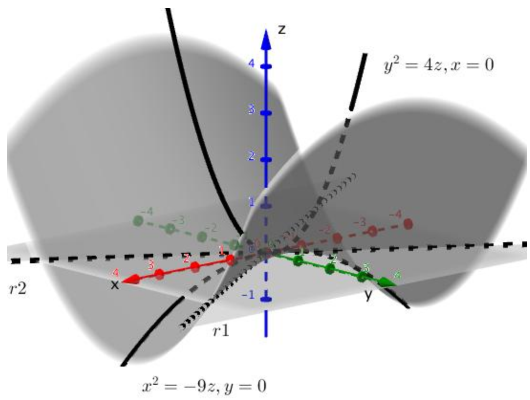
h) $4x^2 - 9y^2 = -36z \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = -z$. **Cuádrica sin centro de simetría: Paraboloide Hiperbólico de eje z**

i. Intersección entre los ejes coordenados y la superficie:
$eje\ x\ \cap Sup.: (0; 0; 0)$ $\quad eje\ y\ \cap Sup.: (0; 0; 0)$ $\quad eje\ z\ \cap Sup.: (0; 0; 0)$

ii. Trazas:
$pl\ (xy)\ \cap Sup.$: Son los puntos $(x; y; z)$ tales que: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 0$ y $z = 0$. Geométricamente es un par de rectas que se cortan en el origen de coordenadas y están incluidas en el plano $z = 0$. Las ecuaciones de las rectas son: $r_1: \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y $r_2: \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
$pl\ (xz)\ \cap Sup.$: Son los puntos $(x; y; z)$ tales que: $x^2 = -9z$ e $y = 0$. Geométricamente es una parábola de parámetro: $p = 4{,}5$ con $z < 0$ en el plano $y = 0$
$pl\ (yz)\ \cap Sup.$: Son los puntos $(x; y; z)$ tales que: $y^2 = 4z$ y $x = 0$. Geométricamente es una parábola de parámetro: $p = 2$ con $z > 0$ en el plano $x = 0$

iii. Gráfico: (en el gráfico de la derecha pueden observarse detalle de las trazas)





2. Ejercicio

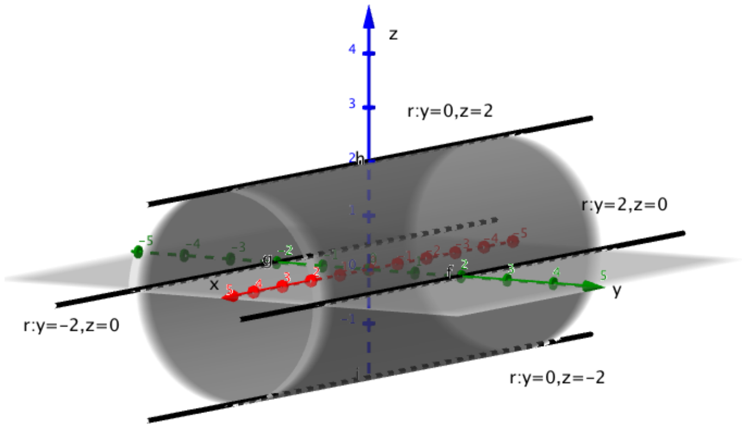
a) $y^2 + z^2 = 4$. **Superficie Cilíndrica: Cilindro circular recto de eje x.**

i. Intersección entre los ejes coordenados y la superficie:
$eje\ x\ \cap Sup.: \emptyset$ $\quad eje\ y\ \cap Sup.: (0; \pm 2; 0)$ $\quad eje\ z\ \cap Sup.: (0; 0; \pm 2)$

ii. Trazas:
$pl\ (xy)\ \cap Sup.$: Son los puntos $(x; y; z)$ tales que: $y^2 = 4$ y $z = 0$. Geométricamente es un par de rectas paralelas que están incluidas en el plano $z = 0$. Las ecuaciones de las rectas son: $r_1: \begin{cases} y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$ y $r_2: \begin{cases} y = -2 \\ z = 0 \end{cases}$
$pl\ (xz)\ \cap Sup.$: Son los puntos $(x; y; z)$ tales que: $z^2 = 4$ y $y = 0$. Geométricamente es un par de rectas paralelas que están incluidas en el plano $y = 0$. Las ecuaciones de las rectas son: $r_1: \begin{cases} z = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ y $r_2: \begin{cases} z = -2 \\ y = 0 \end{cases}$

$pl\ (yz) \cap Sup.$: Son los puntos $(x; y; z)$ tales que: $y^2 + z^2 = 4$ y $x = 0$. Geométricamente es una circunferencia de centro: $(0; 0; 0)$ y radio $r = 2$ en el plano $x = 0$

iii. Gráfico:



b) $\mathbf{4x^2 + 25y^2 = 100 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1}$**. Superficie cilíndrica: Cilindro elíptico recto de eje z.**

i. Intersección entre los ejes coordenados y la superficie:
$eje\ x \cap Sup.$: $(\pm 5; 0; 0)$ $eje\ y \cap Sup.$: $(0; \pm 2; 0)$ $eje\ z \cap Sup.$: $\emptyset$

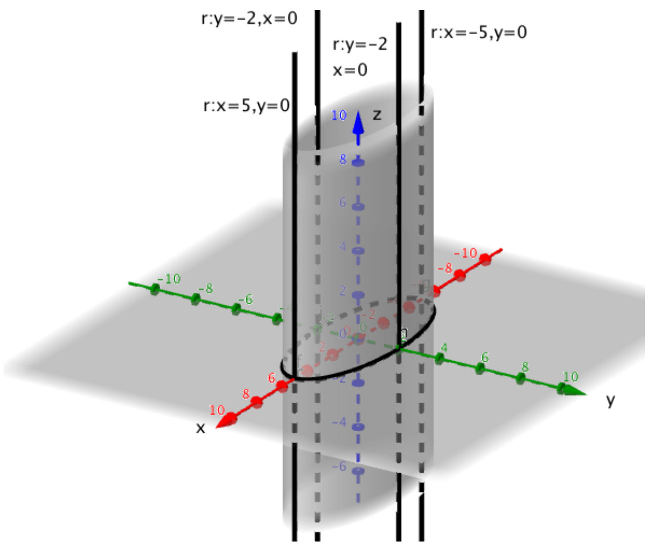
ii. Trazas:

$pl\ (xy) \cap Sup.$: Son los puntos $(x; y; z)$ tales que: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ y $z = 0$. Geométricamente es una elipse en el plano $z = 0$ con semidiámetros: $a = 5$ y $b = 2$

$pl\ (xz) \cap Sup.$: Son los puntos $(x; y; z)$ tales que: $x^2 = 25$ e $y = 0$. Geométricamente es un par de rectas paralelas que están incluidas en el plano $y = 0$. Las ecuaciones de las rectas son: $r_1: \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases}$ y $r_2: \begin{cases} x = -5 \\ y = 0 \end{cases}$

$pl\ (yz) \cap Sup.$: Son los puntos $(x; y; z)$ tales que: $y^2 = 4$ y $x = 0$. Geométricamente es un par de rectas paralelas que están incluidas en el plano $x = 0$. Las ecuaciones de las rectas son: $r_1: \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases}$ y $r_2: \begin{cases} y = -2 \\ x = 0 \end{cases}$

iii. Gráfico:

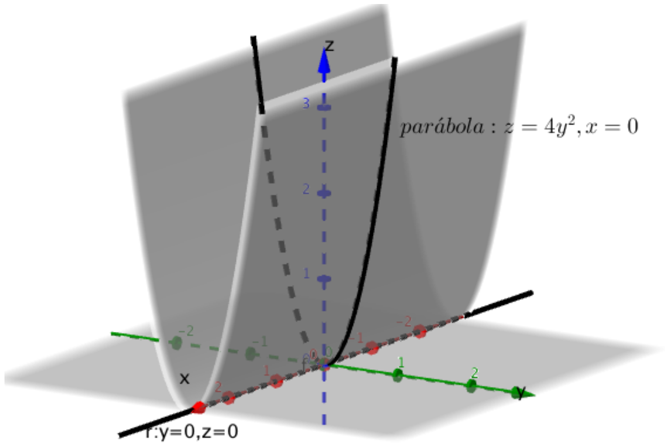


c) $z = 4y^2$. **Superficie Cilíndrica: Cilindro parabólico recto.**

i. Intersección entre los ejes coordenados y la superficie:
$eje\ x\ \cap Sup.$: $eje\ x$ $\quad eje\ y\ \cap Sup.$: $(0;0;0)$ $\quad eje\ z\ \cap Sup.$: $(0;0;0)$

ii. Trazas:
$pl\ (xy)\ \cap Sup.$: Son los puntos $(x;y;z)$ tales que: $y = 0$ y $z = 0$. Geométricamente es una recta, es el eje x.
$pl\ (xz)\ \cap Sup.$: Son los puntos $(x;y;z)$ tales que: $z = 0$ e $y = 0$. Geométricamente es una recta, es el eje x.
$pl\ (yz)\ \cap Sup.$: Son los puntos $(x;y;z)$ tales que: $y^2 = \frac{1}{4}z$ y $x = 0$. Geométricamente es una parábola de parámetro $p = \frac{1}{8}$ en el plano $x = 0$.

iii. Gráfico:

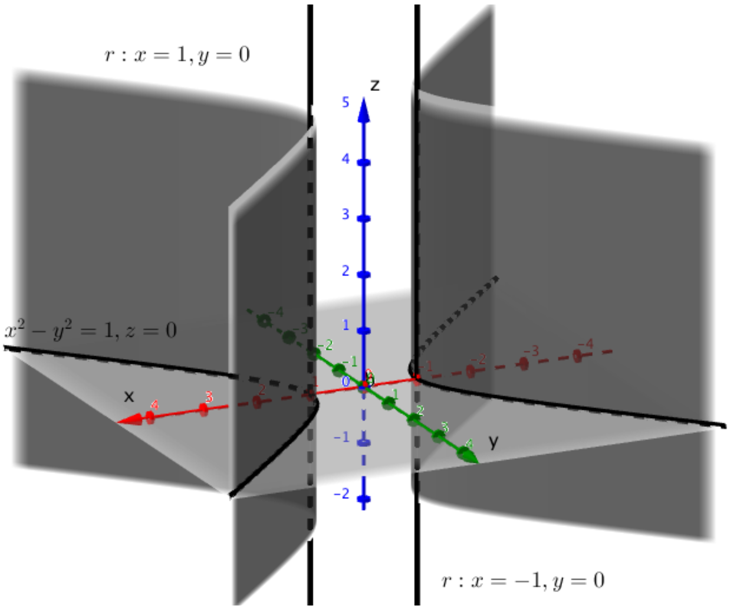


d) $x^2 - y^2 = 1$. **Superficie Cilíndrica: Cilindro hiperbólico recto.**

i. Intersección entre los ejes coordenados y la superficie:
$eje\ x\ \cap Sup.$: $(\pm 1;0;0)$ $\quad eje\ y\ \cap Sup.$: $\emptyset$ $\quad eje\ z\ \cap Sup.$: $\emptyset$

ii. Trazas:
$pl\ (xy)\ \cap Sup.$: Son los puntos $(x;y;z)$ tales que: $x^2 - y^2 = 1$ y $z = 0$. Geométricamente es una hipérbola equilátera en el plano $z = 0$ cuyo eje focal es el eje x.
$pl\ (xz)\ \cap Sup.$: Son los puntos $(x;y;z)$ tales que: $x^2 = 1$ e $y = 0$. Geométricamente es un par de rectas paralelas incluidas en el plano $y = 0$. Las ecuaciones de las rectas son: $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ y $r': \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$
$pl\ (yz)\ \cap Sup.$: $\emptyset$

iii. Gráfico:



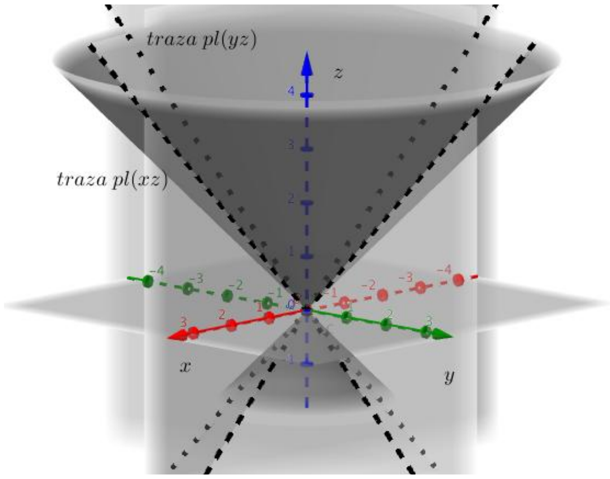
3. Ejercicio

a) $\boldsymbol{x^2 + y^2 - z^2 = 0}$ **Superficie circular de eje** $\boldsymbol{z}$

i. Intersección entre los ejes coordenados y la superficie:
$eje\ x\ \cap Sup.$: $(0;0;0)$ $eje\ y\ \cap Sup.$: $(0;0;0)$ $eje\ z\ \cap Sup.$: $(0;0;0)$

ii. Trazas:
$pl\ (xy) \cap Sup.$: Son los puntos $(x;y;z)$ tales que: $x^2 + y^2 = 0$ y $z = 0$. Geométricamente, las ecuaciones se satisfacen sólo en el punto $(0;0;0)$. Éste punto es el vértice.
$pl\ (xz) \cap Sup.$: Son los puntos $(x;y;z)$ tales que: $x^2 - z^2 = 0$ e $y = 0$. Geométricamente es un par de rectas que se cortan en un punto y están incluidas en el plano $y = 0$. Las ecuaciones de las rectas son: $r: \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$ y $r': \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$
$pl\ (yz) \cap Sup.$: Son los puntos $(x;y;z)$ tales que: $y^2 - z^2 = 0$ y $x = 0$. Geométricamente es un par de rectas que se cortan en un punto y están incluidas en el plano $x = 0$. Las ecuaciones de las rectas son: $r: \begin{cases} y = z \\ x = 0 \end{cases}$ y $r': \begin{cases} y = -z \\ x = 0 \end{cases}$

iii. Gráfico:

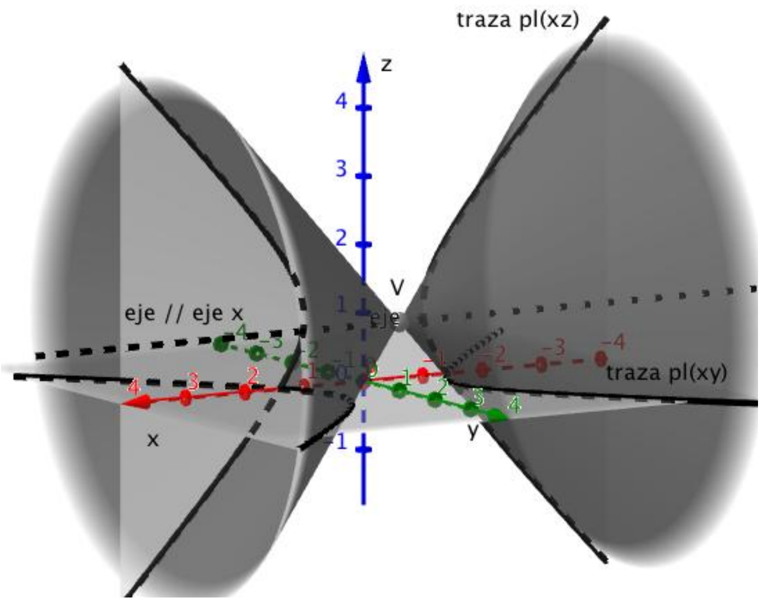


b) $(z-1)^2+(y-1)^2-x^2=0$. **Superficie cónica circular de eje paralelo al eje x**

i. Intersección entre los ejes coordenados y la superficie:
$eje\ x\ \cap Sup.: (\pm\sqrt{2}; 0; 0)$ $\quad eje\ y\ \cap Sup.: \emptyset$ $\quad eje\ z\ \cap Sup.: \emptyset$

ii. Trazas:
$pl\ (xy)\ \cap Sup.$: Son los puntos $(x; y; z)$ tales que: $x^2-(y-1)^2=1$ y $z=0$. Geométricamente, es la ecuación de una hipérbola en el $pl\ (xy)$ con eje focal paralelo al eje x.
$pl\ (xz)\ \cap Sup.$: Son los puntos $(x; y; z)$ tales que: $x^2-(z-1)^2=1$ e $y=0$. Geométricamente es la ecuación de una hipérbola en el $pl\ (xz)$ con eje focal paralelo al eje x.
$pl\ (yz)\ \cap Sup.$: Son los puntos $(x; y; z)$ tales que: $(z-1)^2+(y-1)^2=0$ y $x=0$. Geométricamente es un punto. El punto es: $(0; 1; 1)$, vértice de la superficie cónica.

iii. Gráfico:

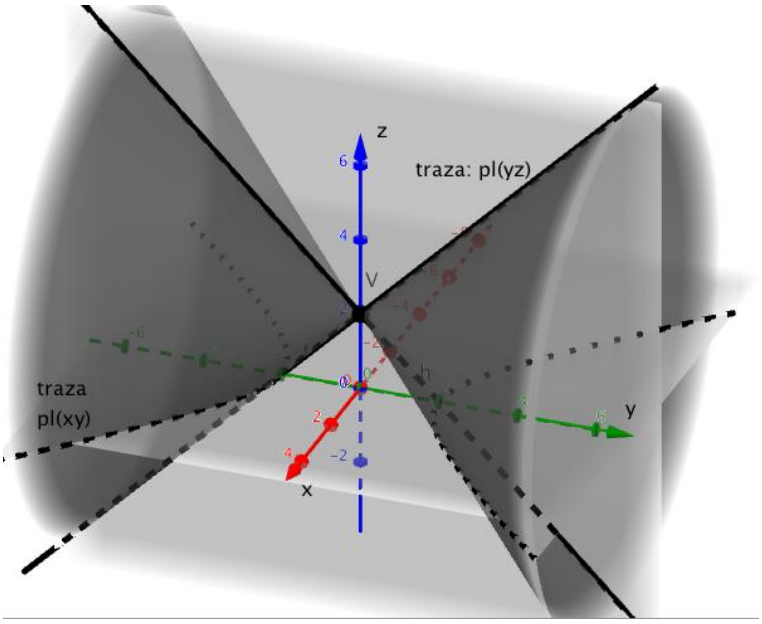


c) $x^2 - y^2 + (z-2)^2 = 0$. **Superficie cónica circular de eje paralelo al eje y.**

i. Intersección entre los ejes coordenados y la superficie:
$eje\ x\ \cap Sup.$: $\emptyset$ $eje\ y\ \cap Sup.$: $(0; \pm 2; 0)$ $eje\ z\ \cap Sup.$: $(0; 0; 2)$

ii. Trazas:
$pl\ (xy) \cap Sup.$: Son los puntos $(x; y; z)$ tales que: $-x^2 + y^2 = 4$ y $z = 0$. Geométricamente, la ecuación representa una hipérbola en el $pl\ (xy)$ con eje focal en el eje y.
$pl\ (xz) \cap Sup.$: Son los puntos $(x; y; z)$ tales que: $x^2 + (z-2)^2 = 0$ e $y = 0$. Geométricamente, las ecuaciones se satisfacen sólo en el punto $(0; 0; 2)$. Éste punto es el vértice.
$pl\ (yz) \cap Sup.$: Son los puntos $(x; y; z)$ tales que: $-y^2 + (z-2)^2 = 0$ y $x = 0$. Geométricamente es un par de rectas que se cortan en un punto y están incluidas en el plano $x = 0$. Las ecuaciones de las rectas son: $r: \begin{cases} -y + z - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ y $r': \begin{cases} y + z - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

iii. Gráfico:



4. <u>Ejercicio</u>

a) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 0$
La ecuación representa sólo un punto del espacio R^3. Éste punto es: $(1; 2; 3)$.

b) $3x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 75 = 0$
La ecuación es equivalente con: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{15} + \frac{z^2}{15} = -1$ que no se verifica en ningún punto del espacio R^3.

c) $36y^2 - 25z^2 = 0$
La ecuación es equivalente con: $(6y - 5z)(6y + 5z) = 0$. Por lo tanto, representa a dos planos que se cortan en una recta del espacio R^3. Los planos son: $6y - 5z = 0$ y $6y + 5z = 0$

d) $\mathbf{3x^2 + 4y^2 = 0}$
La ecuación se verifica para los puntos: $(0; 0; z)$ del espacio R^3 con $z \in R$. Por lo tanto, la ecuación es geométricamente el eje de cotas.

e) $\mathbf{2z^2 - 8 = 0}$
La ecuación es equivalente con: $|z| = 2$. Por lo tanto, representa a dos planos paralelos del espacio R^3. Los planos son: $z = 2$ y $z = -2$

f) $\mathbf{x^2 = 0}$
La ecuación es equivalente con: $|x| = 0$. Por lo tanto, representa a dos planos paralelos coincidentes del espacio R^3. El plano es: $x = 0$.

5. Ejercicio

a) $Centro(-1; 2; 3)$ y radio $r = 8$.

b) La ecuación de segundo grado $4x^2 - y^2 = -16z$ es un paraboloide hiperbólico.

i. $Sup. \cap pl: z = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 - y^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{r_1: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \wedge\ r_2: \begin{cases} 2x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}}$

Los vectores directores de las rectas son: $\overrightarrow{d_1} = (-1; -2; 0)$ y $\overrightarrow{d_2} = (1; -2; 0)$. La medida del menor ángulo entre ellas, aproximando al minuto más cercano es: $53°\ 8'$

ii. $Sup. \cap pl: y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 = -16z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x^2 = -4z \\ y = 0 \end{cases}}$ Parábola

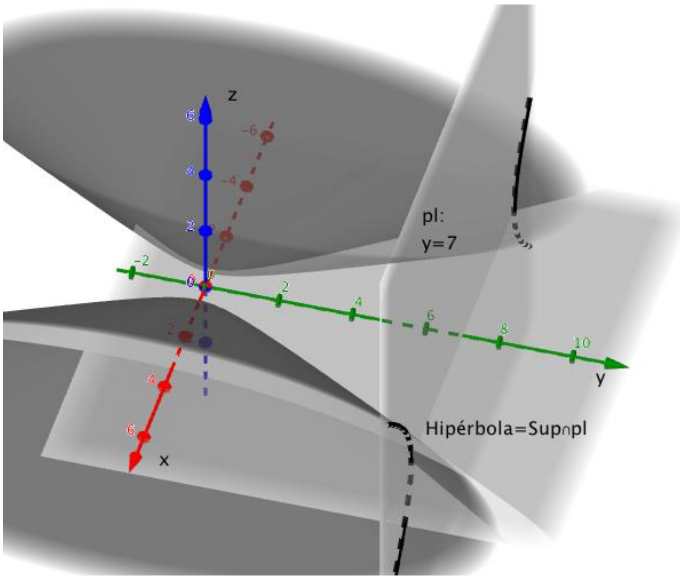
En la parábola incluida en el plano $y = 0$ se tiene que $Dist(Vértice, Directriz) = 2p = 4$. Luego, $p = 2$. El eje focal es el eje de cotas con $z < 0$. Entonces, las coordenadas en R^3 del foco de la parábola son: $(0; 0; -1)$

c) La ecuación $2x^2 - y^2 - 5z^2 = 1$ es un hiperboloide de dos hojas.

i. $Sup. \cap pl: y = 7 \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5z^2 = 50 \\ y = 7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \frac{x^2}{25} - \frac{z^2}{10} = 1 \\ y = 7 \end{cases}}$ Hipérbola

ii. Diámetro transverso: $2a = 10$, Diámetro conjugado: $2b = 2\sqrt{10}$, Diámetro focal: $2c = 2\sqrt{35}$ y Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{35}}{5}$

En el gráfico se ofrece una vista del **hiperboloide** de dos hojas, el plano y la hipérbola que se obtiene al interceptar las dos superficies.



d) $P(x;y;z) \in LG \Leftrightarrow Dist(P, eje\ y) = 3\, Dist(P, eje\ z) \Leftrightarrow 8x^2 + 9y^2 - z^2 = 0$. El lugar geométrico (LG) es una superficie cónica elíptica.

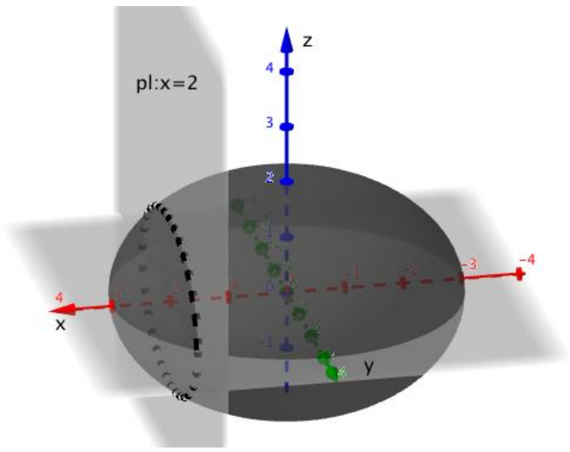
e) $Sup\ \cap pl: \begin{cases} 4x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36 \\ x = k \end{cases} \Rightarrow LG: \begin{cases} 4y^2 + 9z^2 = 36 - 4k^2 \\ x = k \end{cases}$ Los lugares geométricos que se describen dependen de los valores que adopte: $36 - 4k^2$ con $k \in R$.

Si $36 - 4k^2 > 0$, es decir: $\forall k: -3 < k < 3$, las intersecciones son las elipses: $\frac{y^2}{9-k^2} + \frac{z^2}{4-\frac{4}{9}k^2} = 1$

Si $36 - 4k^2 = 0$, es decir: $k = -3 \vee k = 3$, la intersección son los puntos: $(\pm 3; 0; 0)$

Si $36 - 4k^2 < 0$, es decir: $\forall k: k < -3 \vee k > 3$, los planos y la superficie no tiene puntos en común.

En el siguiente gráfico se muestra un caso de intersección, a partir de él, el lector puede interpretar los resultados.



6. Ejercicio

a) $x^2 + 16y^2 - 4z^2 = 64$. La ecuación de segundo grado representa geométricamente a un hiperboloide de una hoja de eje z.

b) Si $a = -8$, entonces: $x^2 - 8y^2 - 4z^2 = b$. Luego:
$Sup \cap pl: \begin{cases} x^2 - 4z^2 = b \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow b \neq 0 \Rightarrow \frac{x^2}{b} - \frac{z^2}{b/4} = 1 \Rightarrow \frac{b}{4} = 2^2 \Rightarrow b = 16.$
Cuando $b = 16$, la ecuación de segundo grado es un hiperboloide de dos hojas de eje x.

7. Ejercicio

a) Tendremos un hiperboloide de una hoja de eje x cuando: $a < 0$ y $b > 0$. En este caso la ecuación es: $-|a|x^2 + 12y^2 + bz^2 = 144$.
Pero, también, tendremos un hiperboloide de una hoja de eje z cuando: $a > 0$ y $b < 0$. En este caso la ecuación es: $ax^2 + 12y^2 - |b|z^2 = 144$.

b) Obtenemos un hiperboloide de una hoja de revolución de eje x cuando: $a < 0$ y $b = 12$ ya que la ecuación será: $-|a|x^2 + 12y^2 + 12z^2 = 144$. La superficie es de revolución ya que al estudiar la intersección entre la superficie y los planos: $x = k$ las curvas que se obtienen son circunferencias. El lector puede probar que se genera al rotar una hipérbola alrededor del eje x.
Además, será un hiperboloide de una hoja de revolución de eje z cuando: $a = 12$ y $b < 12$. La ecuación de la superficie es: $12x^2 + 12y^2 - |b|z^2 = 144$. La superficie es de revolución ya que al estudiar la intersección entre la superficie y los planos: $z = k$ las curvas que se obtienen son circunferencias. El lector puede probar que se genera al rotar una hipérbola alrededor del eje z.

c) Resultará una superficie cilíndrica recta de directriz hiperbólica cuando: $a = 0$ y $b < 0$. La ecuación que se tendrá es: $12y^2 - |b|z^2 = 144$. A su vez, será una superficie cilíndrica recta de directriz hiperbólica cuando: $a < 0$ y $b = 0$ cuya ecuación es: $-|a|x^2 + 12y^2 = 144$.

d) $Sup \cap pl: \begin{cases} ax^2 + 12y^2 + bz^2 = 144 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow \frac{x^2}{144/a} + \frac{z^2}{144/b} = 1$
Entonces: $\frac{144}{a} = 9, \frac{144}{b} = 16$. Luego, se cumple lo pedido si: $a = 16$ y $b = 9$

8. Ejercicio

a) $k > 0, t < 0$

b) $8x^2 + 8y^2 + 8z^2 = 1$. Es una esfera de centro $(0; 0; 0)$ y radio $r = \frac{\sqrt{2}}{4}$. La intersección con el plano $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ es el punto: $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; 0; 0\right)$, esto es que el plano es tangente a la esfera.

c) $k > 0 \wedge k \neq 8, t = 0$

9. Ejercicio

a)

- **i.** Superficie cilíndrica de directriz hiperbólica
- **ii.** Superficie cónica
- **iii.** Hiperboloide de dos hojas con eje de simetría axial coincidente con el eje z

b)

- **i.** $a = 1, b > 0$ o $a = -4, b < 0$
- **ii.** $a = 0, b = 16$
- **iii.** $a > 0, b < 0$ o $a < 0, b > 0$

c) $Sup \cap pl(yz): x = 0$ es la hipérbola de ecuación $y^2 - 4z^2 = 1$
$Sup \cap pl(xz): y = 0$ es la hipérbola de ecuación $x^2 - 4z^2 = 1$
$Sup \cap pl(xy): z = 0$ es la circunferencia de ecuación $x + y^2 = 1$

d) No existen.

10. Ejercicio

a) $a = b = 1$. La superficie es un hiperboloide de revolución de una hoja.

b) **i.** $k = 10, k = -10$ **ii.** $k > 0$ o $k < 0$ **iii.** $k = 4$ o $k = -2$

ANEXO: Clasificación de las superficies

Ecuación tipo: $\boldsymbol{Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = R}$		
Coeficientes		***Lugar geométrico***
$\boldsymbol{R}$ *	$\boldsymbol{M, N}$ ***y*** $\boldsymbol{P}$	
> 0	Todos positivos	Elipsoide
	Todos negativos	$\varnothing$
	Dos positivos, uno negativo	Hiperboloide de una hoja
	Uno positivo, dos negativos	Hiperboloide de dos hojas
	Uno cero, dos positivos	Cilindro elíptico (o circular) recto
	Uno cero, dos negativos	$\varnothing$
	Uno cero, uno positivo, un negativo	Cilindro hiperbólico recto
	Dos cero, uno positivo	Dos planos paralelos
	Dos cero, uno negativo	$\varnothing$
$= \boldsymbol{0}$	Todos del mismo signo	Un solo punto. El origen de coordenadas
	Dos positivos, uno negativo	Cono recto
	Uno cero, dos del mismo signo	Todos los puntos de un eje coordenado
	Uno cero, dos de signos contrarios	Dos planos que se cortan
	Dos cero	Un plano coordenado (planos coincidentes)

* Cuando la ecuación presenta: $R < 0$ para usar la tabla anterior multiplicarla miembro a miembro por (-1)

En el caso de M, N y P todos positivos e iguales, la superficie que se obtiene es una esfera

Ecuación tipo: $\boldsymbol{Mx^2 + Ny^2 = Sz}$		
Coeficientes		***Lugar geométrico***
$\boldsymbol{S}$**	$\boldsymbol{M}$ ***y*** $\boldsymbol{N}$	
> 0	Del mismo signo	Paraboloide elíptico
	Signos opuestos	Paraboloide hiperbólico
	Uno cero	Cilindro parabólico recto
$= \boldsymbol{0}$	Del mismo signo	Todos los puntos de un eje coordenado
	Signos opuestos	Dos planos que se cortan
	Uno cero	Un plano coordenado (planos coincidentes)

** Cuando la ecuación presenta $S < 0$ para usar la tabla anterior multiplicarla miembro a miembro por (-1).

Esta tabla de clasificación también se aplica en ecuaciones análogas a $\boldsymbol{Mx^2 + Ny^2 = Sz}$ como las siguientes: $\boldsymbol{Mx^2 + Nz^2 = Sy}$ y $\boldsymbol{My^2 + Nz^2 = Sx}$

Las superficies de revolución son las que se obtienen por la rotación de una curva plana respecto de un eje. Se identifican porque la intersección con algún plano coordenado o planos paralelos a alguno de los coordenados es una circunferencia.