Problemas – Tema 5

Problemas resueltos - 26 - ejemplos de síntesis sobre integrales y áreas

1. Sea $f(x)=\begin{Bmatrix} (x-1)^2 \ si \ x\leq 1 \\ a+\ln(x) \ si \ x>1 \end{Bmatrix}$

a) Encontrar a **para que la función sea continua en** $x=1$ **.**

b) Para $a=0$ **hallar el área de la región delimitada por la gráfica de** $f(x)$ **y las rectas** $x=1$ **e** $y=1$

a) Las condiciones de continuidad en el punto frontera de una función a trozos son las siguientes.

1. $\exists f(1)=(1-1)^2=0$

2. $L^- = L^+ = L$

$L^- = \lim_{x\to 1^-} (x-1)^2 = 0$, $L^+ = \lim_{x\to 1^+} (a+\ln(x)) = a$ $\rightarrow$ $L=a=0$

3. $f(0)=L$ $\rightarrow$ $a=0$

b) Con $a=0$ la función es continua en $x=1$, tal y como hemos demostrado en el apartado anterior.

En $x<1$ la función es continua por ser polinómica

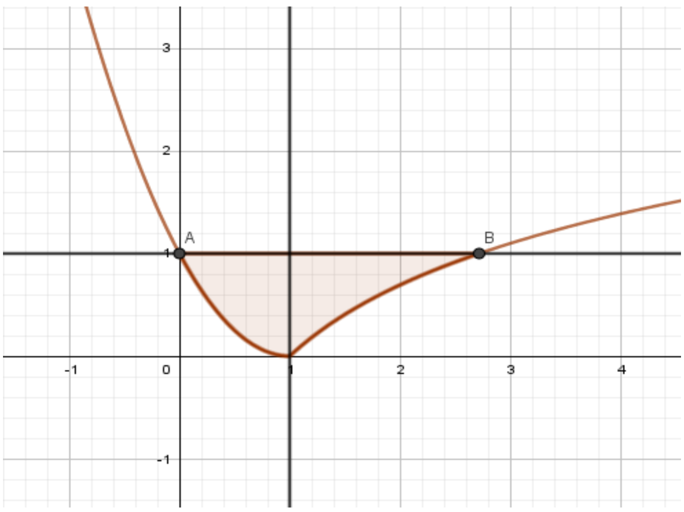
En $x>1$ la función es continua, porque el logaritmo neperiano es continua en los reales positivos.

Por lo tanto, la función a trozos es continua en todo su dominio y podrá ser integrable.

Para saber el área encerrada por la función con las rectas, debemos hacer un boceto de la función.

En $x<1$ tenemos la parábola x^2 desplazada una unidad a la derecha, por lo que su mínimo relativo y absoluto será en el punto $(1,0)$

En $x>1$ tenemos la función logaritmo neperiano, que es bien conocida, y que pasa por el punto $(1,0)$ (que coincide con el mínimo absoluto de la parábola anterior).



Los puntos de corte los obtenemos de igualar la función a trozos con la recta horizontal $y=1$.

$$(x-1)^2=1 \quad \rightarrow \quad x=0$$
$$\ln(x)=1 \quad \rightarrow \quad x=e$$

Por lo que área encerrada será:

$$Área=\int_0^1 (1-(x-1)^2)\,dx+\int_1^e (1-\ln(x))\,dx=\int_0^1 (1-x^2-1+2x)\,dx+\int_1^e (1-\ln(x))\,dx$$
$$Área=\int_0^1 (-x^2+2x)\,dx+\int_1^e (1-\ln(x))\,dx=\int_0^1 -x^2\,dx+\int_0^1 2x\,dx+\int_1^e dx-\int_1^e \ln(x)\,dx$$

Donde la integral del logaritmo neperiano es una integral bien conocida, que hemos resuelto por partes en ejercicios anteriores, y cuyo resultado es:

$$u(x)=\ln(x) \quad \rightarrow \quad u'(x)=\frac{1}{x}$$
$$v'(x)=1 \quad \rightarrow \quad v(x)=x$$
$$f'(x)=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)\,dx=x\cdot\ln(x)-\int dx=x\cdot\ln(x)-x+C$$

Por lo que el área queda:

$$Área=\left[\frac{-x^3}{3}\right]_0^1+2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+[x]_1^e-[x\ln(x)-x]_1^e$$
$$Área=\frac{-1}{3}-0+2\left[\frac{1}{2}-0\right]+[e-1]-[e-e-(0-1)]=\frac{-1}{3}+1+e-1-1=\frac{-1}{3}+e-1=\frac{3e-4}{3}u^2$$

2. Sea $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ definida para cualquier valor real $x\neq 0$. Obtener el área de la región plana delimitada por la curva de $f(x)$ con el eje de abscisas en el intervalo $[1,e]$.

Debemos obtener los posibles puntos de corte de la función con el eje horizontal. Para lo cual hacemos:

$f(x)=0 \quad \rightarrow \quad x^2+1=0$ → No existen puntos de corte con el eje horizontal

Para saber si la función está por encima o por debajo del eje horizontal en el intervalo $[1,e]$, obtenemos la imagen de un punto cualquiera del intervalo.

$f(1)=\frac{1+1}{1}=2>0$ → La función es positiva en el intervalo $[1,e]$

Por lo tanto el área encerrada coincidirá con la siguiente integral definida:

$$Área=\int_1^e \frac{x^2+1}{x}dx=\int_1^e \frac{x^2}{x}+\int_1^e \frac{1}{x}dx=\int_1^e x+\int_1^e \frac{1}{x}dx=[\frac{x^2}{2}]_1^e+[\ln|x|]_1^e=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}+1-0=\frac{e^2+1}{2}u^2$$

Donde hemos aplicado la regla de Barrow al resolver la integral definida:

$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ → siendo $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$.

3. a) Calcule los puntos en que las dos curvas $y=e^x$, $y=-x^2$ cortan a las rectas $x=0$, $x=1$

b) Calcula el área de la región plana limitada del apartado anterior.

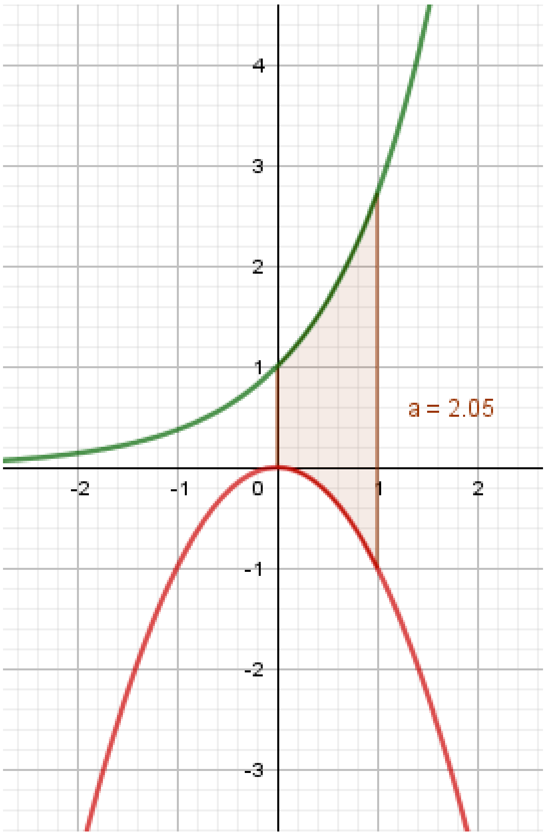
a) Para obtener los puntos de corte con las rectas verticales, simplemente evaluamos las curvas en cada punto.

$x=0 \rightarrow y=e^0=1 \rightarrow (0,1)$

$x=0 \rightarrow y=-0^2=0 \rightarrow (0,0)$

$x=1 \rightarrow y=e^1=e \rightarrow (1,e)$

$x=1 \rightarrow y=-1^2=-1 \rightarrow (1,-1)$



b) La gráfica de la función exponencial y de la parábola cóncava son bien conocidas. En el intervalo $[0,1]$ la exponencial permanece por encima de la parábola, por lo que el área encerrada resulta:

$$Área=\int_0^1 (e^x-(-x^2))\,dx$$

$$Área=\int_0^1 (e^x+x^2)\,dx$$

$$Área=[e^x]_0^1+[\frac{x^3}{3}]_0^1$$

$$Área=e^1-e^0+\frac{1}{3}-0$$

$$Área=e-\frac{2}{3}=2{,}05\,u^2$$

Donde hemos aplicado la regla de Barrow al resolver la integral definida:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

Siendo $F(x)$ primitiva de $f(x)$.

4. Dibujar y calcular el área de la región plana limitada por las siguientes rectas: $y=3x$ **,** $y=x$ **,** $y=-x+8$ **,** $x=3$ **.**

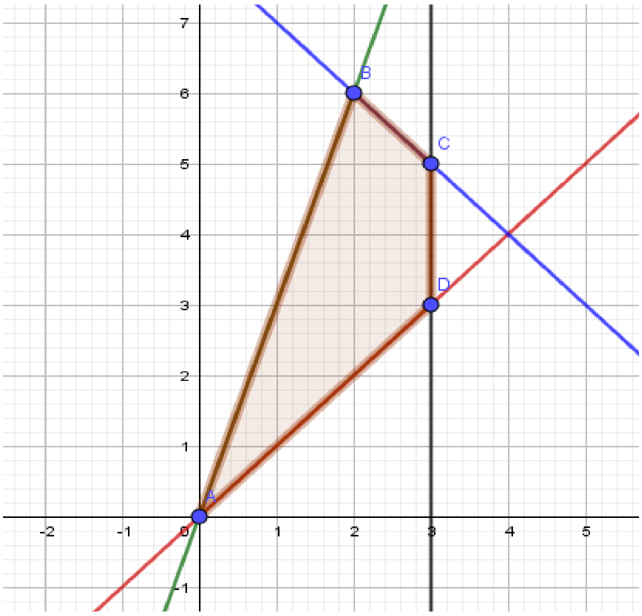
Dibujamos las rectas, a partir de los puntos de corte con los ejes y de su pendiente

$y=3x$ $\rightarrow$ Corta a los ejes en el $(0,0)$ y pendiente 3.

$y=x$ $\rightarrow$ Corta a los ejes en el $(0,0)$ y pendiente 1.

$y=-x+8$ $\rightarrow$ Corta a los ejes en el $(0,8)$ y en el $(8,0)$ y pendiente -1.

$x=3$ $\rightarrow$ Recta vertical que pasa por $(3,0)$.



Los puntos de corte de las rectas que delimitan el área encerrada son (0,0), (2,6), (3,5), (3,3).

Observando en cada intervalo que recta se encuentra por encima de la otra, podemos obtener el área mediante las siguientes integrales definidas:

$$Área=\int_0^2 (3x-x)\,dx+\int_2^3 (-x+8-x)\,dx=\int_0^2 (2x)\,dx+\int_2^3 (-2x+8)\,dx=[x^2]_0^2-[x^2]_2^3+8[x]_2^3$$

$$Área=(4-0)-(9-4)+8(3-2)=7u^2$$

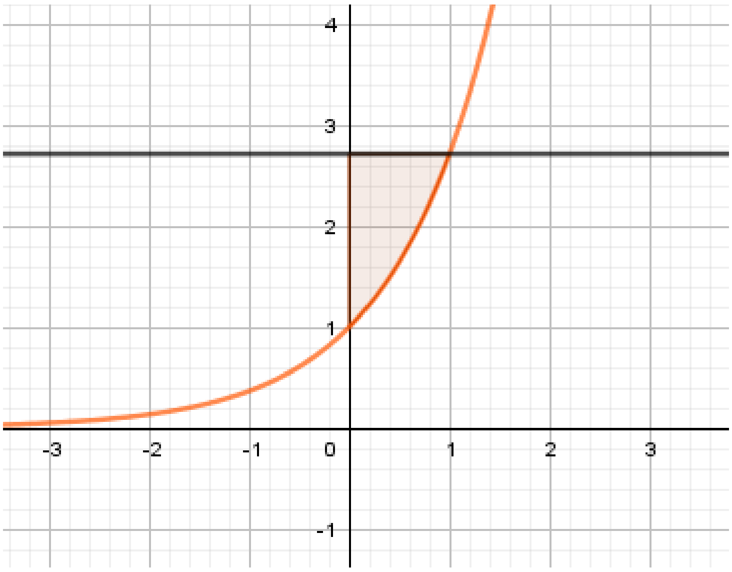
Donde hemos aplicado la regla de Barrow al resolver la integral definida: $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$, siendo $F(x)$ primitiva de $f(x)$.

5. Calcular el área que encierra la función $f(x)=e^x$ con la recta $y=e$ y el eje vertical (ojo: con el eje vertical).

La gráfica de la función exponencial es bien conocida, por lo que podemos dibujar fácilmente el área que nos solicitan.

El punto de corte entre la exponencial y la recta $y=e$ resulta:

$$e^x=e \quad \rightarrow \quad x=1$$



Por lo que podemos obtener numéricamente el área encerrada con el eje vertical con la integral definida:

$$Área=\int_0^1 (e-e^x)\,dx$$

$$Área=e[x]_0^1-[e^x]_0^1$$

$$Área=e[1-0]-[e-1]=e-e+1=1\,u^2$$

Donde hemos aplicado la regla de Barrow al resolver la integral definida: $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$, siendo $F(x)$ primitiva de $f(x)$.

6. Encuentre los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones siguientes:

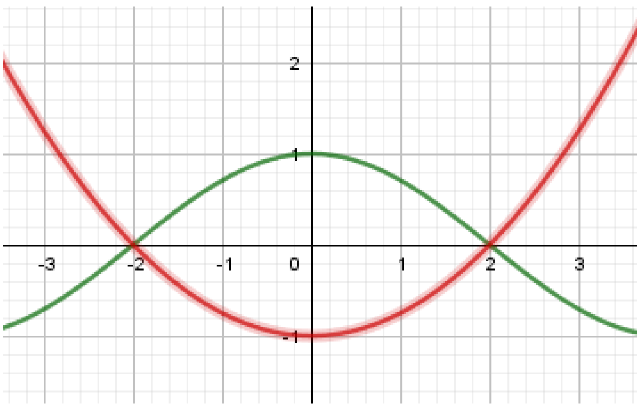
$$f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) \quad , \quad g(x)=\frac{x^2}{4}-1$$

Calcule el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

La parábola $g(x)=\frac{x^2}{4}-1$ posee su mínimo relativo y absoluto en $(0,-1)$, ya que es una traslación vertical de la parábola $\frac{x^2}{4}$. Corta al eje horizontal en los puntos $(-2,0)$ y $(2,0)$.

La función coseno pasa por $(0,1)$ y se anula cuando el argumento de la función coseno es múltiplo de $\frac{\pi}{2}$ radianes → $\frac{\pi x}{4}=\frac{\pi}{2}$ → $x=2$ → Pasa por los puntos ... $(-2,0)$, $(2,0)$, $(6,0)$ ...

Debido a la periodicidad de la función coseno, su gráfica se repite cuando el argumento es múltiplo de 2π radianes → $\frac{\pi x}{4}=2\pi$ → $x=8$ → Periodo igual a 8 radianes.



Ambas gráficas se cortan en los puntos $(-2,0)$, $(2,0)$. Por lo que el área encerrada resulta:

$$\acute{A}rea=\int_{-2}^{2}\left(\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)-\left(\frac{x^2}{4}-1\right)\right)dx=2\int_{0}^{2}\left(\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)-\left(\frac{x^2}{4}-1\right)\right)dx$$

Por simetría, el área total es el doble del área encerrada en el intervalo $[0,2]$.

$$\acute{A}rea=2\left(\frac{4}{\pi}\left[sen\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right]_0^2-\frac{1}{12}[x^3]_0^2+[x]_0^2\right)=2\left(\frac{4}{\pi}[1-0]-\frac{1}{12}[8-0]+[2-0]\right)=2\left(\frac{4}{\pi}-\frac{2}{3}+2\right)=5{,}21\,u^2$$

Donde hemos aplicado la regla de Barrow al resolver la integral definida: $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$, siendo $F(x)$ primitiva de $f(x)$.