數裡尋她 –「雉兔同籠」

趙詠敏
香港教育學院 小學教育榮譽學士課程
關樹培
香港教育學院 數學與資訊科技學系

1. 摘要

我們是香港教育學院小學教育榮譽學士課程的師生。為培育小學教師而設的課程，主修數學的同學，於四年裡修讀的除了兩個小學數學教學法的單元外，其餘的是「科技輔助探究」、「數學發展史」、「基礎數論」、「綫性代數」等傾向純數學的單元。無論作為教或學的都會遇上過類似的疑問：「這些艱深的知識會傳授給小學生嗎? 為甚麼小學數學老師需要學習這些高深的數學知識?」

本年度我們一起參與院內舉辦的「師徒計劃」，於學年初訂下了一些目標，其中的就是一起研習《孫子算經》內家傳戶曉的「雉兔同籠」數題，並於實習期間在教室裡嘗試落實。

本文分享我們這幾個月的研習過程與教學實踐的一點心得，其中的苦與樂，及反思數學教師的專業發展。

2. 「百雞問題」的故事

著名的「張老老賣雞」數學故事，是這樣收錄在許純舫的《古算趣味》裡(許純舫, 1981, 頁 1-3) — 「南北朝的時候，京城有一個賣雞的張老老。他有一個兒子，雖出身貧家，但天資聰穎，勤學不怠。到十二、三歲時，博覽群書，尤其喜愛數學，像《九章算經》、《孫子算經》、《周髀算經》等無不精通。當時老丞相愛才若渴，聽見別人談到張老老兒子的聰敏，心中就想了一個方法去試探他。他打聽張老老賣雞的價錢，得知「公雞每隻賣五文，母雞每隻賣三文，小雞每三隻賣一文」。於是老丞相要張老老用一百文錢將三種雞配成一百隻雞，不多不少，第二天送到老丞相府。」

學習過代數的我們，很自然的應對方法是運用「方程」得出如下結果。

設公雞 x 隻，母雞 y 隻，小雞 z 隻 ，其中 $x, y, z \in \mathrm{Z}^+$(正整數集)。

得 $$x + y + z = 100 \quad \ldots (1)$$

$$5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100 \quad \ldots (2)$$

但是這三元一次方程組，未知數的量比方程的多，不能夠直接求得解答。唯一可以肯定的是小雞的數量必定是 3 的倍數。那麼故事如何發展下去呢?

「張老老不敢違命，不斷嘗試，也無法解答。兒子得知，就仔細研究問題，果然找到答案。他告知父親把「公雞四雞、母雞十八隻、小雞七十八隻」送去相府。老丞相一算，共有一百隻雞值一百文錢。怎料老丞相再拿出一百文錢，叫張老老再送一百隻雞，不過三種雞的隻數要換另一種組合方法。第二天，兒子再告知父親把

「公雞八雞、母雞十一隻、小雞八十一隻」送去相府。老丞相一算，也是有一百隻雞值一百文錢，心裡高興。這一趟老丞相又重施故技，叫張老老再送一百隻雞，不過三種雞的隻數要與之前兩次的組合不同。如是者，兒子再告知父親把「公雞十二隻、母雞四隻、小雞八十四隻」送去相府。老丞相一算，也是有一百隻雞值一百文錢，連忙問張老老是誰人配成的。張老老依實說了，老丞相立刻召張老老的兒子來，授他官職。」故事的小主人翁就是張丘建。而這道題載錄於《張丘建算經》(張丘建, 1980)卷下裡，後世稱之為「百雞問題」，是全書最後的第 38 題。算經內指出，每次多買 4 隻公雞和 3 隻小雞時，就會少買 7 隻母雞，剛巧雞的數量與價錢不變，相反也是如此。而「四、七、三」於古算書裡稱為增減率。

讓我們也效法用增減率思考問題。由於三種雞的價錢各有高低，用最貴的公雞和最便宜的小雞來換中等價的母雞，是保持數量與價值不變的方法。

若公雞每次增減 p 隻、母雞增減 q 隻、小雞增減 r 隻 。其中 p, q, r 均為正整數。

則 $$p + r = q \qquad \text{... (4)}$$

$$5p + \frac{1}{3}r = 3q \qquad \text{… (5)}$$

解(4)&(5)求得增減率 $p : q : r = 4 : 7 : 3$

求得增減率，仍需要找出一組 (x, y, z) 的「初始值」，才可以求得「百雞問題」的解答。而最自然的假設就是沒有公雞，即 $x = 0$ 的情況。將 $x = 0$ 代入(1)&(2)，

得 $$y + z = 100 \qquad \text{… (9)}$$

$$3y + \frac{1}{3}z = 100 \qquad \text{… (10)}$$

(10) $\times 3$ $$9y + z = 300 \qquad \text{… (11)}$$

從(9)&(11)獲得公雞 0 隻，母雞 25 隻，小雞 75 隻。然後運用增減率求解。

	公雞(x)	母雞(y)	小雞(z)	
初始值	0	25	75	不合
第一組	0 + 4 = 4	25 – 7 = 18	75 + 3 = 78	解答一
第二組	8	11	81	解答二
第三組	12	4	84	解答三
第四組	16	-3	87	不合

以上的答案與「百雞問題」故事內的解是一致的。

3. 從「百雞問題」到「雉兔同籠」

細心觀察(9)&(10)可見他們是聯立二元一次方程，與家傳戶曉的「雉(野雞)兔同籠」是同出一轍的。「雉兔同籠」載於《孫子算經》(李諄風, 1980)卷下第 31 題。

問題: 「今有雉兔同籠，上有三十五頭，下有九十四足。問雉兔各幾何?」

解法: 「上置頭，下置足，半其足，以頭除足，以足除頭，即得。」

用現今的表達方式詮釋:

設 x 為雞的數量，y 為兔的數量。

$$
\begin{array}{lrll}
 & x + y & = 35 & \dots (12) \quad [上置頭] \\
 & 2x + 4y & = 94 & \dots (13) \quad [下置足] \\
(13) \div 2: & x + 2y & = 47 & \dots (14) \quad [半其足] \\
(14) - (12): & y & = 12 & \dots (15) \quad [以頭除(減去)足] \\
(12) - (15): & x & = 23 & \quad\quad\quad\quad [以足除頭]
\end{array}
$$

所以雞有 23 隻，兔有 12 隻。

若以「雉兔同籠」的處境，為(9)&(11)擬成數題，即:「怪雞有一頭九腳，怪兔有一頭一腳。怪雞和怪兔共處一籠。上有 100 頭，下有 300 足。問(怪)雉兔各幾何?」大概是張邱建掌握好「雉兔同籠」的解法，把這方法轉移到「百雞問題」上罷！

4. 從「雉兔同籠」伸延至「七禽八獸」

「雉兔同籠」衹是聯立二元一次方程

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

的其中特殊例子($a_1 = b_1 = 1$)，究竟《孫子算經》有沒有處理一般的聯立二元一次方程呢?翻查算經，我們不難找到卷下第 27 題是一道別具創意的「七禽八獸」數題。

問題: 「今有獸六首四足，禽四首二足。上有七十六首，下有四十六足。問禽、獸各幾何?」

解法: 設禽有 x 隻，獸有 y 隻

則 $4x + 6y = 76 \quad \dots (16)$

$2x + 4y = 46 \quad \dots (17)$

再令 $p = 4x$(四合一)，$q = 6y$(六合一)，我們便可將(16)&(17)轉換成:

$$p + q = 76$$
$$3p + 4q = 276$$

於是我們又可以運用「雉兔同籠」的思維方式求解了。

翻閱有關「雉兔同籠」典籍的時候，我們發現各式各樣解題思維方式(許純舫, 1981, 頁 3-12)。其中「野鴨獨立、兔子舉手」(郁祖權, 2007, 頁 160)不但幫助我們惦記這些方法，更是趣味盈然的巧解，而這些既具體又形象化的算術方法，大部份都建基於解聯立方程的「代入法」和「消元法」的原理之上，鮮有的是清楚說明兩者的關聯(關樹培, 2000, 頁 11-13)。更罕有的是談及她是綫性方程組:

$$
\begin{aligned}
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

的特殊情況($m = n = 2$)。

5. 方程的歷史

原來我國的《九章算經》對解綫性方程組已有詳盡的描述(李繼閔, 1992, 頁

207-234)。所謂方程；「方」指數據左右並排，其形方正；「程」指考察相關數據構成的比率關係。劉徽說:「程，課程也。羣物總雜，各列有數，總言其實，令每行為率。二物者再程，三物者三程，皆如物數程之，併列為行，古謂之方程。」指的是現今的方程組，意思是，按類別一行一行地列出來，有幾個未知數就排上幾列，是可按比例擴大縮小，對方程組的解沒有影響(郁祖權, 2007, 頁 161-164)。

古時的方程組以分離係數法表示，每一行自上而下排列，不必寫出未知數名稱，常數項放在最下。跟現今的表達方法原則大致相同，唯一的分別是古時從右至左、橫列豎行，現今是從左至右、橫行豎列。

現以「雉兔同籠」為例，展示古今的表達方式如后。

聯立二元一次方程

$$\begin{aligned} x + y &= 35 \\ 2x + 4y &= 94 \end{aligned}$$

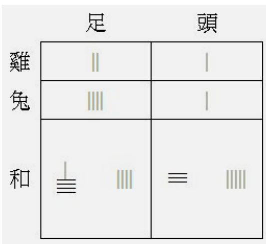
綫性代數

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 94 \end{bmatrix}$$

古代算籌的行列

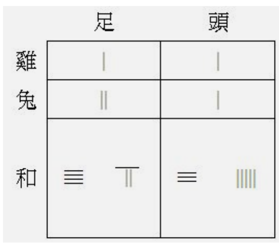
而《九章算經》裡的「直除法消元」和「互乘相消法」等數學理論與西方的「高斯消除法」是殊途同歸的。明瞭這一點，我們再以解方程組的方法詮釋《孫子算經》，這樣一來，「以頭除足，以足除頭，即得。」的原意便躍然紙上。

1. 上置頭，下置足



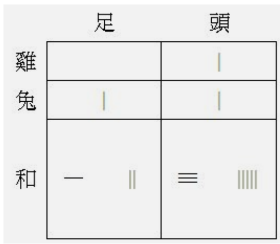
(13) (12)

2. 半其足



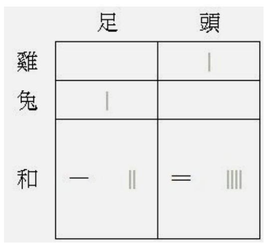
(13)÷2=(14) (12)

3. 以頭除足



(14)-(12)=(15) (12)

4. 以足除頭



(15) (12)-(15)

6. 「雉兔同籠」與數學課程

走過「雉兔同籠」的歷史巡禮，讓我們來看這道數學味道濃厚的問題於兩岸三地的中小學課程內佔一席怎樣的位置。查閱教本，香港只有少數中學教科書於教授聯立二元一次方程時會輕輕提及，反觀台灣和國內的教本選擇綜合「雉兔問題」算史及其解答作為教材的卻比比皆是。

如果我們有意在小學校本課程裡加插「雉兔問題」，康軒文教的《國小數學學習手冊六下》有一題為「怎樣解題」的章節，內容藉「雉兔問題」的討論培育學生的圖解能力，是尚佳的參考資料。

「雉兔問題」於螺旋式課程裡如何發揮教學功能呢?下面是王麗燕於初小至初中的實踐經驗分享。

初小	「雞兔關在同一個籠子裡,共有10個頭,28條腿,籠裡有幾隻雞? 幾隻兔?」 利用繪圖方法解答: 我們用○表示頭，用 ‖ 表示腳。假設這10隻全部是雞:  從圖中可以看出，10隻雞有20條腿， 而條件中說"共有28條腿"，顯然少了$28-20=8$條腿。 這樣在四隻雞上加兩條腿，把它們變成兔子即可。 
中小	利用繪圖方法結合算式解答: 假設 10 隻全是雞，則共有 $10 \times 2 = 20$ 條腿， 與已知條件相差 $28-20 = 8$ 條腿； 把一隻雞變成一隻兔要加上兩條腿，8 裡面有 4 個 2， 用算式表示: $8 \div 2 = 4$ (隻)， 4 條腿的兔有 4 隻，其餘的是雞: $10-4 = 6$(隻)。
高小	建立方程解答: 設雞有x隻，則兔有$(10-x)$隻。 根據題意列方程為: $2x + 4(10-x) = 28$。 解此方程便知雞兔各幾隻。
初中	建立聯立二元一次方程作答。

黃老師還提出延伸探究的一些可行方案: 她把「雞兔腳數之和改為腳數之差」、把「總頭數換成兩數之差」、把「兩種動物增至三種」，從而創造出簇新兼有趣的數題；她又解釋「雉兔問題」的思維如何應用在「工程問題」、「年齡問題」、「統計問題」和「行程問題」上，促使學生學以致用(王麗燕, 2008, 頁 41-42)。

類近「雉兔問題」而載錄於古算書或民間傳留的詩詞中，有很多別具心裁的版本，以下是我們搜羅的一些例子。

- 「一隊敵軍一隊狗，兩隊併成一隊走，數頭一共三百六，數腿一共八百九， 請君仔細算一算，多少敵軍多少狗?」
- 「張生有錢二十貫，上街去買綾和羅；四十三文綾一尺，四十四文一尺羅；共買四百六十尺，綾羅數量各幾何?」
- 「九頭鳥九頭一尾，九尾鳥九尾一頭。今有頭 510 個，尾 590 個，問兩種鳥各幾何?」
- 「八臂一頭號夜叉，三頭六臂是哪吒，兩處爭強來鬥勝，不相勝負正交加。三十

六頭齊出動， 一百八手亂相抓。旁邊看者殷勤問，幾個哪吒幾夜叉?」

- 「三足團魚六眼龜，共同山下一深池，九十三足亂浮水，一百二眼將人窺。或出沒，往東西，倚欄觀看不能知。有人算得無差錯，好酒重斟贈數杯。 」
- 「群羊一百四十，剪毛不彈勤勞，群中有母有羊羔，先剪二羊比較；大羊剪毛斤二，一十二兩羔毛，百五十斤是根苗，子母各該多少?」
- 「凳子方，幾兒圓，整整排成一個圓。數數個數三百六，看看腿兒一千三，四腿方凳多少條?三腿圓幾多少面?」
- 「老頭提籃去趕集，一共花去七十七；滿滿裝了一菜籃，十斤大肉三斤魚；買好未曾問單價，只因回家心發急；道旁行人告訴他，九斤肉錢五斤魚。 」

7. 回顧問題

談到延伸探究，讓我們再回顧「百雞問題」。我們最初列出的一對方程:

$$x + y + z = 100 \qquad \ldots (1)$$

$$5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100 \qquad \ldots (2)$$

是數論裡的不定方程。

(2) × 3: $15x + 9y + z = 300 \qquad \ldots (18)$

((18)−(1))÷2: $7x + 4y = 100 \qquad \ldots (19)$

由於 gcd(7, 4) = 1，而明顯 1 | 100，∴ (19)有整數解。

又 $7(-1) + 4(2) = 1$

$7(-100) + 4(200) = 100$

所以 (-100, 200) 是其中一組整數解。

設一般解為 $x = -100 + 4t$

則 $y = 200 - 7t$ 其中 $t \in Z$

$x = -100 + 4t > 0$ 及 $y = 200 - 7t > 0$

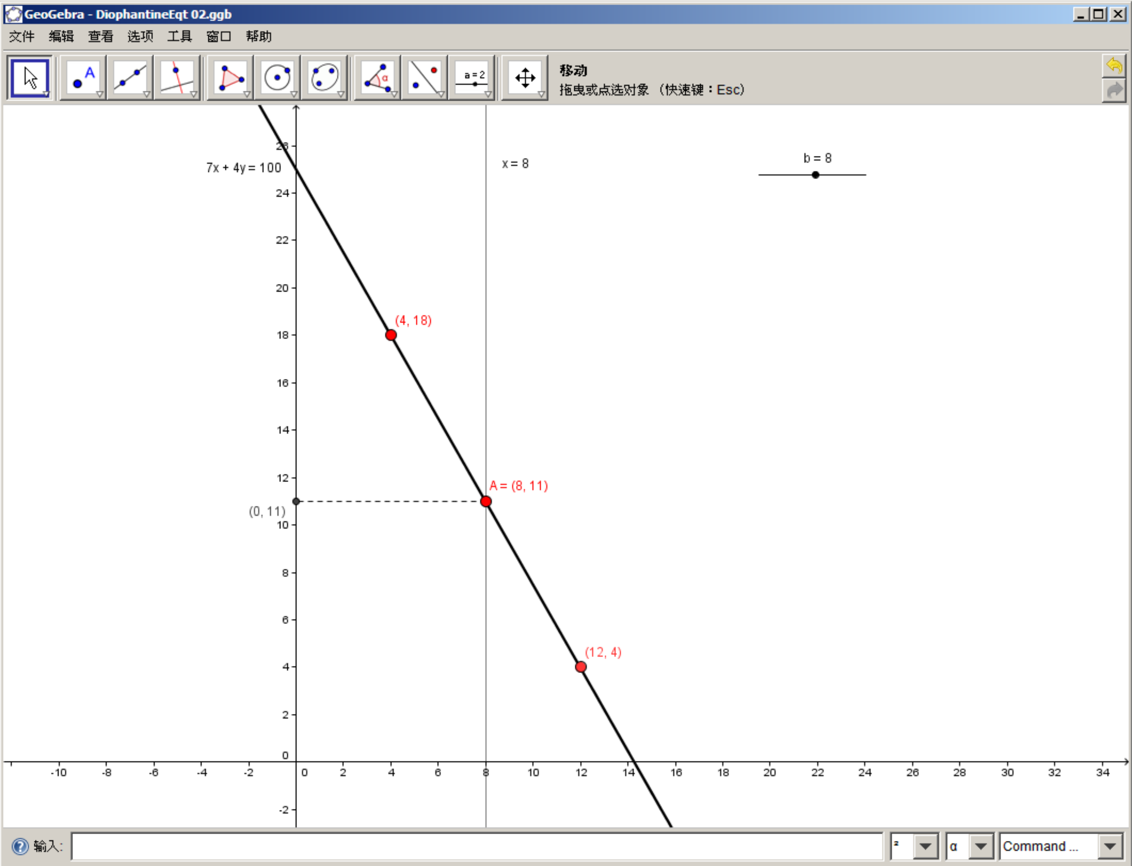
$4t > 100$ $\qquad 200 > 7t$

$t > 25$ $\qquad 28\frac{4}{7} > t$

∴ t = 26, 27, 28

t	x	y	z
26	-100 + 4(26) = 4	200 – 7(26) = 18	100 – 4 – 18 = 78
27	8	11	81
28	12	4	84

再循另一角度思考，$7x + 4y = 100$ 是平面上一條直綫，第一象限內處於這條直綫上的整數格點便是方程的解。這樣的圖我們可以運用動態幾何軟件 GeoGebra 繪畫出來。三組解答便活現圖上。



我們學過的不定方程及 GeoGebra 也派用場呢!

8. 結語

詠敏的反思

「這些艱深的數學知識會傳授給小學生嗎?為甚麼小學老師需要學習這些高深的數學知識?」面對這些問題，大部份的時候我都沒有答案。所以，以往抱着「學完就算」的心態，為應付考試或報告而學習，又因為沒有實際用處，學過了很快就會忘記得一乾二淨。

這一次的研習對我來說是個寶貴的學習經驗。透過老師的指引，開始閱讀有關的文章，我逐漸改變自己舊日的學習態度，用多角度去探討「雉兔同籠」與「百雞問題」有關的數理。在不知不覺間重溫並運用一些曾經學過的學科知識，又把數題連繫到教學方法上。我恍然大悟，更深入體會劉徽的話 — 提出(解方程組的)新術的目的並不在於要推廣這種方法，而要告訴人們這樣一個道理:「必須深刻掌握數理，靈活運用數學方法，以解決數學問題。」(郭書春, 1995, 頁 101)

TPCK(整合技術的學科教學知識)倡議數學知識、教學知識及科技知識的融會貫通。若不朝這方向發展，教師頂多衹是一個比不上計算機的「計算者」。惟有以豐富的學科知識為基礎，配上適合的教學方法可以啟發學生思維，而喜愛數學的教師，才可以身作則，帶領學生體會數學的真諦。

樹培的反思

PCK(學科教學知識)、TPCK 這些理念是我認同的，但實踐起來，又談何容易? 其實與「雉兔同籠」有密切連繫的還有「河上蕩桮」、「和尚吃饅頭」(見附件工作紙)等數題，而不定方程的討論可延伸到「分油」等問題上，觸及的數學更為豐富，但礙於一己的知識、能力和時間的限制，研習的範圍極為有限。若果詠敏能隨學養深、教學技巧高的同事研習，她的成長會更為理想。

與詠敏一起探討這道題，我見証過她的苦樂，亦隨過她的感受起跌。我清楚記得她將「雉兔同籠」給同事介紹的欣悅，也沒法忘掉她於課室裡實踐效果不如理想的失落臉容。成功固然帶來成就感、推動力，但學習面對逆境，從失意中學習也極為重要。

我明白許許多多以上討論的數理不適宜傳授與小學學生。就算是初中學生，亦不可能直接搬移到他們的教室裡。但我相信這幾個月的學習歷程給詠敏帶來一點兒新的衝激，她燃亮起的數學火焰是繼續進修和專業發展的前行亮光。願詠敏將這薪火相傳下去。

參考資料

王麗燕(2008): 我教"雞兔同籠"，《湖南教育(數學)2008 年 7 月號》，湖南。
http://c.wanfangdata.com.cn/periodical/hnjj-sx/2008-7.aspx

李諄風注(1980):《孫子算經》，北京，文物出版社。

李繼閔(1992):《九章算經及其劉徽注研究》，臺北市，九章出版社。

吳曉蓉編(2006):《國小數學學習手冊六下》，台北，康軒文教事業股份有限公司。

郁祖權(2007):《中國古算解趣》，北京，科學出版社。

郭書春(1995):《中國古代數學》，臺北，商務印書館。

許純舫(1981):《古算趣味》，香港，香港青年出版社。

張丘建(1980): 《張丘建算經》，北京，文物出版社。

關樹培(2000): 從雞兔問題談起，《全港小學數學比賽十週年紀念特輯》，香港。

電郵

趙詠敏 maggiechiuwingman@yahoo.com.hk

關樹培 spkwan@ied.edu.hk

附件

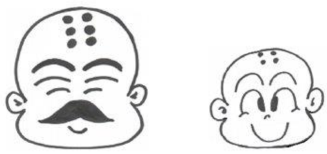
《數學探奇 2003》工作紙 —

百位和尚吃饅頭

一百饅頭一百僧*，大僧三個更無爭，
小僧三人分一個，大小和尚各幾丁*。　　　　　　程大位《算法統宗》
注解：*“僧”即和尚。　　　*“幾丁”即幾個。

釋文：
現有 100 位和尚及 100 個饅頭，並把所有饅頭完全分給這 100 位和尚。 如果 1 位大和尚分得 3 個饅頭，3 位小和尚共分得 1 個，問大、小和尚各有多少人？

動動腦，用分組法算算大小和尚多少人。



1　a)　1 位大和尚吃 ______ 饅頭；

　b)　3 位小和尚吃 ______ 饅頭。

　c)　1 位大和尚及 3 位小和尚共吃 ______ 饅頭。

2. 如果要把 100 個饅頭分成若干組，你會把多少個饅頭編成同一組，並共有多少組呢？

　每組有 ________________________________ 個饅頭，共有 ______ 組。

3. 這裡共有 ______ 組饅頭。
　問分別共有多少大、小和尚多少人？

　共有大和尚：________________________________ ＝ ______ (人)

　共有小和尚：________________________________ ＝ ______ (人)

4. 再思考程大位的另一道題：

　千位官兵分布疋
　一千官軍一千布，一官四疋無零數，
　四軍才分布一疋，請問官軍多少數。　　　　　　程大位《增刪算法統宗》
　注解：“官”指軍官、隊長；“軍”指士兵。

修改自鄧春霞同學工作紙