Posloupnosti

Důkazy VPN matematickou indukcí

Příklady Růžovej Polák

$\boxed{\textbf{Příklad 1.}}$ **PORŮŽ 16/19 a)**: Posloupnost je dána rekurentně takto:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 1; \\ a_{n+1} &= -3a_n;\ n \in N \end{aligned}\right\} \text{(RVP)}$$

a) Uhádni vzorec pro n-tý člen.
b) Dokaž svou hypotézu pomocí matematické indukce.

Řešení:
Vypíšu si prvních pár členů:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 = (-3)^0 \\ a_2 &= -3 = (-3)^1 \\ a_3 &= 9 = (-3)^2 \\ a_4 &= -27 = (-3)^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\text{Uhádneme: } a_n = (-3)^{n-1}$$

a) Hypotéza:

$$\forall n \in N : a_n = (-3)^{n-1}$$

b) Důkaz hypotézy:
1) $\underline{n = 1}$:

$$a_1 = (-3)^0 = 1 \rightarrow \text{OK.}$$

2) Indukční krok:

$$\forall k \in N : \underbrace{a_k = (-3)^{k-1}}_{A} \Rightarrow \underbrace{\underbrace{a_{k+1}}_{L} = \underbrace{(-3)^k}_{P}}_{B}$$

důkaz IK: $L = a_{k+1} \stackrel{\text{RVP}}{=} (-3) \cdot a_k \stackrel{A}{=} (-3) \cdot (-3)^{k-1} = (-3)^k = P \quad \square$

$\boxed{\textbf{Příklad 2.}}$ **PORŮŽ 14/18 d)**: Posloupnost je dána rekurentně takto:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= a_n + 2n + 1;\ n \in N \end{aligned}$$

a) Uhádni vzorec pro n-tý člen.
b) Dokaž svou hypotézu pomocí matematické indukce.

$$a_n = n^2;\ n \in N$$

Řešení:
Vypíšu si PRPÁČ:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 = 1^2 \\ a_2 &= 4 = 2^2 \\ a_3 &= 9 = 3^2 \\ a_4 &= 16 = 4^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\text{Uhádneme: } a_n = n^2$$

a) Hypotéza:

$$\forall n \in N : a_n = n^2$$

b) Důkaz hypotézy:
1) $\underline{n = 1}$:

$$a_1 = 1^2 = 1 \rightarrow \text{OK}$$

2) <u>Indukční krok</u>:

$$\begin{aligned} \forall k \in N : a_k = k^2 \Rightarrow a_{k+1} &= (k+1)^2 \\ \text{důkaz IK: } L = a_{k+1} &= a_k + 2k + 1 \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k+1)^2 = P \quad \square \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Příklad 3.}}$ **PORŮŽ 14/18 a)**: Posloupnost je dána rekurentně takto:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= 2a_n \end{aligned}$$

a) Uhádni vzorec pro n-tý člen.
b) Dokaž svou hypotézu pomocí matematické indukce.

Řešení:
Vypíšu si PRPÁČ:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 = 2^0 \\
a_2 &= 2 = 2^1 \\
a_3 &= 4 = 2^2 \\
a_4 &= 8 = 2^3 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$\text{Uhádneme: } a_n = 2^{n-1}$$

a) Hypotéza:

$$\forall n \in N : a_n = 2^{n-1}$$

b) Důkaz hypotézy:
1) $\underline{n = 1}$:

$$a_1 = 2^{1-1} = 2^0 = 1 \rightarrow \text{OK}$$

2) Indukční krok:

$$\forall k \in N : a_k = 2^{k-1} \Rightarrow a_{k+1} = 2^k$$

$$L = a_{k+1} = 2a_k = 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k = P \quad \square$$

$\boxed{\textbf{Příklad 4.}}$ **PORŮŽ 16/19 b)**: Posloupnost je dána rekurentně takto:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 5 \\
a_{n+1} &= 2a_n - 1; \; n \in N
\end{aligned}
$$

a) Uhádni vzorec pro n-tý člen.
b) Dokaž svou hypotézu pomocí matematické indukce.

Řešení:

Vypíšu si PRPÁČ:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 5 = 4 + 1 = 2^2 + 1\\
a_2 &= 9 = 8 + 1 = 2^3 + 1\\
a_3 &= 17 = 16 + 1 = 2^4 + 1\\
a_4 &= 33 = 32 + 1 = 2^5 + 1\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\text{Uhádneme: } a_n = 2^{n+1} + 1$$

a) Hypotéza:

$$\forall n \in N : a_n = 2^{n+1} + 1$$

b) Důkaz hypotézy:

1) $\underline{n = 1}$

$$a_1 = 2^2 + 1 = 5 \to \text{OK.}$$

2) <u>Indukční krok</u>:

$$\begin{aligned}
\forall k \in N : a_k = 2^{k+1} + 1 \Rightarrow a_{k+1} &= 2^{k+2} + 1\\
L = a_{k+1} &= 2a_k - 1\\
&= 2 \cdot (2^{k+1} + 1) - 1\\
&= 2 \cdot 2^{k+1} + 2 - 1\\
&= 2^{k+2} + 1 = P \quad \square
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Příklad 5.}}$ **PORŮŽ 16/19 c)**: Posloupnost je dána rekurentně takto:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 9\\
a_{n+1} &= 2(n+1)a_n;\ n \in N
\end{aligned}$$

a) Uhádni vzorec pro n-tý člen.
b) Dokaž svou hypotézu pomocí matematické indukce.

Řešení:

Vypíšu si PRPÁČ:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 9 = 9\cdot 2^0\cdot 1\\
a_2 &= 2\cdot \underline{2}\cdot 9 = 9\cdot 2^1\cdot 2\cdot 1\\
a_3 &= 2\cdot \underline{3}\cdot 2\cdot \underline{2}\cdot 9 = 9\cdot 2^2\cdot 3\cdot 2\cdot 1\\
a_4 &= 2\cdot \underline{4}\cdot 2\cdot \underline{3}\cdot 2\cdot \underline{2}\cdot 9 = 9\cdot 2^3\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\\
a_5 &= 2\cdot \underline{5}\cdot 2\cdot \underline{4}\cdot 2\cdot \underline{3}\cdot 2\cdot \underline{2}\cdot 9 = 9\cdot 2^4\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\text{Uhádneme: } a_n = 9\cdot 2^{n-1}\cdot \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\dots 3\cdot 2\cdot 1}_{\text{označujeme jako } n! \text{ a čteme „n-faktoriál“}}$$

a) Hypotéza:

$$\forall n\in N : a_n = 9\cdot n!\cdot 2^{n-1}$$

b) Důkaz hypotézy:

1) $\underline{n=1}$:

$$a_1 = 9\cdot 1!\cdot 2^0 = 9 \to \text{OK.}$$

2) Indukční krok:

$$\begin{aligned}
\forall k\in N : a_k = 9\cdot k!\cdot 2^{k-1} \Rightarrow a_{k+1} &= 9\cdot (k+1)!\cdot 2^k\\
L = a_{k+1} &= 2(k+1)a_k\\
&= 2(k+1)\cdot 9\cdot k!\cdot 2^{k-1}\\
&= 9(k+1)k!\cdot 2\cdot 2^{k-1}\\
&= 9(k+1)!\cdot 2^k = P \quad \square
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Příklad 6.}}$ **PORŮŽ 16/19 d)**: Posloupnost je dána rekurentně takto:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 9\\
a_{n+1} &= \frac{a_n}{2(n+2)};\ n\in N
\end{aligned}$$

a) Uhádni vzorec pro n-tý člen.
b) Dokaž svou hypotézu pomocí matematické indukce.

Řešení:
Vypíšu si PRPÁČ a postupem podobným jako v příkladě 5 vytvořím hypotézu:
a) Hypotéza:

$$\forall n\in N : a_n = \frac{9}{(n+1)!\cdot 2^{n-2}}$$

b) Důkaz hypotézy:
1) <u>$n = 1$</u>:

$$a_1 = \frac{9}{2! \cdot 2^{-1}} = 9 \to \text{OK.}$$

2) <u>Indukční krok</u>:

$$\forall k \in N : a_k = \frac{9}{(k+1)! \cdot 2^{k-2}} \Rightarrow a_{k+1} = \frac{9}{(k+2)! \cdot 2^{k-1}}$$

$$\begin{aligned} L = a_{k+1} &= \frac{a_k}{2(k+2)} \\ &= \frac{\frac{9}{(k+1)! \cdot 2^{k-2}}}{2(k+2)} \\ &= \frac{9}{(k+2)(k+1)! \cdot 2 \cdot 2^{k-2}} \\ &= \frac{9}{(k+2)! \cdot 2^{k-1}} = P \quad \square \end{aligned}$$

Příklad 7. **PORŮŽ 14/18 b)**: Posloupnost je dána rekurentně takto:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_{n+1} &= 2 - a_n \end{aligned}$$

a) Uhádni vzorec pro n-tý člen.
b) Dokaž svou hypotézu pomocí matematické indukce.

Řešení:
Vypíšu si PRPÁČ:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 = 1 - 1 \\ a_2 &= 2 = 1 + 1 \\ a_3 &= 0 = 1 - 1 \\ a_4 &= 2 = 1 + 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\text{Uhádneme: } a_n = 1 + (-1)^n$$

a) Hypotéza:

$$\forall n \in N : a_n = 1 + (-1)^n$$

b) Důkaz hypotézy:

1) $\underline{n = 1}$:

$$a_1 = 1 - 1 = 0 \to \text{OK}$$

2) Indukční krok:

$$\forall k \in N : a_k = 1 + (-1)^k \Rightarrow a_{k+1} = 1 + (-1)^{k+1}$$

$$\begin{aligned} L = a_{k+1} &= 2 - a_k \\ &= 2 - \left[1 + (-1)^k\right] \\ &= 2 - 1 - (-1)^k \\ &= 1 - (-1)^k \\ &= 1 + (-1) \cdot (-1)^k \\ &= 1 + (-1)^{k+1} = P \quad \square \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Příklad 8.}}$ **PORŮŽ 14/18 c)**: Dokažte, že posloupnost daná rekurentně takto:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_{n+1} &= 3a_n - 1;\ n \in N \end{aligned}$$

má vzorec pro n-tý člen:

$$a_n = \frac{3^n + 1}{2};\ n \in N$$

Řešení:

1) $\underline{n = 1}$:

$$a_1 = \frac{3 + 1}{2} = 2 \to \text{OK}$$

2) Indukční krok:

$$\forall k \in N : a_k = \frac{3^k + 1}{2} \Rightarrow a_{k+1} = \frac{3^{k+1} + 1}{2}$$

$$
\begin{aligned}
L = a_{k+1} &= 3a_k - 1 \\
&= 3 \cdot \frac{3^k + 1}{2} - 1 \\
&= \frac{3 \cdot 3^k + 3}{2} - 1 \\
&= \frac{3^{k+1} + 3 - 2}{2} \\
&= \frac{3^{k+1} + 1}{2} = P \quad \square
\end{aligned}
$$

$\boxed{\textbf{Příklad 9.}}$ **PORŮŽ 14/18 e)**: Posloupnost je dána rekurentně takto:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2} \\
a_{n+1} &= \frac{n}{n+2} \cdot a_n; \; n \in N
\end{aligned}
$$

a) Uhádni vzorec pro n-tý člen.
b) Dokaž svou hypotézu pomocí matematické indukce.

Řešení:
Vypíšu si PRPÁČ:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2} \\
a_2 &= \frac{1}{6} = \frac{1}{2 \cdot 3} \\
a_3 &= \frac{1}{12} = \frac{1}{3 \cdot 4} \\
a_4 &= \frac{1}{20} = \frac{1}{4 \cdot 5} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$
\text{Uhádneme: } a_n = \frac{1}{n(n+1)}
$$

a) Hypotéza:

$$
\forall n \in N : a_n = \frac{1}{n(n+1)}
$$

b) Důkaz hypotézy:
1) $\underline{n = 1}$:

$$
a_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{OK}
$$

2) Indukční krok:

$$\forall k \in N : a_k = \frac{1}{k(k+1)} \Rightarrow a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\begin{aligned} L = a_{k+1} &= \frac{k}{k+2} \cdot a_k \\ &= \frac{\cancel{k}}{k+2} \cdot \frac{1}{\cancel{k}(k+1)} \\ &= \frac{1}{(k+1)(k+2)} = P \quad \square \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Příklad 10.}}$ **PORŮŽ 16/20 a)**: Posloupnost je dána rekurentně takto:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= \sqrt{a_n^2 + 1};\ n \in N \end{aligned}$$

a) Uhádni vzorec pro n-tý člen.
b) Dokaž svou hypotézu pomocí matematické indukce.

Řešení:
Vypíšu si PRPÁČ:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 = \sqrt{1} \\ a_2 &= \sqrt{2} \\ a_3 &= \sqrt{3} \\ a_4 &= \sqrt{4} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\text{Uhádneme: } a_n = \sqrt{n}$$

a) Hypotéza:

$$\forall n \in N : a_n = \sqrt{n}$$

b) Důkaz hypotézy:
1) $n = 1$:

$$a_1 = \sqrt{1} = 1 \rightarrow \text{OK}$$

2) Indukční krok:

$$\forall k \in N : a_k = \sqrt{k} \Rightarrow a_{k+1} = \sqrt{k+1}$$

$$\begin{aligned} L = a_{k+1} &= \sqrt{a_k^2 + 1} \\ &= \sqrt{(\sqrt{k})^2 + 1} \\ &= \sqrt{k+1} = P \quad \square \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Příklad 11.}}$ **PORŮŽ 16/20 b)**: Posloupnost je dána rekurentně takto:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= \sqrt{2a_n^2 + 1};\ n \in N \end{aligned}$$

a) Uhádni vzorec pro n-tý člen.
b) Dokaž svou hypotézu pomocí matematické indukce.

Řešení:
Vypíšu si PRPÁČ:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 = \sqrt{2^1 - 1} \\ a_2 &= \sqrt{3} = \sqrt{2^2 - 1} \\ a_3 &= \sqrt{7} = \sqrt{2^3 - 1} \\ a_4 &= \sqrt{15} = \sqrt{2^4 - 1} \\ a_5 &= \sqrt{31} = \sqrt{2^5 - 1} \\ a_6 &= \sqrt{63} = \sqrt{2^6 - 1} \\ &\vdots \\ \text{Uhádneme: } a_n &= \sqrt{2^n - 1} \end{aligned}$$

a) Hypotéza:

$$\forall n \in N : a_n = \sqrt{2^n - 1}$$

b) Důkaz hypotézy:
1) $\underline{n = 1}$:

$$a_1 = \sqrt{2 - 1} = 1 \rightarrow \text{OK}$$

2) <u>Indukční krok</u>:

$$\forall k \in N : a_k = \sqrt{2^k - 1} \Rightarrow a_{k+1} = \sqrt{2^{k+1} - 1}$$

$$
\begin{aligned}
L = a_{k+1} &= \sqrt{2a_k^2 + 1} \\
&= \sqrt{2\left(\sqrt{2^k - 1}\right)^2 + 1} \\
&= \sqrt{2\left(2^k - 1\right) + 1} \\
&= \sqrt{2^{k+1} - 1} = P \quad \square
\end{aligned}
$$