Teoría – Tema 5

Teoría - 28 - Teorema fundamental del cálculo integral. Demostración del Teorema del valor medio y de la regla de Barrow

Demostración del Teorema del valor medio

Con la definición formal de integral estamos en disposición de demostrar, por ejemplo, el teorema de la media (o del valor medio)

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Es decir, siempre existe un valor $c \in [a,b]$ que permite calcular el área encerrada por la función en el intervalo $[a,b]$ como si fuese el área de un rectángulo de base $(b-a)$ y altura $f(c)$.

En efecto. Si la función $f(x)$ es acotada en $[a,b]$, existirá un valor e igual al ínfimo de toda la función en el intervalo y existirá un valor E igual al supremo de toda la función en el intervalo. De esta forma:

$$\forall\ x \in [a,b], e \le f(x) \le E \ \rightarrow \ \int_a^b e\,dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b E\,dx \ \rightarrow \ e\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \le E\int_a^b dx$$

En el ejemplo resuelto en el apartado sobre definición formal de la integral (integral de Riemann), la integral definida de una recta horizontal $f(x)=k$ en $[a,b]$ es $k(b-a)$. Si $k=1$ la integral definida será $(b-a)$.

$$e(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le E(b-a) \ \rightarrow \ e \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le E$$

Si llamamos $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \ \rightarrow \ \mu(b-a) = \int_a^b f(x)dx$

De la definición formal de integral $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\phi_i)\Delta x_i$, $\phi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ sabemos que la integral de $f(x)$ se obtiene a partir de valores $f(\phi_i)$ que cumplen $\phi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Por lo tanto podemos afirmar que $\mu = f(c)$ tal que $c \in [a,b]$. Y concluimos:

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx \ , \ c \in [a,b] \ \text{c.q.d.}$$

Teorema fundamental del cálculo integral

Teorema fundamental del cálculo integral

Si $f(x)$ es una función positiva y continua en $[a,b]$, la función definida por $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ es una primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$ y cumple la siguiente igualdad:

$F'(x)=f(x), \forall x\in[a,b]$

Es decir, integral y derivada son procesos inversos. La variable t de la integral se dice muda, ya que su nombre no afecta al valor final de la integral.

Además, $F(x)$ coincide con el valor del área encerrada por la curva $f(x)$ con el eje OX y los límites de integración a , x .

La expresión $\int_a^x f(x)dx$ se conoce como integral definida de $f(x)$. Si $x=b$ definimos la integral definida como $\int_a^b f(x)dx$.

El valor del área $\int_a^b f(x)dx$ depende de la forma de la curva generada por $f(x)$ y del intervalo $[a,b]$. Es decir, el resultado final **no depende de la variable** x .

En la definición del teorema fundamental del cálculo integral hemos considerado $a<b$. Si tuviéramos $b<a$ se define la siguiente igualdad:

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

Si en una integral definida se intercambian los límites de integración, la integral definida cambia de signo.

Si $a<b$, llamaremos límite de integración inferior al valor a y límite de integración superior al valor b .

Demostración del Teorema fundamental del cálculo integral.

Sea $x\in[a,b]$ un punto arbitrario del intervalo. Sea $F(x)=\int_a^x f(x)dx$ una función derivable y $f(x)$ una función continua en ese intervalo.

La función $F(x)$ asocia a cada punto $x \in [a, b]$ el área del recinto limitado por la gráfica y el eje horizontal entre los valores de abscisa a y x .

Por la definición formal de derivada por la derecha:

$$F'(x^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\int_a^{x+h} f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x)\,dx$$

Si aplicamos el teorema de la media, enunciado y demostrado en apartados anteriores:

$$\int_x^{x+h} f(x)\,dx = f(c)(x+h-x) \quad , \quad c \in [x, x+h] \quad \rightarrow \quad \int_x^{x+h} f(x)\,dx = f(c) \cdot h$$

Llevamos este resultado a la expresión de $F'(x^+)$:

$$F'(x^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x)\,dx = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \cdot f(c) \cdot h = \lim_{h \to 0^+} f(c) = f(x)$$

Donde hemos aplicado que si $si\ c \in [x, x+h], h \to 0^+ \Rightarrow c \to x$ ya que el intervalo $[x, x+h]$ converge a un único punto → $f(c) \to f(x)$.

Si razonamos de manera análoga con la derivada por la izquierda :

$$F'(x^-) = f(x)$$

Como las derivadas laterales coinciden, nuestra función es derivable y cumple:

$$F'(x^+) = F'(x^-) = f(x) \Rightarrow F(x)\ es\ derivable\ y\ F'(x) = f(x)\ \forall\ x \in [a, b]$$ c.q.d.

Corolario de Barrow

Regla o Corolario de Barrow

Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$ y sea $F(x)$ una primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$. Entonces se cumple: $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

Demostración de la regla de Barrow

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$, por el teorema fundamental del cálculo integral, sabemos que $A(x)=\int_a^x f(t)dt$ y que $A(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$.

Por lo tanto $A'(x)=f(x), \forall\ x\in[a,b]$ y $A(x)$ nos informa del área encerrada. Si $F(x)$ es primitiva de $f(x)$, se cumple que $F'(x)=f(x)$.

Tenemos dos primitivas de $f(x)$. La primitiva $F(x)$ y la primitiva $A(x)$ que nos informa del área encerrada. Ambas primitivas se distinguen en solo una constante.

$A(x)=F(x)+\ constante$ $\rightarrow$ Para $x=a$ $\rightarrow$ $A(a)=F(a)+\ constante$

Recordamos que $A(x)=\int_a^x f(x)dx$. Por las propiedades de la integral definida:

$$A(x=a)=A(a)=\int_a^a f(x)dx=0 \rightarrow 0=F(a)+\ constante \rightarrow constante=-F(a)$$

$$A(x)=F(x)-F(a)$$

Esta igualdad se cumple para cualquier valor $x\in[a,b]$. En particular para $x=b$:

$$A(x=b)=A(b)=F(b)-F(a)$$

Y de la definición de integral definida: $A(x)=\int_a^x f(x)dx \rightarrow A(b)=\int_a^b f(x)dx$. Igualando los dos resultados obtenidos para $A(b)$ demostramos el corolario de Barrow:

$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ c.q.d.