Probabilidad total y Teorema de Bayes

CURSO	TEMA	WWW.DANIPARTAL.NET
1ºBach CCSS	PROBABILIDAD	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

EL CONCEPTO DE PROBABILIDAD TOTAL YA LO HEMOS UTILIZADO EN EJERCICIOS ANTERIORES… SIN SABERLO

El Teorema de Probabilidad Total ya lo hemos utilizado... ¡y nosotros sin saberlo!

¿Recuerdas el problema de los tres sastres, sobre probabilidad condicionada? Calculamos la probabilidad de que un cliente no estuviera satisfecho con el arreglo del traje.

Había tres sastres: A, B y C. Por lo que la probabilidad de no quedar satisfecho se calculaba sumando la probabilidad de no quedar satisfecho con cada uno de los sastres.

El suceso "ser atendido por A" es incompatible con los sucesos "ser atendido por B" o "ser atendido por C". Son tres sucesos incompatibles entre sí, ya que no tienen elementos en común: un cliente atendido por el sastre A, solo es atendido por A; no es atendido por B ni por C. Y así podemos razonar con cada sastre.

Por lo tanto, siempre, siempre, **siempre que tengamos sucesos** $A_1, A_2, \dots, A_n$ **incompatibles entre sí dos a dos, todos ellos con probabilidad no nula, y además la unión de todos los sucesos de lugar a todo el espacio muestral:**

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$$

Podemos calcular la probabilidad de que ocurra un suceso B **a partir de las probabilidades condicionadas:**

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

Este es el **Teorema de la Probabilidad Total**. En los ejercicios podemos usarlo, demostrando siempre que se cumplen las condiciones previas que indica el teorema. O bien podemos razonar, como hicimos en su momento con el ejercicio de los sastres, a partir de las probabilidades condicionadas. De ambas formas es correcto.

Una cuestión final de **nomenclatura**: si todos los sucesos son incompatibles dos a dos y la unión de todos los sucesos genera el espacio muestral, se dice que los sucesos forman un **sistema completo de sucesos incompatibles dos a dos**.

EJERCICIO 1 (SOBRE TEOREMA DE PROBABILIDAD TOTAL)

La probabilidad de que un ciclista gane una carrera en un día lluvioso es 0,08 y la de que gane en un día seco es 0,30. Si la probabilidad de que el día de la carrera sea lluvioso es 0,25, ¿cuál será la probabilidad de que el ciclista gane?

Forma 1 de resolverlo: con Teorema de Probabilidad Total

Para ganar pueden darse dos circunstancias: que llueva y gane, o bien que sea día seco y gane. "Llover" y "seco" son dos sucesos opuestos. Si llueve no está seco. Y si está seco, no llueve.

La unión de los **días lluviosos y secos forman todo el espacio muestral de los días en que se celebra la carrera**: día lluvioso y día seco son incompatibles entre sí (no tienen elementos en común).

P(lluvia) = 0,25

P(seco) = 1 – 0,25 = 0,75

Ambas probabilidades son no nulas.

Con esto hemos demostrado que **se cumplen todas las condiciones del Teorema de Probabilidad Total**, por lo que podemos utilizar las probabilidades condicionadas del enunciado para obtener la probabilidad total de ganar:

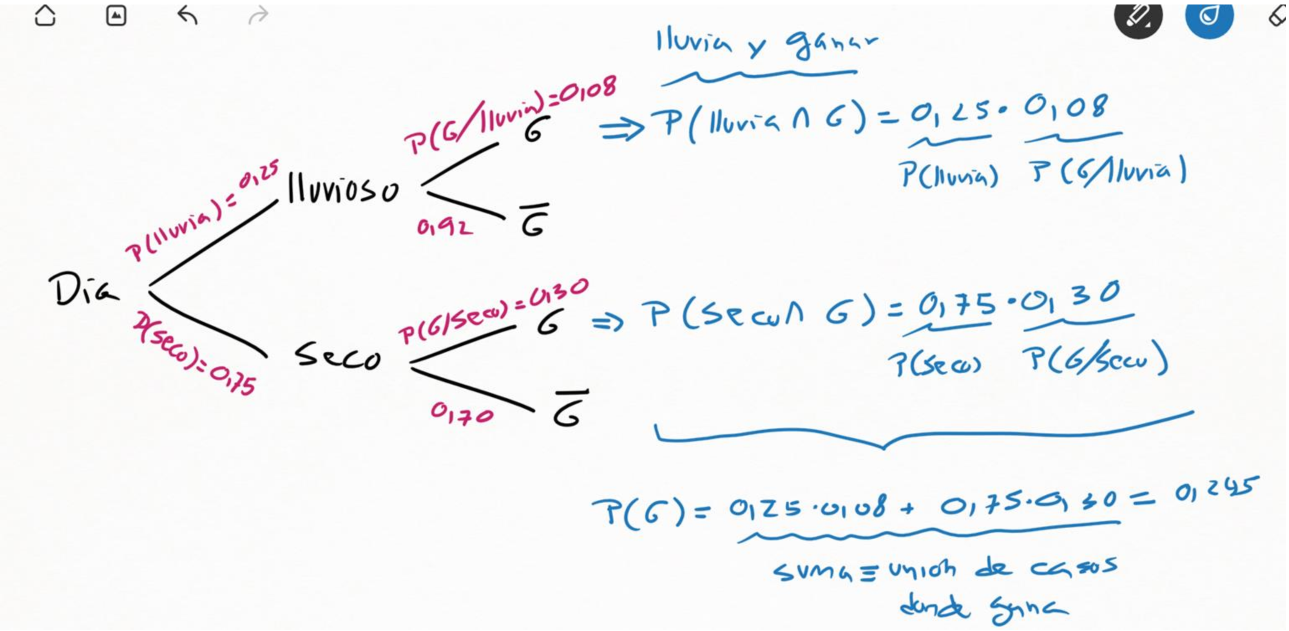
$P(ganar) = P(lluvia) \cdot P(ganar/lluvia) + P(seco) \cdot P(ganar/seco)$

$P(ganar) = 0{,}25 \cdot 0{,}08 + 0{,}75 \cdot 0{,}30 = 0{,}245$

Forma 2 de resolverlo: con probabilidad condicionada y diagrama de árbol

Como el enunciado da las probabilidades condicionadas es muy práctico usar un diagrama de árbol. Si el enunciado diese la probabilidad de las intersecciones, sería más cómodo hacer la tabla de contingencia.

No olvides que siempre puedes pasar de árbol a tabla y de tabla a árbol usando la relación de sucesos dependientes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$).



La probabilidad total de ganar será la suma de las ramas que terminan en el suceso ganar (G). Es decir:

$P(ganar) = P(lluvia\ \cap\ ganar) + P(seco\ \cap\ ganar) =\ 0{,}25 \cdot 0{,}08 + 0{,}75 \cdot 0{,}3 = 0{,}245$

Como ves, no es necesario usar el Teorema de probabilidad total para resolver este tipo de ejercicios.

TEOREMA DE BAYES

Supongamos que sabemos la probabilidad de que un enfermo de hepatitis (H) esté amarillo (A). Es decir, conocemos la probabilidad condicionada P(A/H) que significa lo siguiente: si sabemos seguro que el enfermo tiene hepatitis, qué probabilidad hay de que se ponga amarillo.

Hasta aquí, nada nuevo bajo el sol. Llevamos ya varios ejercicios resueltos con el concepto de probabilidad condicionada.

Pero, sabiendo P(A/H) ¿podemos saber cuánto vale P(H/A)? Es decir, si sabemos seguro que el paciente está amarillo, ¿cuál es la probabilidad de que padezca hepatitis?

Son dos cosas distintas. Aquí está la clave. Debemos comprender esta diferencia.

En P(A/H) el enfermo seguro tiene hepatitis. Y queremos saber con qué probabilidad se pondrá amarillo.

En P(H/A) el enfermo seguro está amarillo. Y queremos saber con qué probabilidad tendrá hepatitis.

La relación entre ambas probabilidades condicionadas nos lo da el **Teorema de Bayes**:

Sean $A_1, A_2, ..., A_n$ **un sistema completo de sucesos incompatibles dos a dos, con probabilidades no nulas. Sea B otro suceso del que conocemos las probabilidades condicionadas** $P(B/A_1), P(B/A_2), ..., P(B/A_n)$**. Se cumple:**

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + ... + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}$$

Donde en el denominador P(B) hemos aplicado el Teorema de Probabilidad Total.

Todos **los ejercicios que se resuelven con el Teorema de Bayes se pueden seguir resolviendo con un diagrama de árbol** y con el concepto de probabilidad condicionada. Con el Teorema de Bayes se ahorra tiempo a la hora de operar y obtener el resultado final. Pero insisto, con un diagrama de árbol se puede también resolver estos problemas.

EJERCICIO 2 (SOBRE TEOREMA DE BAYES)

Una librería tiene tres estanterías: superior, central e inferior.

En la estantería superior hay 3 novelas y 7 cuentos.

En la estantería central hay 8 novelas y 6 cuentos.

En la estantería inferior hay 5 novelas y 9 cuentos.

Se escoge un estante al azar y se saca de él un libro. Si resulta que es una novela, ¿cuál es la probabilidad de que se haya sacado del estante central?

Forma 1: con el Teorema de Bayes

Los sucesos estantería Superior (S), Central (C) e Inferior (I) son incompatibles dos a dos. No tienen elementos en común. Todos albergan al menos una novela, por lo que la probabilidad asociada a cada estantería es no nula. La unión de las tres estanterías genera todas las novelas existentes.

Por lo tanto, estamos ante un sistema completo de sucesos incompatibles dos a dos. Podemos aplicar, en consecuencia, el Teorema de Bayes.

$$P(C/N) = \frac{P(C) \cdot P(N/C)}{P(S) \cdot P(N/S) + P(C) \cdot P(N/C) + P(I) \cdot P(N/I)}$$

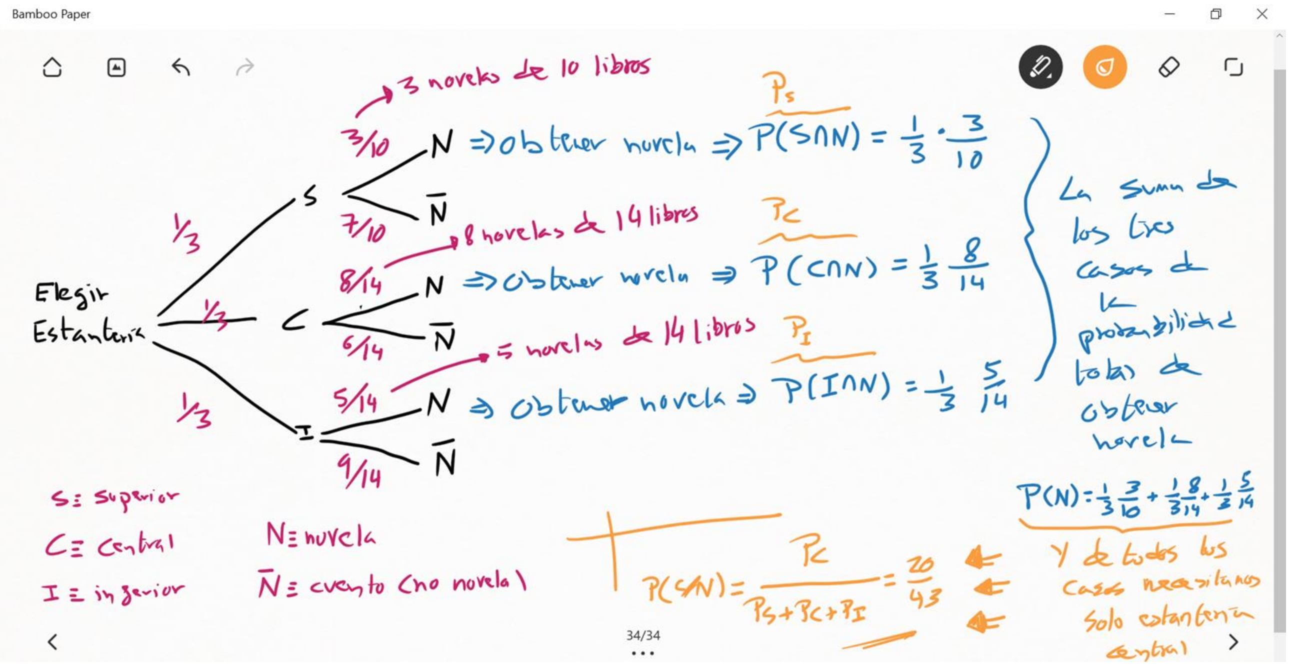
- P(C/N): probabilidad buscada. Sabiendo que es una novela (N), ¿qué probabilidad hay de que venga de la estantería central (C)?
- P(S) = P(C) = P(I) = 1/3 → Probabilidad de elegir cada estantería (equiprobables).
- P(N/S) = 3/10 → En la estantería superior hay 10 libros, de los cuales 3 son novelas.
- P(N/C) = 8/14 = 4/7 → En la estantería central hay 14 libros, de los cuales 8 son novelas.
- P(N/I) = 5/14 → En la estantería inferior hay 14 libros, de los cuales 5 son novelas.

$$P(C/N) = \frac{1/3 \cdot 4/7}{1/3 \cdot 3/10 + 1/3 \cdot 4/7 + 1/3 \cdot 5/14} = 20/43$$

Forma 2: usando diagrama de árbol y dividir el caso favorable entre todos los casos factibles

La novela puede venir de la estantería Superior, Central o Inferior. Por lo que la probabilidad condicional que buscamos es la probabilidad de que venga de la estantería central dividido por la suma de las tres probabilidades de las tres estanterías.

El siguiente diagrama de árbol muestra todos los cálculos.



La probabilidad total de obtener una novela será la suma de las probabilidades de obtener la novela de cada una de las estanterías: $P(S \cap N) + P(C \cap N) + P(I \cap N)$.

De esas tres opciones, debemos elegir solo la probabilidad asociada a que la novela pertenezca a la estantería central: $P(C \cap N)$.

Por lo tanto, la probabilidad de escoger una obra de la estantería central y que seguro sea novela será:

$$P(C/N) = \frac{P(C \cap N)}{P(S \cap N) + P(C \cap N) + P(I \cap N)} = 20/43$$

Una vez más, el diagrama de árbol permite resolver el ejercicio sin tener que recurrir al Teorema de Bayes. ¡Viva el diagrama de árbol!