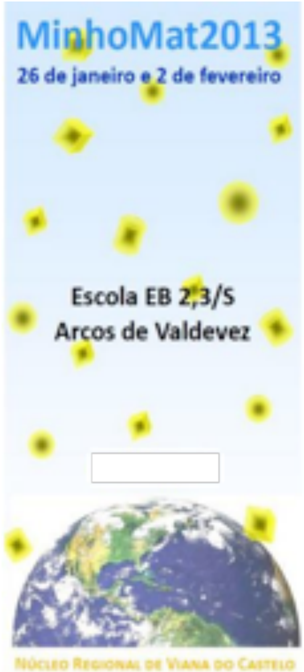
Curso 1

GeoGebra 3D

2 de Fevereiro de 2013



Alexandre Emanuel Batista Trocado
José Manuel Dos Santos Dos Santos
(Equipa do Instituto GeoGebra Portugal)

www.geogebra.org.pt

Nível: 3ºciclo e Secundário

Resumo:

Este curso pretende trabalhar com GeoGebra 5.0 Beta, em particular as vistas 3D e CAS, para a sua utilização na sala aula. Serão discutidos vários exemplos de aplicação do GeoGebra 5.0 em diferentes tópicos da Matemática desde a Geometria até as Probabilidades. Serão trabalhadas as diversas capacidades do GeoGebra, nomeadamente o trabalho com vistas tridimensionais, cálculo algébrico e simbólico, e a folha de cálculo. Deste modo serão desenvolvidas as aprendizagens que o professor necessita de modo a usar o software nomeadamente nas capacidades em desenvolvimento da versão 5.0 Beta do GeoGebra.

As versão do GeoGebra com que vamos trabalhar é a disponível em:

http://www.geogebra.org/webstart/5.0/geogebra-50.jnlp

Para o seu funcionamento é necessário que o computador esteja ligado a internet uma vez que se trata de uma versão beta em actualização.

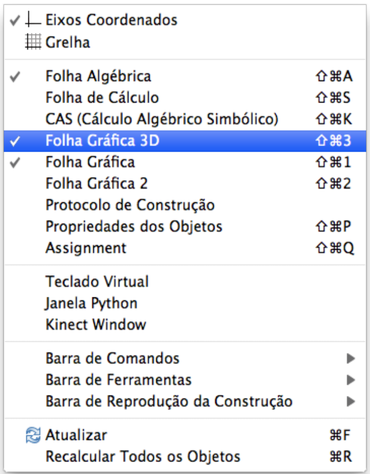
GeoGebra 3D

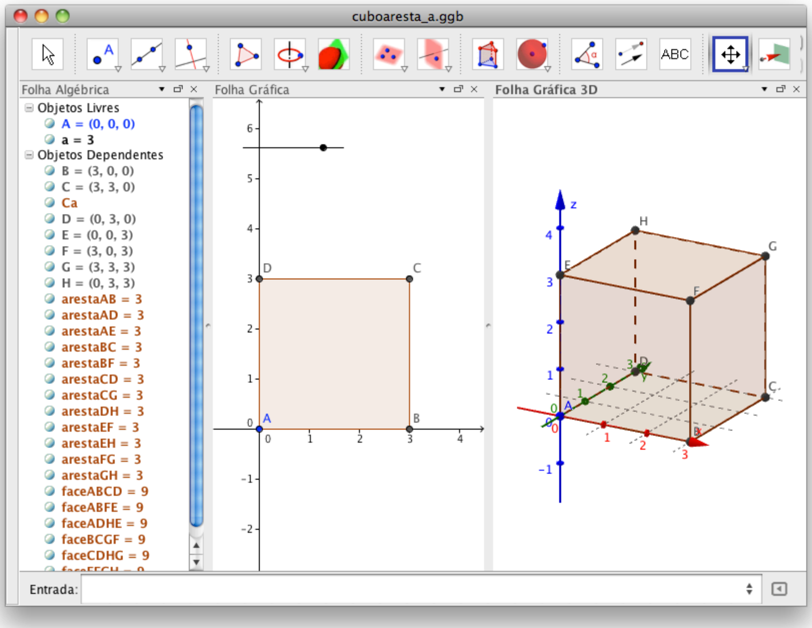
Neste momento o GeoGebra versão 5.0 Beta dispõe da capacidade 3D, esta versão está disponível a partir do Link: http://www.geogebra.org/webstart/5.0/geogebra-50.jnlp. Vamos Iniciar o nosso trabalho com a construção de um cubo.

Tarefa 1 - Cubo de aresta a

Pretende-se criar um cubo, podendo variar a medida da aresta com um selector.
1. Iniciemos o **GeoGebra** versão **5.0 Beta**, grave o ficheiro com o nome **cuboaresta_a.ggb**.

2.Dirigindo-nos ao menu exibir, seleccionar **Folha Gráfica 3D**.





3. Digitar na Barra de comandos **a=3**, dar entrada, e exibir o selector.

4. Definem-se os vértices do cubo a partir do vértice A adicionando o vetor respectivo.

A=(0,0,0)
B=A+(a,0,0)
C=A+(a,a,0)
D=A+(0,a,0)
E=A+(0,0,a)

5.Por ultimo o cubo é definido como um prisma de Vértices A,B,C e D na base, um quadrado cuja medida do lado é a, e de aresta AE que mede a.

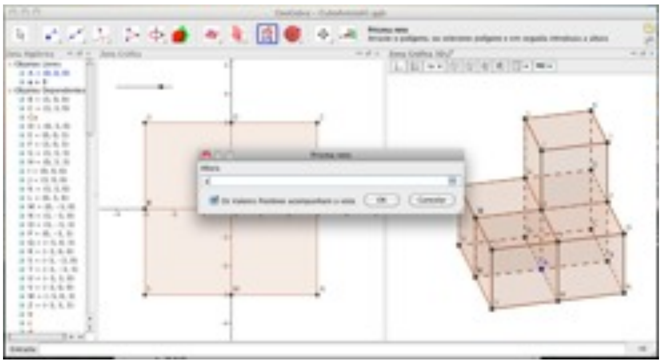
Ca=prisma[A,B,C,D,E]

6.Uma construção alternativa seria usar apenas:

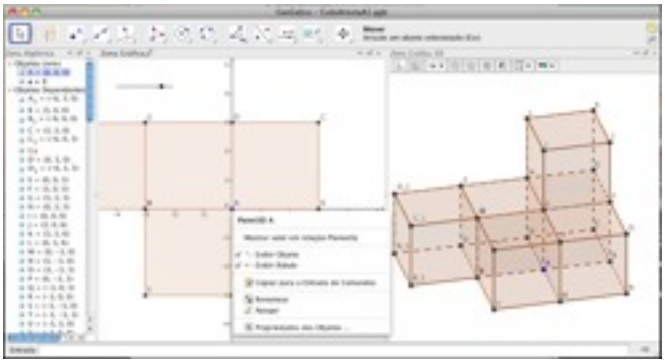
A=(0,0,0)
B=A+(a,0,0)
E=A+(0,0,a)
Cubo[A, B, Vetor[A, E]]

Tarefa 2 - Construções com cubos de arestas congruentes

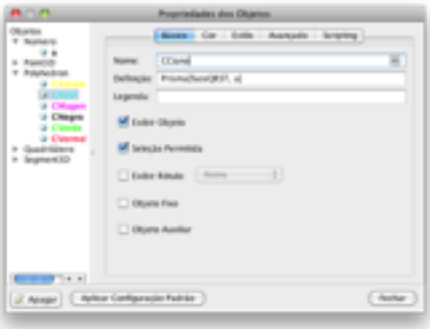
Depois de construído um cubo, seleccione uma das faces, e usando a ferramenta prisma, com o valor da altura a, crie uma construção com cubos.

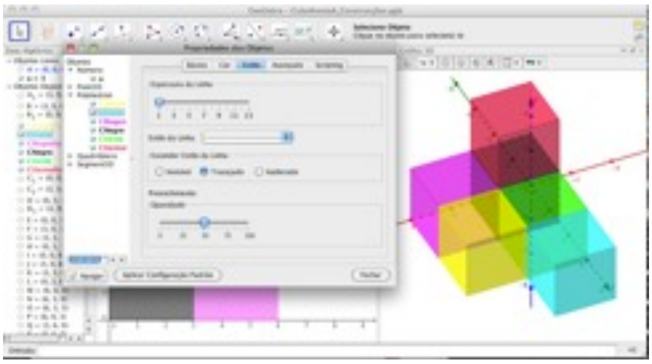


Utilize o botão direito do rato sobre um ponto para aceder ao menu Propriedades dos objectos ...



No menu Propriedades dos objectos, esconda os pontos 3d, altere as cores dos cubos como se sugere nas imagens seguintes.

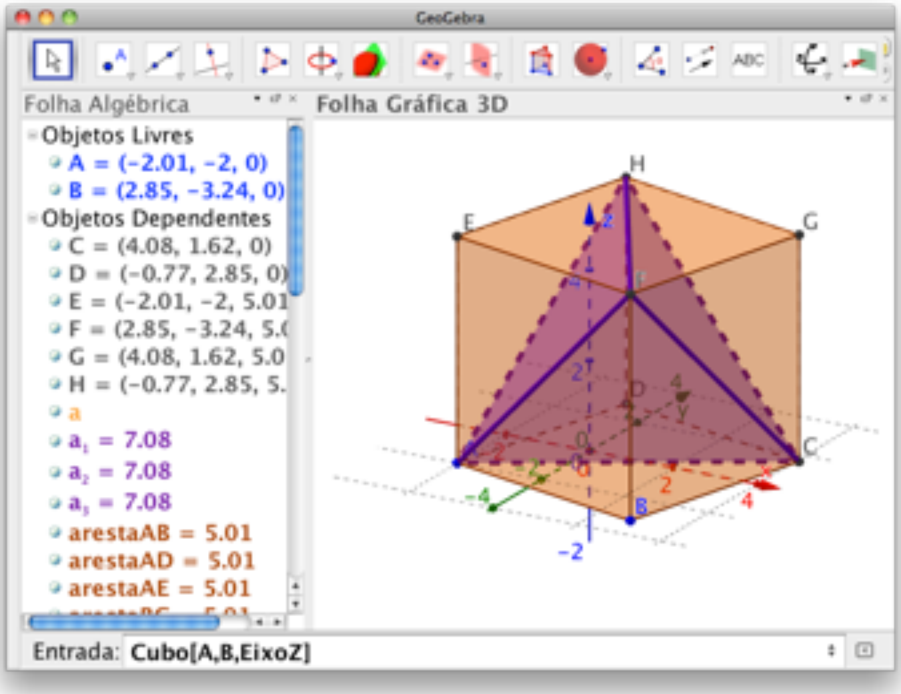




Tarefas adaptadas (Dos Santos, 2011b)

Tarefa 3 - Tetraedro no Cubo

1. Costura um cubo usando o comando *Cubo[<Ponto>, <Ponto>, <Direção>]*. Por exemplo marque os pontos A e B e de seguida escreva na linha de comandos **Cubo[A, B, zAxis3D]**.



2. Para definir o tetraedro podemos definir os quatro triângulos equiláteros que integram a face do sólido. Assim temos de as definir usando a ferramenta polígono ou os comandos seguintes:

   f1=polígono[A,C,F]

   f2=polígono[A,C,H]

   f3=polígono[A,F,H]

   f4=polígono[C,F,H]

3. Finalmente altere as propriedades dos objectos de modo a ajustar as cores e a sua visibilidade.

Tarefa 4 - Secções num prisma.

1. Construa um **prisma** cuja **base** tenha **n lados**, e a sua **altura** seja **variável** em função de um parâmetro **a**.

Prisma[<Polígono>, <Ponto>]
Prisma[<Polígono>, <Altura>]
Prisma[<Ponto>, <Ponto>, ...]

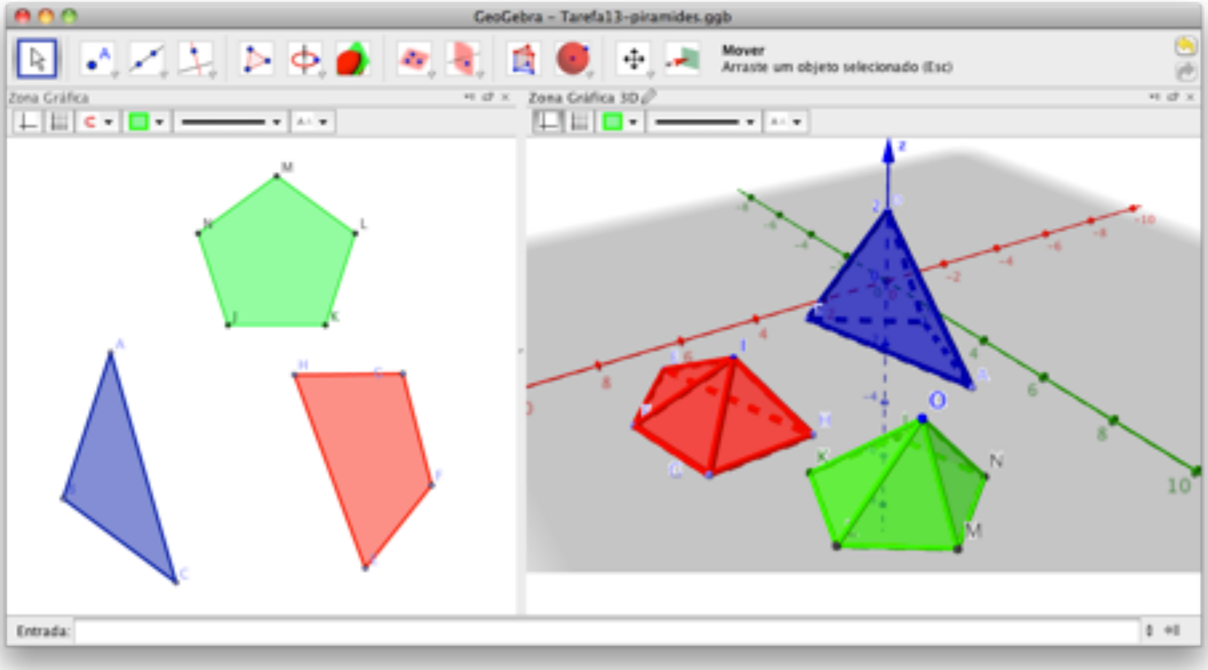
2. Recorrendo a alguns dos comandos 3D, abaixo listados, construa uma aplicação do GeoGebra que permita estudar as secções no prima construído em 1, por um plano que intersecte todas as arestas da superfície lateral.

Plano[<Ponto>, <Plano>]
Plano[<Ponto>, <Ponto>, <Ponto>]
PlanoPerpendicular[<Ponto3D>, <Reta3D>]
InterseçãoGeométrica[<Plano>, <Polígono>]

Tarefa 5 - Pirâmides

Qual o número mínimo de vértices para obter uma pirâmide?

Para conduzir uma exploração relacionada com a questão pode sugerir-se aos alunos que marquem pontos e usem o comando pirâmide na barra de comandos.



Na aplicação que deu origem a imagem acima procedeu-se do modo seguinte no GeoGebra 5.0:

1. Activou-se a **Zona Gráfica**, **Zona Gráfica 3D** e **Barra de Comandos**, através do menu Exibir.

2. Para a pirâmide azul:
   a. Marcaram-se com a ferramenta três pontos no plano xOy [xOyPlane];
   b. Um ponto no eixo Oz [zAxis3D];
   C. Usou-se o comando **P_{Az}=Pirâmide[A,B,C,D].**

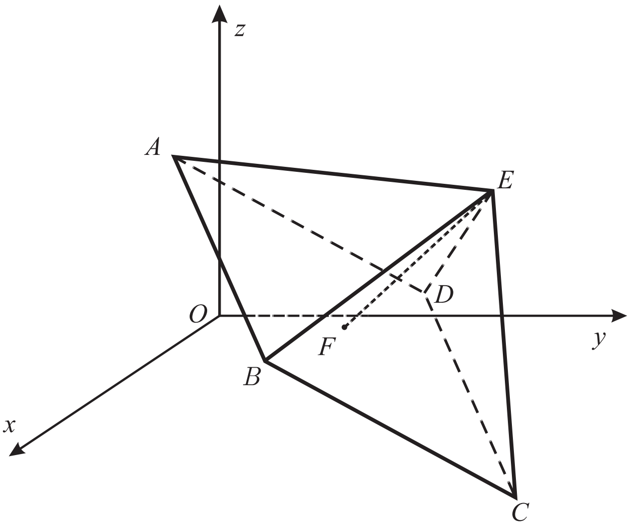
3. No caso da pirâmide vermelha:
   a. Marcaram-se com a ferramenta quatro pontos no plano xOy [xOyPlane];
   b. Um ponto no espaço escrevendo na barra de comandos I=(6, 3, 1);
   C. Usou-se o comando **P_{Va}=Pirâmide[E,F,G,H,I]** .

4. Por último, a pirâmide verde foi realizada de um modo diferente.
   a. Marcaram-se com a ferramenta os pontos J e K, na **Zona Gráfica**;
   b. Na **Zona Gráfica**, com a ferramenta polígono regular, definiu-se o polígono da base, um pentágono, escolhendo os pontos J, K e o número de vértices 5;
   C. Finalmente, usou-se o comando **P_{Vd}=Pirâmide[J, K, L, M, N, O]**.

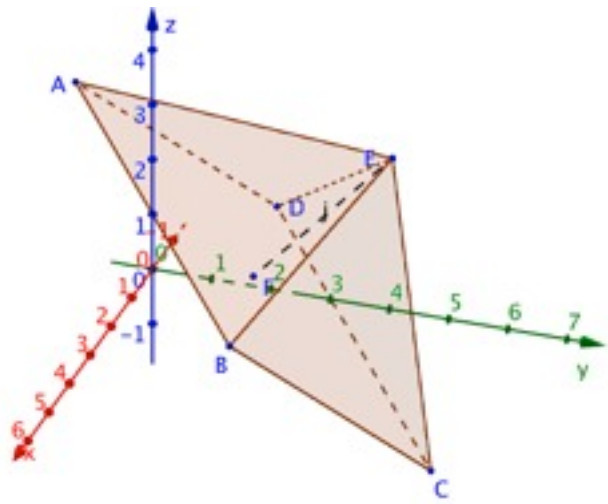
A aplicação permitirá alterar as vistas e os vértices das pirâmides. Para além de obter uma verificação de que o número mínimo de pontos para definir uma pirâmide é quatro onde um não pode ser complanar com os outros três, poderá ser explorado o conceito de pirâmide obliqua e reta.

Tarefa 6 - Pirâmides

Construa a pirâmide da figura seguinte e verifique que a imagem encontra-se corretamente construída.



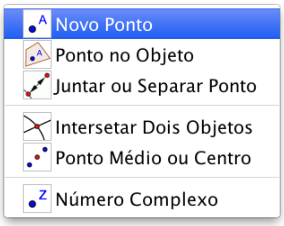
Para a construção da pirâmide recorra aos pontos: A(-2,-2,2); B(2,2,0); C(-2,4,-4); D(-6,0,-2); E(-3,3,1); F(-2,1,-1).

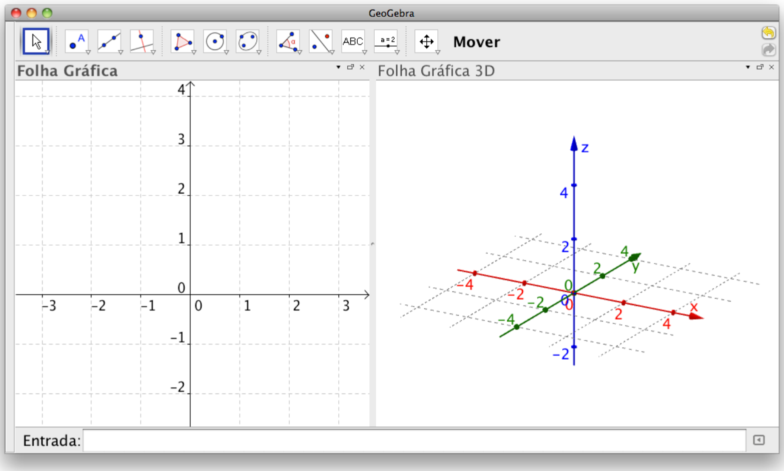


Alexandre Emanuel Batista Trocado, José Santos dos Santos

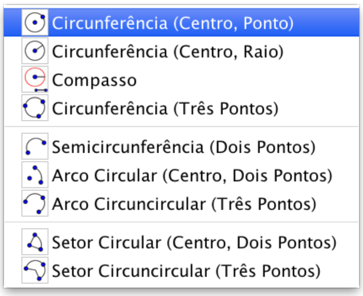
Tarefa 7 - Explorar a esfera

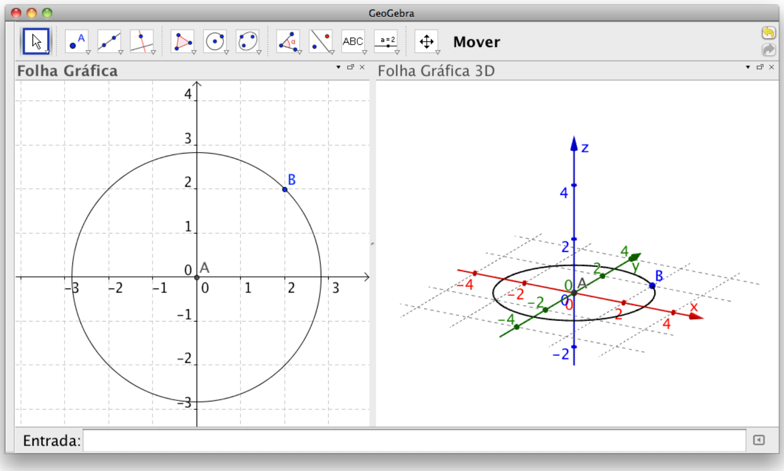
1. Abra o GeoGebra 5.0 e exiba a folha gráfica 2d e 3d.



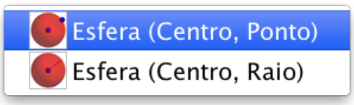


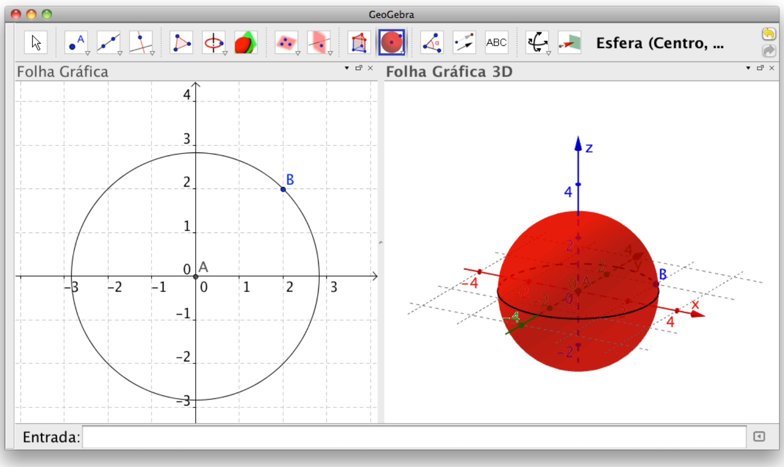
2. Na folha gráfica 2d recorra a ferramenta **Novo Ponto** e marque dois pontos A, origem do referencial, e B. Use a ferramenta **Circunferência(Centro,Ponto)** e marque a circunferência de centro em A e que contêm B.





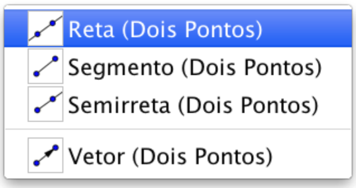
3. Na folha gráfica 3d recorra a ferramenta **Esfera(Centro,Ponto)** e ponto e obtenha a esfera de centro A e cuja superfície contêm o ponto B.

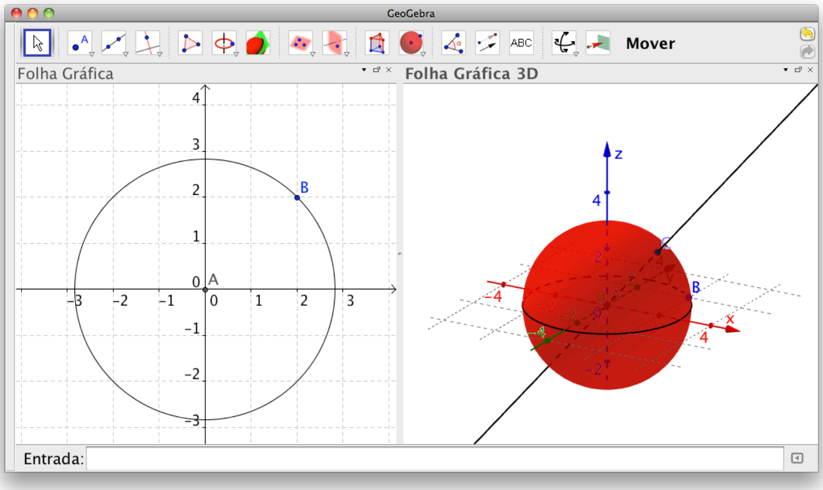




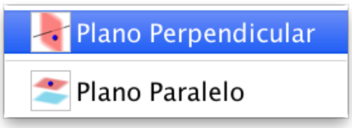
4. Ainda na folha gráfica 3d, use a ferramenta ponto para marcar o ponto C sobre a superfície

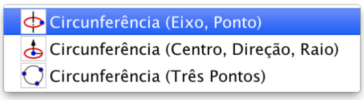
esférica. De seguida use a ferramenta **Reta(Dois Pontos)** para marcar a reta AC.

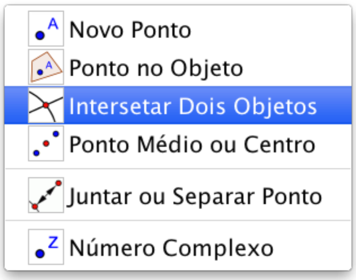


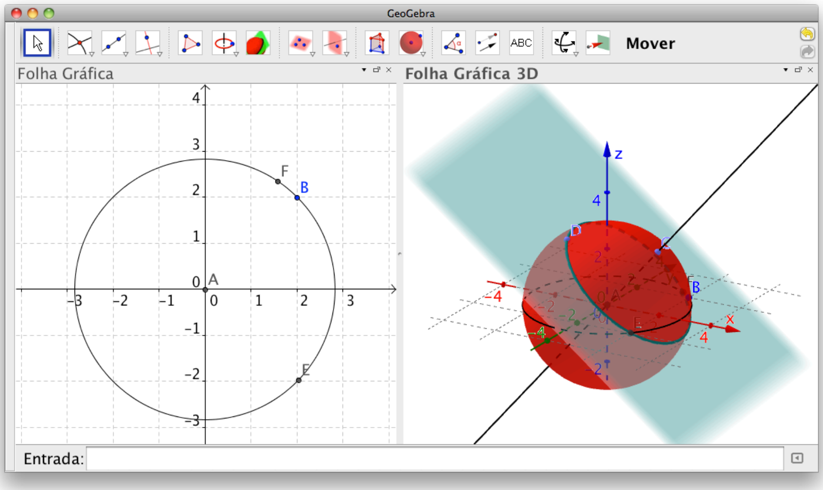


5. Marque um ponto D sobre a superfície esférica.
6. Usando a ferramenta **Plano Perpendicular** obtenha o plano perpendicular a AC que passa por D.
7. Recorrendo a ferramenta **Circunferência(Eixo,Ponto)** construa a circunferência de eixo AC e que contêm D
8. Intersecte o plano com a superfície esférica usando a ferramenta **Intersectar Dois Objectos**.
9. Usando a ferramenta **Intersectar Dois Objectos**, obtenha os pontos F e E.









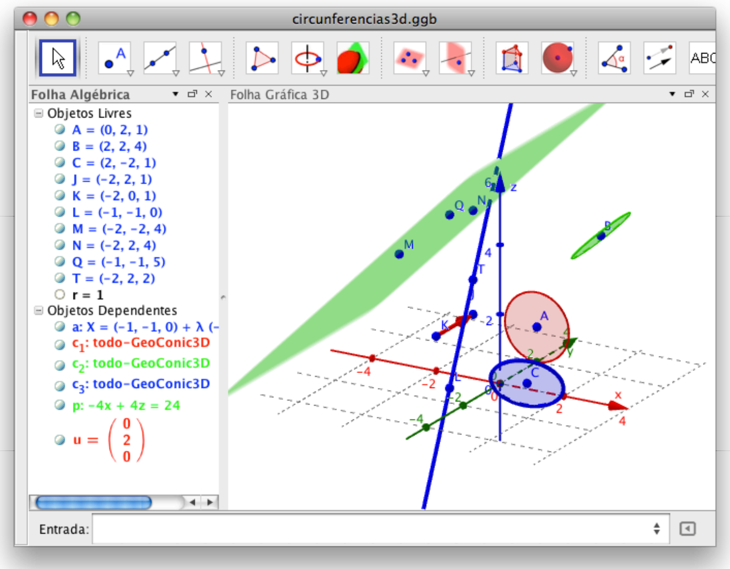
10. Movimente os pontos B, C e D e explore a aplicação.

Construa um roteiro de perguntas que permitam usar a aplicação em sala de aula, de modo a ilustrar e explorar conhecimento matemático relacionado com a geometria da esfera.

Tarefa 8 - Circunferências e círculos no espaço

1. Marque três pontos no espaço e construa a circunferência que os contêm, usando o comando ***Circunferência[Ponto, Ponto, Ponto]*** , ou a ferramenta  .

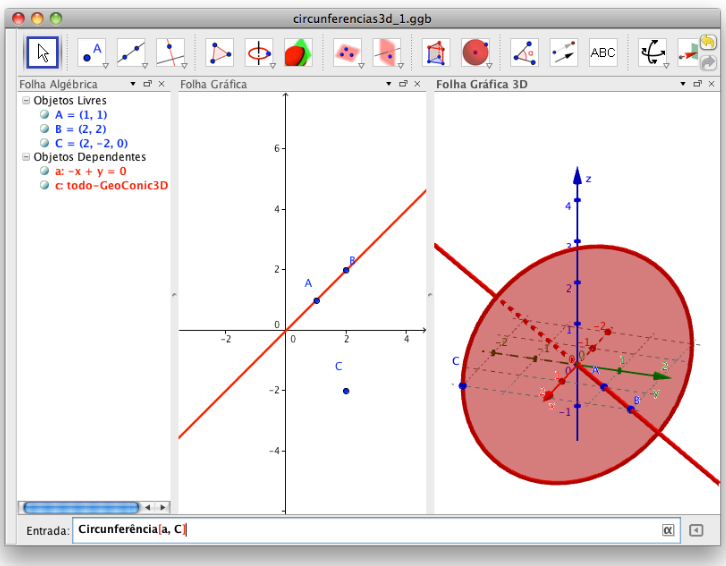
2. Utilize o comando ***Circunferência[Ponto, Raio, Direção]*** ,  , de modo a obter circunferências de centro num ponto P, raio r, e num plano perpendicular a uma direcção ou paralelo a um outro plano.

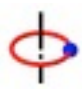


r=1
A = (0, 2, 1)
K = (-2, 0, 1)
J = (-2, 2, 1)
Vetor[K, J]
c_1=Circunferência[A, r, u]

M = (-2, -2, 4)
N = (-2, 2, 4)
Q = (-1, -1, 5)
P=Plano[M, Q, N]
B = (2, 2, 4)
c_2=Circunferência[B, r,p]

L = (-1, -1, 0)
T = (-2, 2, 2)
a=Reta[L, T]
c_3=Circunferência[C, r, a]



3. Utilize o comando ***Circunferência[eixo, Ponto]***,  , de modo a obter uma circunferência que contem um ponto e contida no plano perpendicular a uma reta.

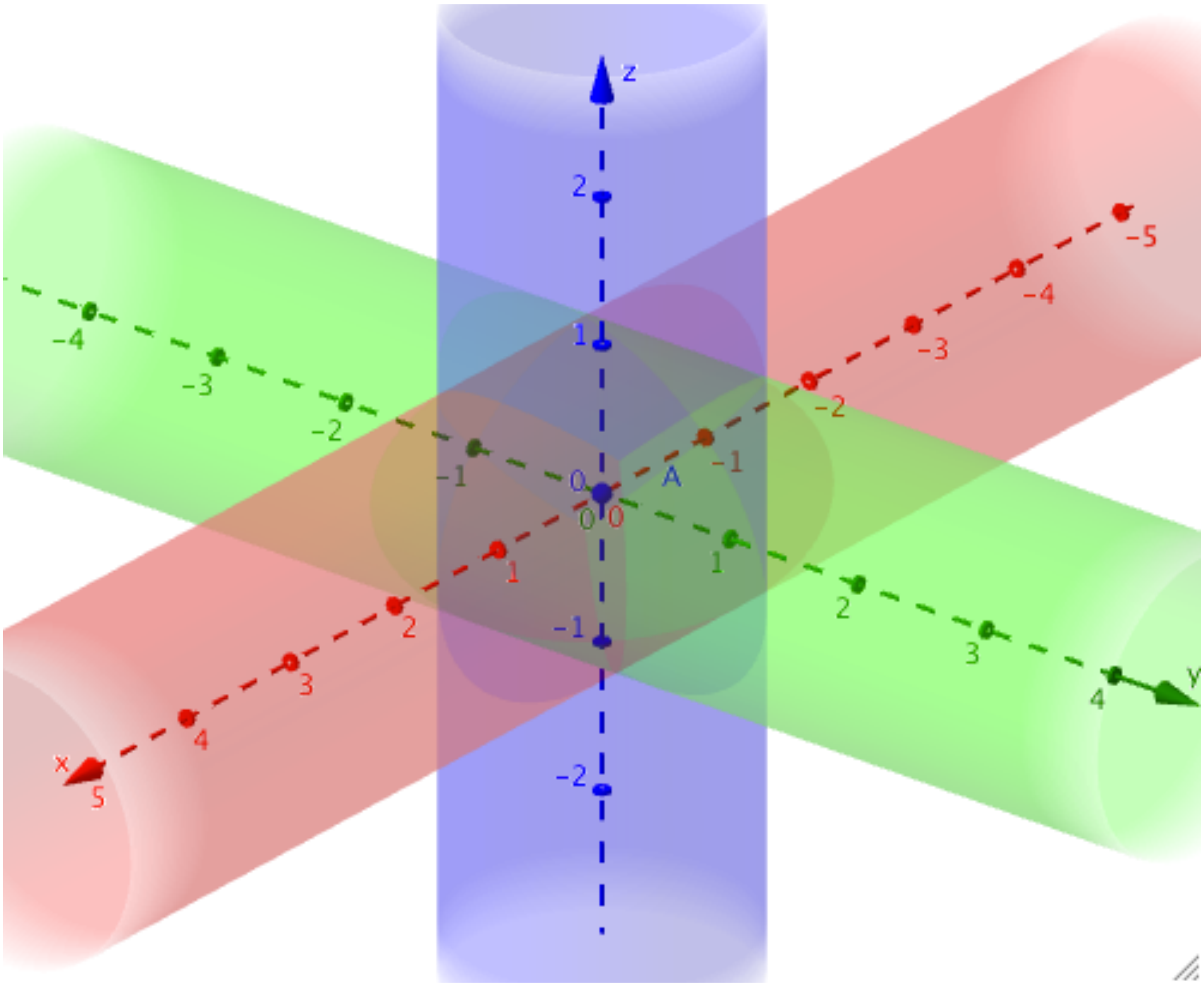
Tarefa 9 - Superfície cilíndrica

Com o comando cilindro infinito obtenha as três superfícies cilíndricas da figura.

CilindroInfinito[<Reta>, <Raio>]

CilindroInfinito[<Ponto>, <Vetor>, <Raio>]

CilindroInfinito[<Ponto>, <Ponto>, <Raio>]

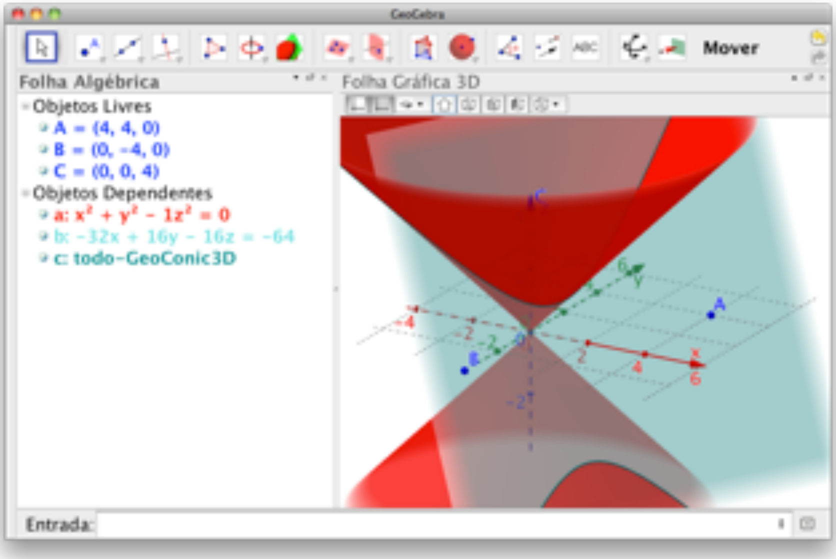


Ponto	A=(0,0,0)
Raio	r=1
Vetor Um cilindro em cada uma das direcções dos três eixos coordenados	CilindroInfinito[A, Vetor[(0, 0, 0), (1, 0, 0)], r] CilindroInfinito[A, Vetor[(0, 0, 0), (0, 1, 0)], r] CilindroInfinito[A, Vetor[(0, 0, 0), (0, 0, 1)], r]

Tarefa 10 - Cónicas em 3D

1. Abra o GeoGebra na versão 5.0.
2. No menu Exibir active a Folha Gráfica 3D
3. Na linha de comandos escreva, e de entrada, de cada um dos seguintes comandos:

a=ConeInfinito[(0, 0, 0), (0, 0, 3), 45°]
A= (4,4,0)
B=(0,-4,0)
C=(0,0,4)
b=Plano[A,B,C]



4. Mova os pontos A, B e C na folha gráfica 3D e observe a interseção do cone com o plano.
5. Determine a interseção escrevendo ***InterseçãoGeométrica[b,a]*** na linha de comandos seguido de enter.

Perguntas para explorar a aplicação com os alunos:

Depois do terceiro passo:

Como se representa o cone e o plano algebricamente?

Depois da aplicação construída:

Indica coordenadas de A, B e C para que a intersecção seja:

a. um ponto;
b. uma circunferência;
c. uma elipse;
d. uma parábola.

Observas na intersecção, outro tipo de curvas que conhecas? Quais?

Outros comandos para obter um cone: Cone[<Ponto>, <Ponto>, <Raio>], ConeInfinito[<Ponto>, <Vetor>, <Ângulo>], ConeInfinito[<Ponto>, <Reta>, <Ângulo>].

Tarefa 11 - Poliedros platónicos

Experimente os comandos abaixo para representar outros poliedros platónicos para além do hexaedro regular.

Dodecaedro[<Ponto>, <Ponto>, <Direção>]

Icosaedro[<Ponto>, <Ponto>, <Direção>]

Tetraedro[<Ponto>, <Ponto>, <Direção>]

Octaedro[<Ponto>, <Ponto>, <Direção>]

Pirâmide[<Ponto3D>, <Ponto3D>, ...]

Tarefa 12 - Sólido inscrito e Modelação

1.Inicie o GeoGebra 5.0.

2. Coloque visível as três janelas: **Folha Gráfica**, **Folha Gráfica 2** e **Folha Gráfica 3D.**

3. Represente os pontos:
   - 3.1. A=(1,0,0)
   - 3.2. B=(0,1,0)
   - 3.3. C=(-1,0,0)
   - 3.4. D=(0,-1,0)
   - 3.5. V=(0,0,2)

4. Construa todas as faces da pirâmide.

5. Clique sobre a Folha Gráfica (que deverá ter os eixos escondidos) e construa o seletor h. Este deverá ser vertical e variar entre 0 e 2.

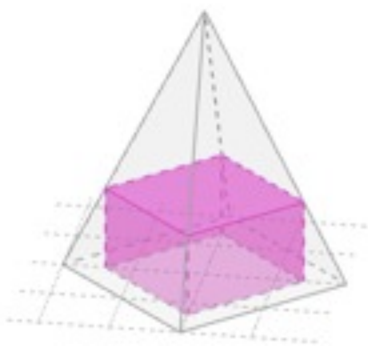
6. Clique sobre a Folha Gráfica 3D e defina o plano ***z=h***.

7. Determine os pontos de intersecção das arestas da pirâmide com o plano z=h. (pontos E,F,G,H).

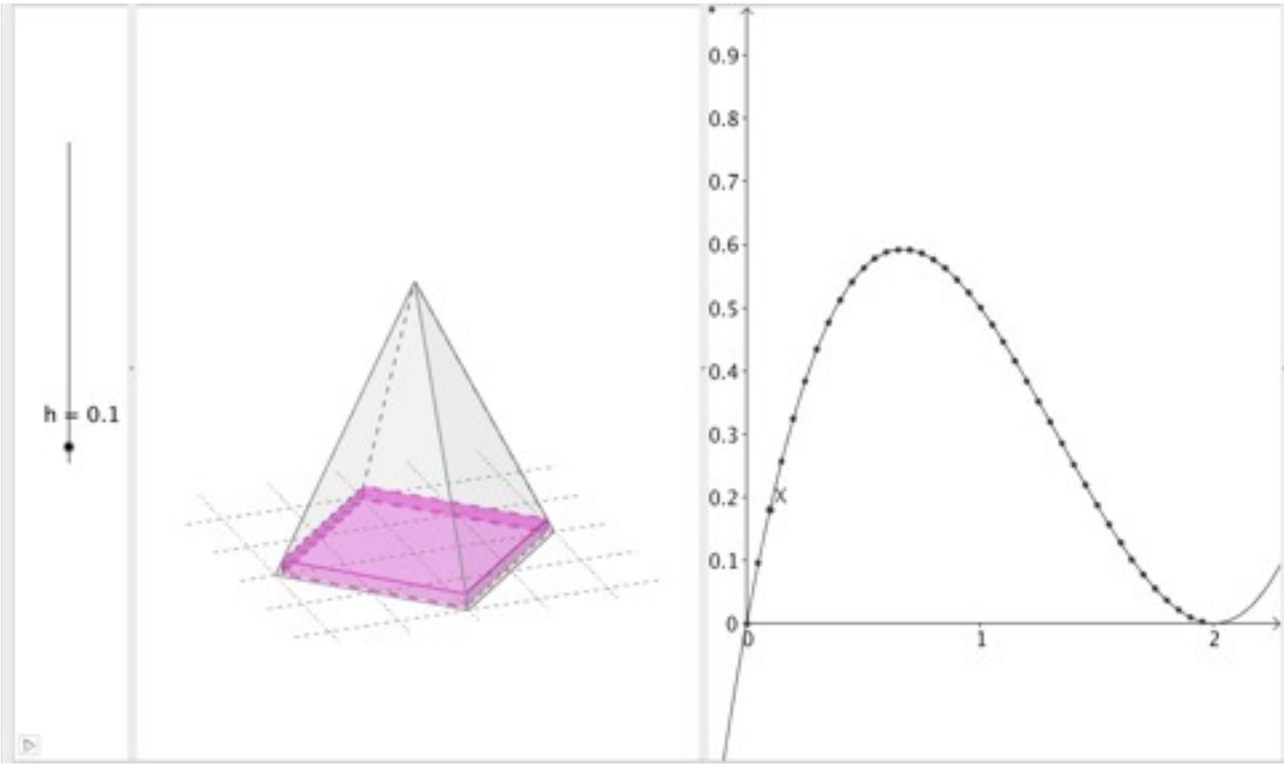
8. Esconda o plano definido anteriormente.

9. Defina os pontos que resultam da projecção dos pontos definidos anteriormente, sobre o plano z=0:
   - 9.1. E_1=(x(E),y(E),0)
   - 9.2. F_1=(x(F),y(F),0)
   - 9.3. G_1=(x(G),y(G),0)
   - 9.4. H_1=(x(H),y(H),0)

10. Construa as faces do paralelepípedo através de comandos semelhantes a Polígono[G,H,H_1,G_1] e altere, em seguida, a sua cor e opacidade.

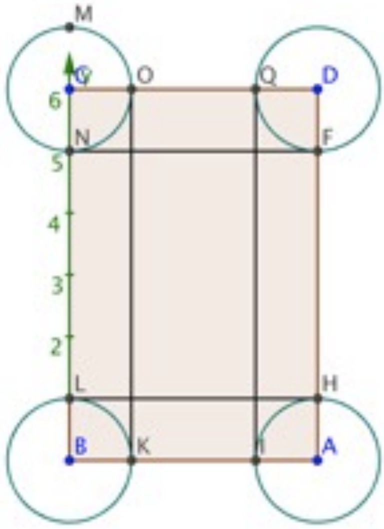


11. Defina a variável volume através do comando ***volume=polígono9*h***. Caso polígono9 seja uma das bases do paralelepípedo.
12. Clique sobre a Folha Gráfica 2 e defina o ponto que associa à altura do paralelepípedo o seu volume, através do comando ***X=(h,volume)***
13. Clique com o botão direito do rato sobre o ponto X e escolha a opção ***Activar Traço***.
14. Torne visível a Folha de Cálculo.
15. Clique com o botão direito do rato sobre o ponto X e escolha a opção Gravar para a Folha de Cálculo
16. Altere as opções do parâmetro h para Animação->Crescente e Incremento->0.2
17. Clicando com o botão direito do rato, escolha a opção ***Animar.***
18. Pare a animação. Seleccione o traço na folha de cálculo e com o botão direito do rato escolha a opção ***Criar Lista de Pontos.***
19. Mude a localização dos ponts criados para a ***Folha Gráfica 2.***
20. Clique na ***Folha Gráfica 2*** e em seguida na barra de entrada introduza o comando **RegressãoPolinomial[lista1,3]** para obter a expressão analítica da função que relaciona a altura do prisma com o seu volume.

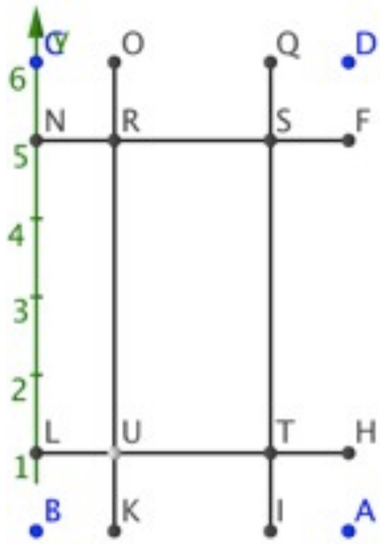


Tarefa 13 - Caixa de volume máximo

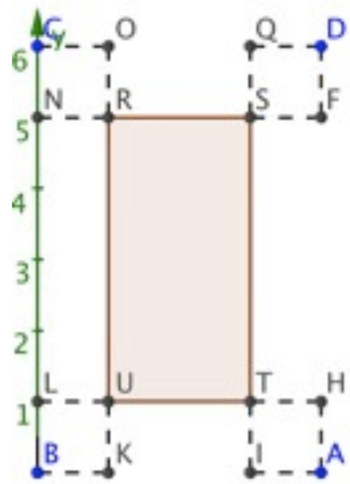
1. Defina os pontos A=(4,0,0); B=(0,0,0); C=(0,6,0); D=(4,6,0).
2. Defina o polígono [ABCD].
3. Defina recorra à funcionalidade das vista 3D para visualizar a partir de cima a base do sódido geométrico.
4. Na Folha Gráfica 1 construa o seletor **a** que varia entre **0** e **2** e α que deverá ser um ângulo que varie entre **0º** e **90º.**
5. Na Folha Gráfica 1 construa as circunferências centradas em cada um dos vértices de **raio a.**
6. Determine os pontos de interseção das circunferência com os lados do retângulo como mostra a figura seguinte.



7. Esconda as circunferências, o retângulo e construa os pontos de intersecção dos segmentos de reta.



8. Construa os segmentos correspondentes ao corte da cartolina e o polígono que será a base da caixa, conforme mostra a figura:



9. Obtenha as coordenadas dos pontos que servirão para o fecho da caixa:

$$H\_1 = (x(T) + a\ \cos(\alpha), y(T), z(T) + a\ \sin(\alpha))$$

$$I\_1 = (x(T),\ y(T)\ -\ a\ \cos(\alpha),\ a\ \sin(\alpha))$$

$$K\_1 = (x(U),\ y(U)\ -\ a\ \cos(\alpha),\ a\ \sin(\alpha))$$

$L\_1 =$ (x(U) - a cos(Éø), y(U), a sin(Éø))

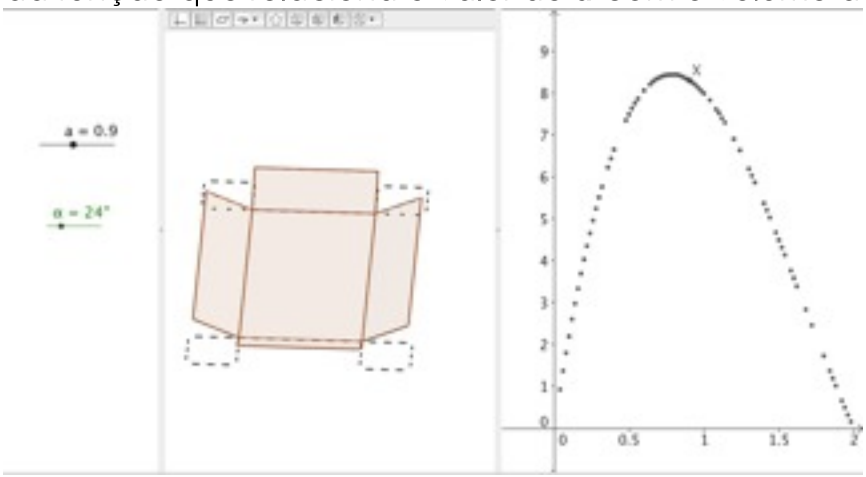
$$F\_1 = (x(S) + a\ \cos(\alpha), y(S), z(S) + a\ \sin(\alpha))$$

$$Q\_1 = (x(S),\ y(S)\ +\ a\ \cos(\alpha),\ a\ \sin(\alpha))$$

$$O\_1 = (x(R),\ y(R)\ +\ a\ \cos(\alpha),\ a\ \sin(\alpha))$$

$$L\_1 = (x(R)\ -\ a\ \cos(\alpha),\ y(R),\ a\ \sin(\alpha))$$

10. Construa os polígonos das faces laterais da caixa.
11. Esconda todos os pontos.
12. Na ***Folha Gráfica 2*** defina o ponto $X = (a, a * polígono2)$ sendo polígono2 a base da caixa.
13. Active o traço de X e de forma análoga à tarefa anterior determine a expressão da função que relaciona o valor de ***a*** com o volume da caixa.



Referencias

Azevedo, A. Dos Santos, J. Correia, P. (2011) O GeoGebra no desenvolvimento dos temas da Álgebra e da Geometria no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, tarefas para a sala de aula e conhecimento do software necessário à ação do professor. Curso n.3, ProfMat 2011. Lisboa. Acedido a 23-01-2013 em: http://www.geogebra.org.pt/images/arquivos/profmat_2011/c3_profmat_2011_igp_v_def_igp.pdf .

Azevedo, A. Dos Santos, J. Correia, P. (2011) O GeoGebra no desenvolvimento dos temas e competências matemáticas no 1º e 2º Ciclo do Ensino Básico, tarefas para a sala de aula e conhecimento do software imprescindível à ação do professor. Curso n.4 , ProfMat 2011. Lisboa. Acedido a 23-01-2013 em: http://www.geogebra.org.pt/images/arquivos/profmat_2011/c4_profmat_2011_igp_v_def_igp.pdf

Bartrolí, J. Bojuda, P. Gomà A. (2010) D55 - Matemàtiques amb GeoGebra. Departament d'Ensenyament, Generalitat de Catalunha.

Cabo, M. Dos Santos, J. Fernandes, N. A. Trocado, A. (2012) GeoGebra para a Sala de Aula. Curso 11, ProfMat 2012. Coimbra

Cruz, E. Dos Santos, J. Santos, I. (2010) Vamos Aprender - Matemática 1º ano. Book.it , Matosinhos.

Cruz, E. Dos Santos, J. Santos, I. (2010) Vamos Aprender - Matemática 2º ano. Book.it , Matosinhos.

Dos Santos, J. (2012e) Cual la silla que mas se ajusta? - Estadística y modelos en GeoGebra 3D. Día GeoGebra – Universidad de Valladolid. Campus de Segovia. Acedido a 23-01-2013 em: http://geometriadinamica.es/gg_day/comunicaciones/santos.pdf .

Dos Santos, J. (2012d) Funciones de crecimiento - una experiencia de aplicación de la metodología de aprendizaje basado en resolución de problemas con GeoGebra. XIV CONGRESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS. Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES. 4 a 6 de Julho, Málaga

Dos Santos, J. (2012c) Introducción a GeoGebra 3D - Taller . XIV CONGRESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS. Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES. 4 a 6 de Julho, Málaga

Dos Santos, J. (2012b) GeoGebra 3D - Taller . ENCUENTRO EN ANDALUZIA - GeoGebra en el aula. SUniversidad de Córdoba, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales e Instituto GeoGebra de Andalucía. 14 de Abril, Granada.

DOS SANTOS, J. (2012a). Quais as soluções da equação?. In Unión – Revista Iberoamericana de Educación Matemática, nº 29, 161 – 172. ISSN: 1815-0640. Acedido a 23-01-2013 em: http://www.fisem.org/web/union/images/stories/29/archivo14.pdf

DOS SANTOS, J. PERES, M. (2012). Atitudes dos alunos face ao GeoGebra – Construção e validação de um inventário In Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, v. 1, n. 1, 161 – 172. ISSN 2237-9657. Acedido a 23-01-2013 em: http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/download/8874/6597

Dos Santos, J. (2011b) Notas da disciplina Matemática. Materiais e Tecnologias, opção do 3º ano do Curso de Educação Básica, ESE - IP Porto. Porto. (Materiais poli-copiados)

Dos Santos, J. (2011a) O GeoGebra e as Comunidades de Conhecimento ao Serviço do ensino e Aprendizagem da Matemática, Notas da Acção de formação CCPFC/ACC-62730/10 , ESE - IP Porto. Porto. (Materiais poli-copiados)

Dos Santos, J. Geraldes, J. Ribeiro, A. Trocado, A. (2010) Como usar o GeoGebra para ensinar e aprender Matemática. Curso n.3 , ProfMat 2010. Aveiro. Acedido a 23-01-2013 em: http://www.geogebra.org.pt/images/arquivos/profmat_2010/profmat_2010_c3.pdf .

Dos Santos, J. Geraldes, J. Ribeiro, A. Trocado, A. (2010) GeoGebra, Internet, e Intercomunicação com Javascript. Curso n.4 , ProfMat 2010. Aveiro. Acedido a 23-01-2013 em: http://www.geogebra.org.pt/images/arquivos/profmat_2010/profmat_2010_c4.pdf .

Dos Santos, J. (2010) . Estadística e GeoGebra, ventajas e dificultades – Una experiencia en un Curso Profesional de Educación Secundaria en Portugal. I Jornadas GeoGebra en Andalucía – Conferencia de Encerramiento – Universidad de Córdoba.

Dos Santos, J. (2009) El GeoGebra y el Analisis de Relaciones Matemáticas en el Arte, cap.V, in Giménez J. La Proporción: Arte y matemáticas. Editorial Graó. Barcelona.

Dos Santos, J. Geraldes, J. Ribeiro, A. Trocado, A. (2009) Como usar o GeoGebra para ensinar e aprender Matemática. Curso n.3 , ProfMat 2009. Viana do Castelo. Acedido a 23-01-2013 em: http://www.geogebra.org.pt/images/arquivos/profmat_2009/profmat_2009_c3.pdf .

Dos Santos, J. Trocado, A. (2008) Estudo de isometrias com o GeoGebra como abordagem possível para o 1º e 2º Ciclo do Ensino Básico no contexto do reajustamento do Programa de Matemática do Ensino Básico . Sessão Pratica, MinhoMat 2008. Vila Verde. Acedido a 23-01-2013 em: http://www.geogebra.org.pt/images/arquivos/minhomat_2008/MinhoMat_2008.pdf .

Dos Santos, J. Viera, M. (2006) Geometria: Conceitos e experiências de aprendizagem. In Fernandes, D.(org.) Cadernos Temáticos. ESE-IP Porto.

Trocado, A. (2012) . IGP Instituto GeoGebra de Portugal – Universidad de Valladolid. Campus de Segovia. Disponível em: http://geometriadinamica.es/gg_day/comunicaciones/trocado.pdf , consultado em 23 de Janeiro de 2013.