

Οδηγίες για τη δραστηριότητα

Στη δραστηριότητα δίνεται μία προεπιλεγμένη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} , ένα σημείο της $A(x_0, f(x_0))$, το οποίο μπορείς να μεταβάλλεις με τον αντίστοιχο δρομέα x_0 και η εφαπτομένη τής γραφικής της παράστασης σε αυτό.

1. Επίλεξε το κουτί «κλίση εφαπτομένης» για να εμφανιστεί η κλίση της εφαπτομένης στο x_0 . Μπορείς να επιλέξεις και το κουτί «γραφική παράσταση f' » ώστε να βλέπεις σε κάθε περίπτωση και τη γραφική παράσταση τής παραγώγου τής f . Με το κουτί «Δεύτερη παράγωγος f'' » μπορείς να εμφανίσεις τη γραφική παράσταση της δεύτερης παραγώγου της f .

Σύνδεση της (πρώτης και δεύτερης) παραγώγου μίας συνάρτησης με την κυρτότητά της.

2. Πειραματίσου μεταβάλλοντας το σημείο A μέσω του αντίστοιχου δρομέα και παρατήρησε σε κάθε θέση x_0 την κλίση της εφαπτομένης ή με άλλα λόγια την παράγωγο $f'(x_0)$ της f στο x_0 . Εναλλακτικά, με το κουμπί «Κίνηση A » μπορείς να αφήσεις την εφαρμογή να μεταβάλλει το A και εσύ να παρατηρείς πώς μεταβάλλεται η κλίση της εφαπτομένης στα διαστήματα που η f είναι είτε κοίλη είτε κυρτή. Με το δρομέα «speed» μπορείς να ρυθμίσεις την ταχύτητα κίνησης του σημείου A .

Αφού κάνεις τις παρατηρήσεις σου, συμπλήρωσε τον ακόλουθο πίνακα.

Διάστημα	Μονοτονία f'	Πρόσημο f''	Κυρτότητα f

3. Επίλεξε το κουτί «Κυρτότητα – Σημεία καμπής» και απάντησε στα ερωτήματα της εφαρμογής. Όταν συμπληρώνεις μία σωστή απάντηση, το αντίστοιχο πλαίσιο γίνεται πράσινο. Αντίθετα, σε μία λάθος απάντηση γίνεται κόκκινο.
4. Όταν ολοκληρώσεις με την πρώτη συνάρτηση, επίλεξε το κουτί «Επιλογή τύπου» και κάνε κλικ στο κουμπί «Συνάρτηση 2» για να επιλέξεις μία νέα συνάρτηση. Επανάλαβε τη διαδικασία των βημάτων 2 και 3. Σημείωσε τα συμπεράσματά σου στον ακόλουθο πίνακα.

Διάστημα	Μονοτονία f'	Πρόσημο f''	Κυρτότητα f

5. Όταν ολοκληρώσεις με τη δεύτερη συνάρτηση, επέλεξε το κουτί «Επιλογή τύπου» και κάνε κλικ στο κουμπί «Συνάρτηση 3» για να επιλέξεις μία νέα συνάρτηση.
Επανάλαβε τη διαδικασία των βημάτων 2 και 3.
Σημείωσε τα συμπεράσματά σου στον ακόλουθο πίνακα.

Διάστημα	Μονοτονία f'	Πρόσημο f''	Κυρτότητα f
$(-\infty, -1]$			
$[-1, 1]$			
$[1, +\infty)$			

6. Όταν ολοκληρώσεις με την τρίτη συνάρτηση, επέλεξε το κουτί «Επιλογή τύπου» και κάνε κλικ στο κουμπί «Συνάρτηση 4» για να επιλέξεις μία νέα συνάρτηση.
Επανάλαβε τη διαδικασία των βημάτων 2 και 3.
Σημείωσε τα συμπεράσματά σου στον ακόλουθο πίνακα.

Διάστημα	Μονοτονία f'	Πρόσημο f''	Κυρτότητα f
$(-\infty, 0]$			
$[0, 0.5]$			
$[0.5, 1]$			
$[1, 2]$			
$[2, +\infty)$			

7. Προεραϊκή δραστηριότητα:

Επίλεξε το κουμπί «Συνάρτηση 5» και μεταβάλλοντας τη θέση του A παρατήρησε τι συμβαίνει στη θέση $x_0 = 3$ (κατακόρυφη εφαπτομένη).

(Αλλάζοντας τις τιμές του δρομέα «c», σχηματίζεις μία ασυνεχή συνάρτηση.

Επίλεξε στην αρχή $c = 1$ και μετά μία άλλη τιμή για το c).

Ποια είναι τα διαστήματα κυρτότητας της f ;

Η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 3]$ και κοίλη στο $[3, +\infty)$ για $c = 1$ ενώ

είναι κυρτή στο $(-\infty, 3]$ και κοίλη στο $(3, +\infty)$ για $c \neq 1$.

Με βάση τις παρατηρήσεις σου, απάντησε στα ακόλουθα ερωτήματα:

Αν μία συνάρτηση f αλλάζει κυρτότητα στα διαστήματα (α, x_0) και $[x_0, \beta)$, τότε είναι βέβαιο ότι το σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμψής της f ;

Όχι. Δες τη συνάρτηση 3 στο $x_0 = 1$. Πρέπει στο x_0 να υπάρχει εφαπτομένη.

Αν μία συνάρτηση είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ , τότε είναι βέβαιο ότι $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ;

Αντίστοιχα, αν μία συνάρτηση είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ , τότε είναι βέβαιο ότι $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ;

Όχι. Δες την συνάρτηση² η οποία είναι κοίλη αλλά $f''(0) = f''(1) = 0$.

Αν μία συνάρτηση f παρουσιάζει στο x_0 σημείο καμπής, τότε είναι βέβαιο ότι $f''(x_0) = 0$;
Όχι. Δες τη συνάρτηση⁴ στο $x_0 = 1$. Πρέπει η f να είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0 .