„I ZDRAVLJE I ZNANJE"

Sistemi linearnih jednačina

Pod sistemom od dvije linearne jednačine sa dvije nepoznate $x \ i \ y$ podrazumijevamo:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

Ovo je takozvani "prosti" sistem do koga uvijek možemo doći ekvivalentnim transformacijama.

Ovdje su $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ dati realni brojevi (*ponekad i parametri*). Rješenje sistema je uređeni par brojeva $\boldsymbol{(x_0, y_0)}$ za koji važi da je:

$$a_1x_0 + b_1y_0 = c_1$$

$$a_2x_0 + b_2y_0 = c_2$$

Sisteme možemo riješiti pomoću više metoda: *metoda zamjene, metoda suprotnih koeficijenata, Gausova metod, grafički itd*.
Napomena: Grafičkom metodom ćemo rješavati sisteme, kad odradimo grafik linearne funkcije.
Vi to jeste radili u osnovnoj školi, ali neću i ne želim da pretrčavamo ovo.
Ići ćemo postupno i lagano!

Nama je najvažnije da tačno riješimo dati zadatak (problem), a koju ćemo metodu koristiit to uopšte sada nije važno.

Napomenimo samo da dati sistem može imati: *jedinstveno rešenje* **(određen)**, *beskonačno mnogo rešenja* **(neodređen)** ili pak da *nema rešenja* **(nemoguć).**

Kratko ćemo se podsjetiti onog što smo uradili, izvježbali, a onda ćemo se nakon ovih par primjera sistema koje ćemo rješavati metodom suprotnih koeficijenata, posvetiit i prisjetiti rješavanja sistema Gausovom metodom.

Primjer:

$$\begin{cases}2x+3y=7\\3x-6y=7\end{cases}$$

Najlakše je „napraviti“ jednake koeficijente uz x ili y, i primjenom metode suprotnih koeficijenata riješiti dati sistem
Pomnožimo prvu jednačinu sa 2

$$\begin{cases}4x+6y=14\\3x-6y=7\end{cases}$$

Saberimo ih

$$\begin{cases}4x+6y=14\\7x\qquad=21\end{cases}$$

$$\begin{cases}4x+6y=14\\x=3\end{cases}$$

Dobijenu vrijednost x-a, uvrstimo u prvu jednačinu da bismo dobili vrijednost promjenljive y

$$\begin{cases}4\cdot 3+6y=14\\x=3\end{cases}$$

$$\begin{cases}6y=14-12=2\\x=3\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\\x=3\end{cases}$$

Dakle, konačno, rješenje je uređeni par $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\left(\mathbf{3},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)$.

Primjer 2:
Riješi sistem:

$$\begin{cases}\dfrac{5x-1}{6}+\dfrac{3y-1}{10}=3\\\dfrac{11-x}{6}+\dfrac{11+y}{4}=3\end{cases}$$

Ovjde ćemo sistem „uprostiti“, pomnožiti prvu jednačinu sa 30, a drugu sa 12, kako bi se oslobodili razlomka.

„I ZDRAVLJE I ZNANJE“

$$\begin{cases} 5(5x-1)+3(3y-1)=90 \\ 2(11-x)+3(11+y)=36 \end{cases}$$

Množimo „svaki sa svakim“, oslobađajući se zagrada

$$\begin{cases} 25x-5+9y-3=90 \\ 22-2x+33+3y=36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25x+9y=90+5+3=98 \\ -2x+3y=36-22-33 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25x+9y=98 \\ -2x+3y=-19 \end{cases}$$

Ovdje drugu jednačinu množimo sa -3, kako bi dobili -9, da bismo se oslobodili promjenljive y (metoda suprotnih koeficijenata)

$$\begin{cases} 25x+9y=98 \\ 6x-9y=57 \end{cases} +$$

$$\begin{cases} 25x+9y=98 \\ 31x=155 \end{cases}$$

Druga jednačina je ovdje „zbir prve i druge jednačine“

$$\begin{cases} 25x+9y=98 \\ x=155:31=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25\cdot 5+9y=98 \\ x=5 \end{cases}$$

Ovdje dobijenu vrijednost x, uvrštavamo u prvu jednačinu.

$$\begin{cases} 125+9y=98 \\ x=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9y=98-125=-27 \\ x=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-27:9=-3 \\ x=5 \end{cases}$$

Dakle, konačno, rješenje sistema je uređeni par $\boldsymbol{(x,y)=(5,-3)}$.

Ovo je sve već poznato, radili smo primjere na času, ali sam samo radi podsjećanja stavio ova dva primjera. Jedan je vrlo jednostavan, drugi je za nijansu teži.
Sljedeći primjer koji ću prezentovati i izložiti vam je primjer sa smjenom, da se pdosjetimo kako se rješavaju tako zadati sistemi, a već ste ih radili u osnovnoj školi.

Primjer3:

Riješi sljedeći sistem:

$$\begin{cases} \frac{14}{x} + \frac{24}{y} = 10 \\ \frac{7}{x} - \frac{18}{y} = -5 \end{cases}$$

Uočavate da je ovdje situacija, ipak malo drugačija od onoga na što smo „navikli“. Ovdje je nepoznata u imeniocu. Pa u takvoj situaciji, predlažem, najbolje je uzeti smjenu i to

$$\frac{1}{x} = m \quad \frac{1}{y} = n$$

$$\begin{cases} 14 \cdot \frac{1}{x} + 24 \cdot \frac{1}{y} = 10 \\ 7 \cdot \frac{1}{x} - 18 \cdot \frac{1}{y} = -5 \end{cases} tj.$$

Sada mnogo jasnije vidimo, kako ćemo upotrijebiti smjenu

$$\begin{cases} 14m + 24n = 10 \\ 7m - 18n = -5 \end{cases}$$

Dalje nastavljamo, kao i sisteme koje smo ranije rješavali,
Oslobodićemo se promjenljive m, tako što ćemo pomnožiti drugu jednačinu sa -2,
I sabrati ove dvije jednačine

$$\begin{cases} 14m + 24n = 10 \\ -14m + 36n = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14m + 24n = 10 \\ 60n = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14m + 24n = 10 \\ n = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Dobijenu vrijednost n ćemo uvrstiti u prvu jednačinu

$$\begin{cases} 14m + 24 \cdot \frac{1}{3} = 10 \\ n = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14m = 10 - 8 = 2 \\ n = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} \\ n = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ovdje smo dobili rješenje sistema, gdje su promjenljive m i n.
Sa dobijenim vrijednostima, vratimo se u smjenu

$\boldsymbol{\frac{1}{x} = m, tj.}$ $\boldsymbol{\frac{1}{y} = n, tj.}$

$\frac{1}{x} = \frac{1}{7}, a\ dalje\ je$ $\frac{1}{y} = \frac{1}{3}$

$\boldsymbol{x = 7}$ $\boldsymbol{y = 3}$

Dakle, konačno rješenje zadatog sistema je uređeni par $\boldsymbol{(x, y) = (7, 3)}$.

Rješavanje sistema Gausovom metodom.

Primjer:

$$\begin{cases} x+2y-5z=6 \\ -2x+y+2z=5 \\ -3x+3y-4z=8 \end{cases}$$

Podsjetimo se onoga, o čemu smo govorili na času. Koji je naš cilj:

1. *Formirati „trougaoni sistem“, a šta to znači*
   - *Znači, iz druge i treće jednačine se osloboditi promjenljive x, zatim se iz treće jednačine transformacijama osloboditi promjenljive y, i da ostane sistem od tri jednačine, gdje će*
   - *Prva jednačina imati sve tri promjenljive,*
   - *Druga će sadržati samo promjenljive y i z*
   - *Treća jednačina će biti najjednostavnija i imaće oblik $cz=d$*
2. *Riješiti treću jednačinu, tj. Izračunati nepoznato z*
3. *Dobijenu vrijednost promjenljive z uvrstiti u drugu jednačinu i tako dobiti y*
4. *U prvu jednačinu uvrstiti dobijene vrijednosti promjenljivih y i z i izračunati x*
5. *Dobijamo uređenu trojku (x,y,z) što i predstavlja rješenje datog sistema.*

Dosta je bilo priče, pa hajdemo na posao.

Prvu jednačinu pomnožićemo sa 2 i dodati drugoj jednačini, zatim ćemo prvu jednačinu pomnožiti sa 3 i dodati trećoj jednačini. (Crvenom bojom je predstavljena prva jednačina pomnožena sa odgovarajućim brojem.) Na taj način se oslobađamo promjenljive x iz druge i treće jednačine

$$\begin{cases} x+2y-5z=6 \\ 2x+4y-10z-2x+y+2z=12+5 \\ 3x+6y-15z-3x+3y-4z=18+8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y-5z=6 \\ 5y-8z=17 \\ 9y-19z=26 \end{cases}$$

Sada ćemo, u cilju oslobađanja treće jednačine od promjenljive y, drugu jednačinu pomnožiti sa 9, a treću sa -5

$$\begin{cases} x+2y-5z=6 \\ 45y-72z=153 \\ -45y+95z=-130 \end{cases}$$

i sabrati ih

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = 6 \\ 45y - 72z = 153 \\ 23z = 23 \end{cases}$$

Jednačina $5y - 8z = 17$ $(druga)$ *ekvivalentna je sa jednačinom* $45y - 72z = 153$ *jer je dobijena množenjem koeficijenata, to ću u sljedećem koraku napisati „jednostavniji oblik“, tj oblik gdje su koeficijenti manji.*

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = 6 \\ 5y - 8z = 17 \\ 23z = 23 \end{cases}$$

Dobijen je „trougaoni“ oblik, rješavamo ga

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = 6 \\ 5y - 8z = 17 \\ z = 1 \end{cases}$$

Vrijednost koju smo dobili za z, uvrštavamo u drugu jednačinu kako bismo dobili vrijednost promjenljive y

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = 6 \\ 5y - 8 \cdot 1 = 17 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = 6 \\ 5y = 17 + 8 = 25 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = 6 \\ y = 25 : 5 = 5 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = 6 \\ y = 5 \\ z = 1 \end{cases}$$

Uvrštavamo dobijene vrijednosti u prvu jednačinu

$$\begin{cases} x + 2 \cdot 5 - 5 \cdot 1 = 6 \\ y = 5 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 10 - 5 = 6 \\ y = 5 \\ z = 1 \end{cases}$$

I konačno,

$$\begin{cases} x = 6 - 10 + 5 \\ y = 5 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \\ z = 1 \end{cases}$$

Dakle, konačno rješenje polaznog sistema je uređena trojka $(x, y, z) = (1,5,1)$

Primjer:

Gausovom metodom riješi sljedeći sistem jednačina:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -9 \\ 5x + y - 2z = 12 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

Kao što smo radili na času, da bi nam lakše bilo rješavanje zadatka, mi ćemo treću jednačinu prebaciti na mjesto prve, a prvu na mjesto treće, tj. Zamijenićemo ih.
Ekvivalntan sistem izgleda

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 1 \\ 5x + y - 2z = 12 \\ 2x - 3y + z = -9 \end{cases}$$

Prvu jednačinu pomnožimo sa -5 *i dodamo drugoj jednačini, i prvu jednačinu pomnožimo sa* -2 *pa dodamo trećoj jednačini.*

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 1 \\ -5x + 10y + 15z + 5x + y - 2z = 12 - 5 \\ -2x + 4y + 6z + 2x - 3y + z = -9 - 2 \end{cases}$$

Sređujemo

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 1 \\ 11y + 13z = 7 \\ y + 7z = -11 \end{cases}$$

Sada ćemo zamijeniti drugu i treću jednačinu / nije neophodno, ali je lakše, tj. Preglednije/

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 1 \\ y + 7z = -11 \\ 11y + 13z = 7 \end{cases}$$

Sada nam je cilj, oslobađanje promjenljive y iz treće jednačine, množimo drugu jednačinu sa -11

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 1 \\ y + 7z = -11 \\ -11y - 77z + 11y + 13z = 7 + 121 \end{cases}$$

Sređujemo

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 1 \\ y + 7z = -11 \\ -64z = 128 \end{cases}$$

Dalje slijedi

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 1 \\ y + 7z = -11 \\ z = -2 \end{cases}$$

Uvrštavamo dobijenu vrijednost z u drugu jednačinu

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 1 \\ y + 7 \cdot (-2) = -11 \\ z = -2 \end{cases}$$

Sređujemo

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 1 \\ y = -11 + 14 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 1 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2 \cdot 3 - 3 \cdot (-2) = 1 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases}$$

Konačno,

$$\begin{cases} x - 6 + 6 = 1 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases}$$

I,

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases}$$

Konačno, rješenje ovog sistema je uređena trojka $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\mathbf{1}, \mathbf{3}, -\mathbf{2})$.

Nadam se da je ovo do sada jasno, sad ćemo riješiti jedan primjer, gdje će biti dat realni parametar i u zavisnosti od njega treba riješiti sistem.
Ovo je zadatak za učenike sa većim nivoom znanja.

Primjer:

U zavisnosti od vrijednosti realnog parametra a riješiti sistem jednačina:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + \boldsymbol{a}y - 2z = 4 \\ x + 2y - \boldsymbol{a}z = 1 \end{cases}$$

Razmišljamo na potpuno isti način kao i ranije, kako se osloboditi promjenljivih x i y u drugoj i trećoj jednačini, tj. Kako doći do“ trougaonog“ oblika

Prvu jednačinu množimo sa -2 *pa dodati drugoj jednačini, zatim je množimo sa* -1 i dodajemo *trećoj jednačini.*

Sada, sređujemo, grupišemo sve što stoji uz y, sve što stoji uz z

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ ay - 2y - 4z = -2 \\ y - z - az = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ (a - 2)y - 4z = -2 \\ y - z(1 + a) = -2 \end{cases}$$

Sada treba da se oslobodimo promjenljive y iz treće jednačine, ali mislim da je lakše, da najprije zamijenimo drugu i treću jednačinu

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ y-z(1+a)=-2 \\ (a-2)y-4z=-2 \end{cases}$$

Pomnožićemo drugu jednačinu sa $-(a-2)$

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ y-z(1+a)=-2 \\ -(a-2)y+z(1+a)(a-2)+(a-2)y-4z=2(a-2)-2 \end{cases}$$

Sređujemo, ali vodimo računa kako, pažljivo ovaj dio odrađujmo, (y nestaje)

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ y-z(1+a)=-2 \\ z\big((1+a)(a-2)-4\big)=2(a-2-1) \end{cases}$$

Ovdje sad pažljivo, sređujemo(množeći zagrade)

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ y-z(1+a)=-2 \\ z(a-2a+a^2-2-4)=2(a-3) \end{cases}$$

Dalje je,

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ y-z(1+a)=-2 \\ z(a^2-a-6)=2(a-3) \end{cases}$$

Izdvajam treću jednačinu sistema kako bi vam bilo jasnije na koji način ćemo srediti trinom

$$a^2-a-6$$

Rješavamo ga,

$$a^2-3a+2a-6=$$

Grupišemo prva dva, treći i četvrti i izdvajamo

$$a(a-3)+2(a-3)=$$

$$(a-3)(a+2)$$

Vraćamo se našem sistemu, koji sada izgleda ovako

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=3} \\ \boldsymbol{y-z(1+a)=-2} \\ \boldsymbol{z(a-3)(a+2)=2(a-3)} \end{cases}$$

Dobili smo „trougaoni“ sistem linearnih jednačina. Razmotrimo tri slučaja.

I. $\boldsymbol{a-3=0}$

$\boldsymbol{\Rightarrow a=3}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=3} \\ \boldsymbol{y-z\cdot 4=-2} \\ \boldsymbol{0\cdot z=0} \end{cases}$$

Iz treće jednačine vidimo da z može biti proizvoljan broj, tj

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ y=-2+4z \\ 0\cdot z=0 \end{cases}$$

Dalje je,

$$\begin{cases} x=3-y-z, \\ y=4z-2 \\ 0\cdot z=0 \end{cases}$$

I za kraj

$$\begin{cases} x=3-4z+2-z \\ y=4z-2 \\ 0\cdot z=0 \end{cases}$$

Rješenje sistema je $\boldsymbol{(5-5z, 4z-2, z), z\in R}$

II. $\boldsymbol{a+2=0}$

$\boldsymbol{\Rightarrow a=-2}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=3} \\ \boldsymbol{y-z(1-2)=-2} \\ \boldsymbol{0\cdot z=2(-2-3)} \end{cases}$$

Dakle,

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=3} \\ \boldsymbol{y+z=-2} \\ \boldsymbol{0\cdot z=-10} \end{cases}$$

Jasno se vidi, (treća jednačina), da sistem nema rješenja, tj. Nemoguć je.

III. $(a-3)(a+2) \neq 0$

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - z(1+a) = -2 \\ z = \dfrac{2(a-3)}{(a-3)(a+2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - z(1+a) = -2 \\ z = \dfrac{2}{a+2} \end{cases}$$

Uvrštavamo,

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - \dfrac{2}{a+2} \cdot (1+a) = -2 \\ z = \dfrac{2}{a+2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y = -2 + \dfrac{2(1+a)}{a+2} \\ z = \dfrac{2}{a+2} \end{cases}$$

Dalje je,

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y = \dfrac{-2(a+2) + 2(1+a)}{a+2} \\ z = \dfrac{2}{a+2} \end{cases}$$

Našli smo NZS kod druge jednačine, i sad je potrebno da to sredimo, da bi nam lakše bilo da uvrstimo dobijeno y u prvu jednačinu

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y = \dfrac{-2a - 4 + 2 + 2a}{a+2} \\ z = \dfrac{2}{a+2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y = \dfrac{-2}{a+2} \\ z = \dfrac{2}{a+2} \end{cases}$$

Sada se možemo vratiti na prvu jednačinu i da izrazimo x

$$\begin{cases} x - \dfrac{2}{a+2} + \dfrac{2}{a+2} = 3 \\ y = -\dfrac{2}{a+2} \\ z = \dfrac{2}{a+2} \end{cases}$$

Dobijamo,

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -\dfrac{2}{a+2} \\ z = \dfrac{2}{a+2} \end{cases}$$